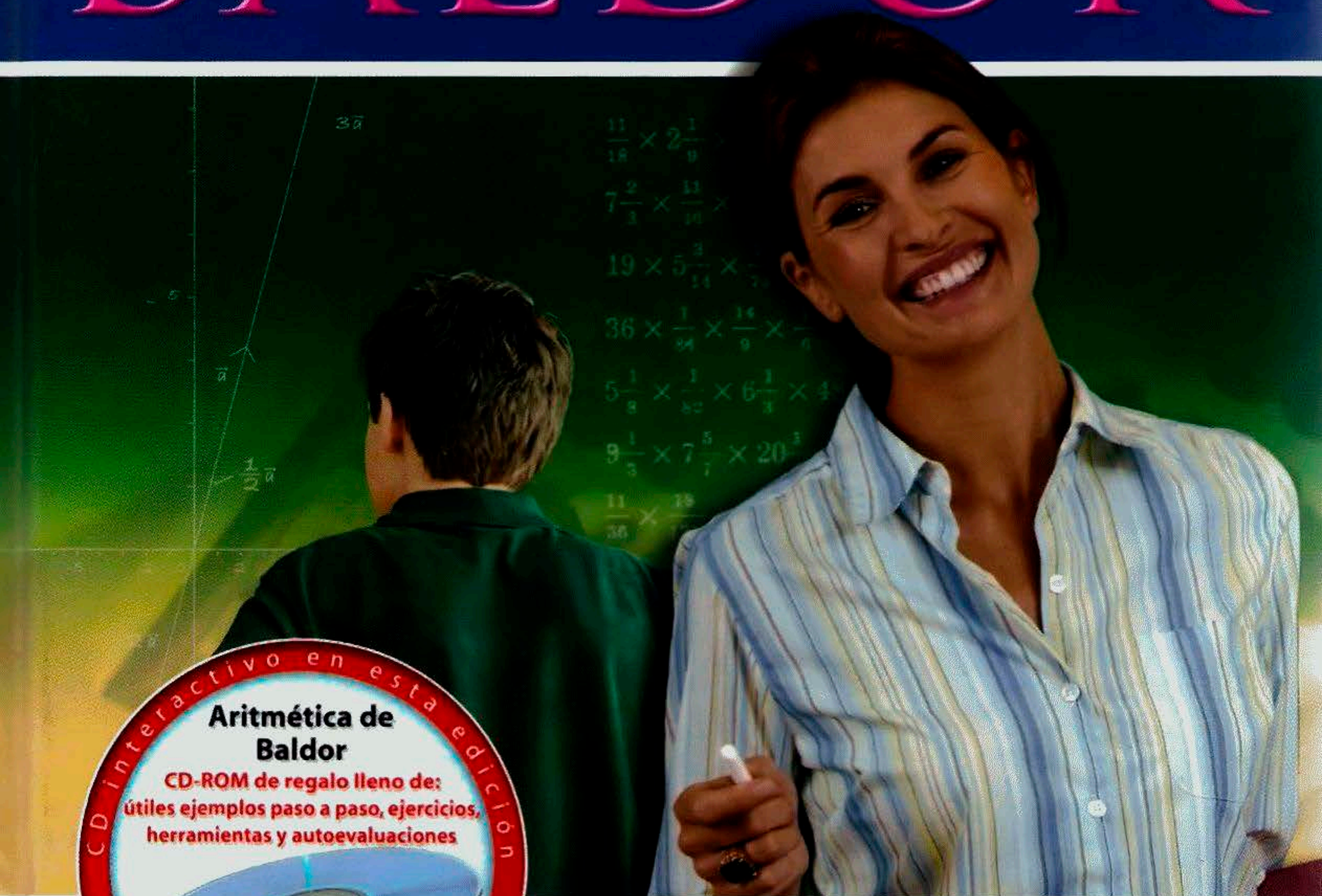


Aritmética de Baldor ahora con una **nueva imagen**

ARITMÉTICA BALDOR



¡Exige con esta edición tu CD-ROM!



ARITMÉTICA

DR. AURELIO BALDOR

Jefe de la Cátedra de Matemáticas,
Stevens Academy, Hoboken,
New-Jersey, U.S.A.

Profesor de la Cátedra de Matemáticas,
Saint Peter's College, Jersey City,
New-Jersey.

Fundador, Director y Jefe de la
Cátedra de Matemáticas
del Colegio Baldor,
La Habana, Cuba.

Teórico • práctica
con 7,008 ejercicios y problemas

GRUPO EDITORIAL PATRIA

ÍNDICE

Capítulos	Páginas
	Preliminares 3
I	Nociones sobre conjuntos 13
II	Numeración 26
III	Estudio de otros sistemas de numeración 36
IV	Numeración romana 45
V	Relaciones de igualdad y desigualdad 48
VI	Operaciones aritméticas: Suma 58
VII	Resta o sustracción 70
VIII	Operaciones indicadas de suma y resta 79
IX	Complemento aritmético 87
X	Multiplicación 90
XI	Operaciones indicadas de multiplicación 102
XII	División 113
XIII	Operaciones indicadas de división 128
XIV	Problemas tipo sobre números enteros 133
XV	Elevación a potencia y sus operaciones inversas 152
XVI	Números primos y compuestos Múltiplos y divisores 160
XVII	Principios fundamentales de la divisibilidad 164
XVIII	Caracteres de divisibilidad 173
XIX	Teoría de los números primos 190
XX	Descomposición en factores primos 203
XXI	Máximo común divisor 210
XXII	Mínimo común múltiplo 222
XXIII	Números fraccionarios. Propiedades generales 231
XXIV	Reducción y simplificación de quebrados 240
XXV	Operaciones con números fraccionarios 254
XXVI	Problemas tipo sobre quebrados comunes 282
XXVII	Fracciones continuas 306
XXVIII	Fracciones decimales 311
XXIX	Conversión de fracciones 324
XXX	Potenciación 339
XXXI	Radicación 356
XXXII	Radicales 362
XXXIII	Raíz cuadrada 373

Capítulos	Páginas
XXXIV	Raíz cúbica 389
XXXV	Sistema métrico decimal 406
XXXVI	Densidad 432
XXXVII	Otros sistemas de medición 438
XXXVIII	Áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos 450
XXXIX	Números denominados 468
XL	Longitud y tiempo 487
XLI	Razones y proporciones 495
XLII	Transformación, comparación y propiedades de las proporciones geométricas 506
XLIII	Magnitudes proporcionales 517
XLIV	Regla de tres 522
XLV	Tanto por ciento 532
XLVI	Interés 549
XLVII	Descuento 566
XLVIII	Repartos proporcionales 584
XLIX	Compañía 599
L	Promedios 608
LI	Aligación o mezcla 610
LII	Aleaciones 620
LIII	Monedas 625
LIV	Conjunta 629
LV	Seguros 633

Cuadros y tablas

De números primos	197
De densidad de algunos cuerpos	433
De conversión de medidas del sistema angloamericano al sistema métrico decimal	449
De áreas	455
De volúmenes	465
De interés compuesto	564
De interés compuesto decreciente	565
De tipo de cambio de las diferentes monedas americanas y el euro con respecto al dólar estadounidense (USD)	626
De monedas de los países de América y España	627
De primas de seguros de vida	636
De primas anuales de seguros contra incendios	638



Los orígenes empíricos de la matemática egipcia la despojaron de las fantasías de la magia. La rigurosa experiencia como fuente de la aritmética puede comprobarse en el documento matemático más antiguo que se conoce: el papiro descubierto

por Rhind en el siglo XIX, que el escriba Ahmes (A' h-mose) copió en 1650 a. C., de una obra anterior. Este papiro, llamado de Rhind o Ahmes, se encuentra en el Museo Británico.

PRELIMINARES

LA NATURALEZA. CUERPOS Y FENÓMENOS NATURALES

1

La **Naturaleza** es el conjunto de todo lo que existe.

Cuerpo es todo lo que ocupa un lugar en el espacio. Todos los seres del Universo, como nosotros mismos, los animales, las plantas, el agua, el aire, un libro, una silla, etc., son cuerpos.

Fenómenos naturales son los cambios o transformaciones que sufren los cuerpos. El crecimiento de los animales y las plantas, la evaporación del agua, la caída de los cuerpos por la atracción de la gravedad y la combustión de un pedazo de madera, son ejemplos de fenómenos naturales.

VOLUMEN DE LOS CUERPOS

2

El volumen de un cuerpo está dado por el lugar que ocupa en el espacio en un momento determinado.

Observando los cuerpos que se presentan en la Naturaleza y separando mentalmente sus cualidades, menos las que se refieren a sus volúmenes, para fijarnos sólo en este atributo común a todos ellos, podemos llegar al concepto de **volumen**.

El concepto de volumen es general. Es decir, no se refiere a ningún cuerpo determinado, sino al atributo común que tienen todos los cuerpos de ocupar un lugar en el espacio.

3

LÍMITE DE LOS CUERPOS. SUPERFICIE

Pensemos en una pelota de goma en el aire. Imaginemos una onda esférica que partiendo de su centro vaya irradiando hasta rebasar el límite de la pelota. Llamamos **superficie** de la pelota a ese límite donde termina la pelota y comienza el aire, pero sin incluir ni pelota ni aire. También se dice que es la superficie del aire en contacto con la pelota.

Llamamos superficie, pues, al límite que separa unos cuerpos de otros.

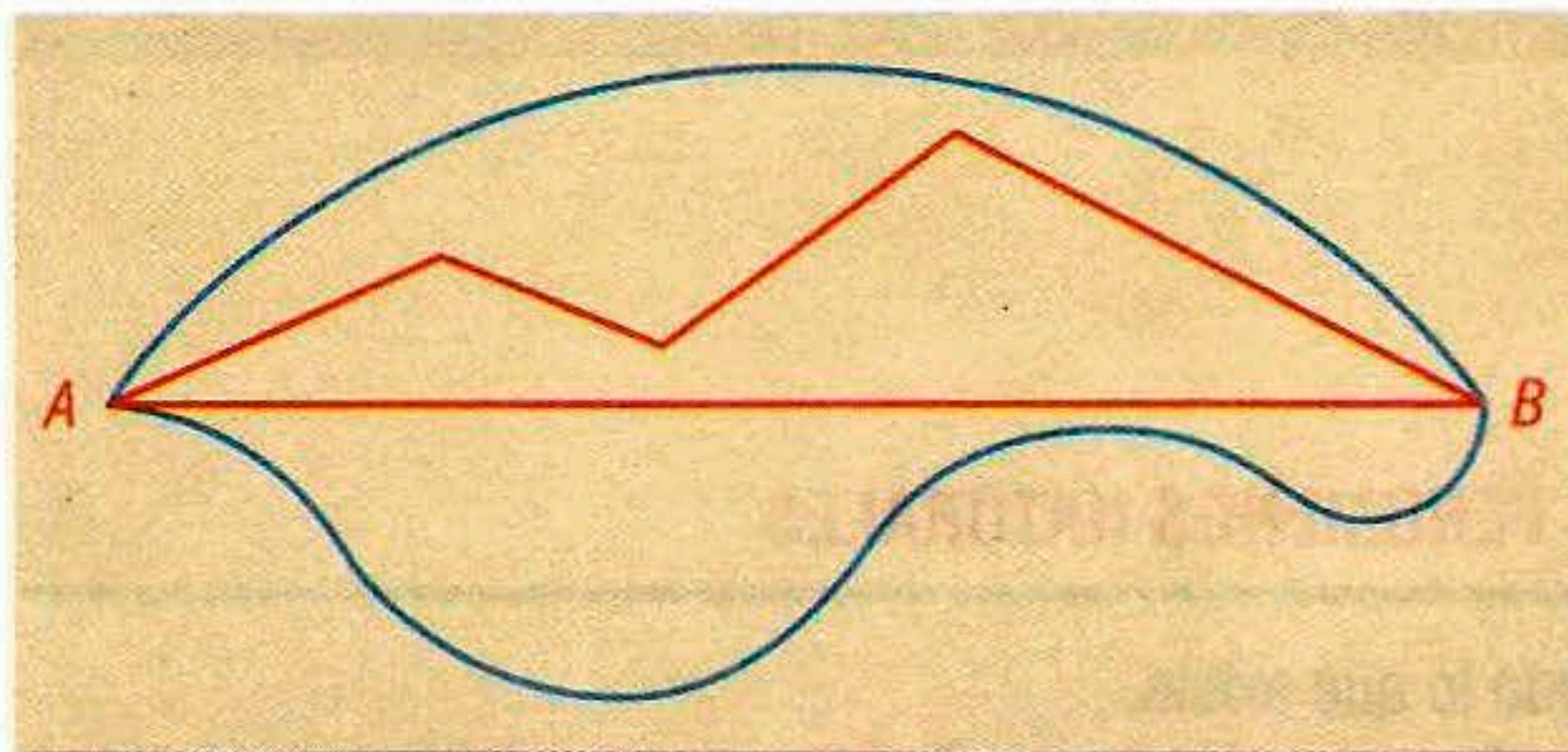
Observando los cuerpos que se presentan en la Naturaleza y separando mentalmente todas sus otras características, para fijarnos sólo en sus superficies, podemos llegar a tener el concepto de superficie.

El concepto de superficie es general; no se refiere a la superficie de ningún cuerpo determinado, sino a ese atributo, común a todos los cuerpos, de tener un límite que los separa de los demás.

4

TRAYECTO ENTRE DOS PUNTOS: LONGITUD. DISTANCIA

Figura 1

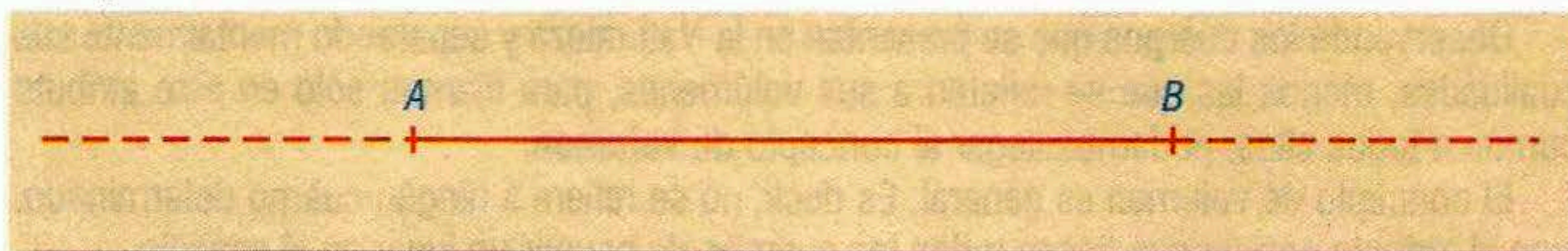


Imaginemos dos puntos⁽¹⁾ cualesquiera en el espacio, A y B por ejemplo, y pensemos en varios de los trayectos que podría seguir uno de ellos, si fuese móvil, para llegar al otro. Se dice que cada uno de esos trayectos tiene una determinada **longitud**.

Considerando los trayectos que podrían recorrerse entre dos puntos o entre muchos pares de puntos, y fijándonos sólo en que cada uno representa una longitud, separemos mentalmente toda otra característica o cualidad de los mismos y podremos llegar así al concepto de longitud.

De todos los trayectos que se pueden recorrer entre dos puntos, el más corto de todos tiene una especial significación. Se le suele llamar el menor trayecto, la menor distancia, o sencillamente la **distancia** entre esos dos puntos. En el caso de la figura, se lee distancia AB.

Figura 2

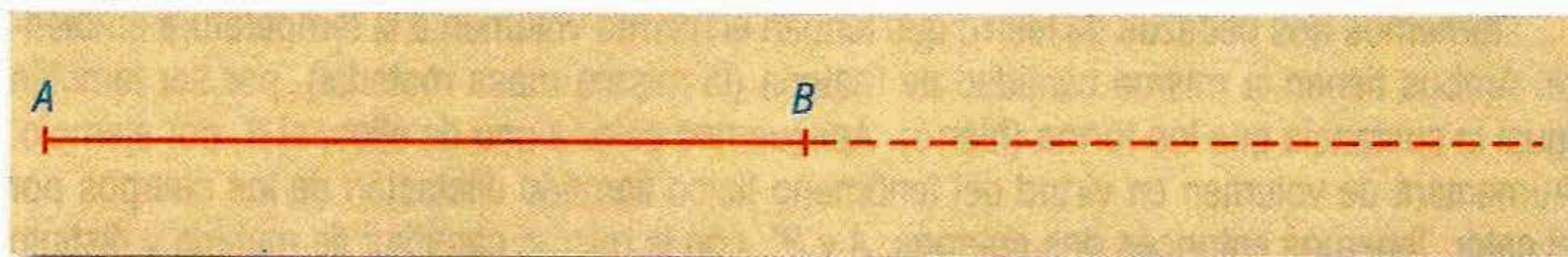


⁽¹⁾Un punto es una simple posición en el espacio. Carece, pues, de volumen.

Al prolongar de modo indefinido esta distancia sobre su misma dirección y en ambos sentidos, podríamos tener una idea de lo que en Geometría se conoce como línea recta o simplemente **recta**. En este caso, la primitiva distancia entre los dos puntos viene a ser un **segmento** de esta recta (segmento AB , Fig. 2).

Si la distancia se prolongase en un solo sentido indefinidamente, tendríamos una idea de lo que se conoce como **semirrecta** (Fig. 3). Suele decirse que A es el origen de la semirrecta.

Figura 3



DIMENSIONES DE LOS CUERPOS

5

Consideremos un cuerpo de forma regular, como un ladrillo (Fig. 4), y determinemos en él tres pares de puntos, A y B ; B y C , y C y D .

Las distancias AB , BC y CD , se dice que representan las dimensiones de ese cuerpo. La distancia AB representa la primera dimensión (largo); la distancia BC representa la segunda dimensión (ancho), y la distancia CD representa la tercera dimensión (profundidad).

Sobre otros cuerpos similares pueden considerarse también tres pares de puntos tales que sus respectivas distancias sean perpendiculares entre sí en el espacio. Ellas representarán las dimensiones de esos cuerpos.*

Todos los cuerpos tienen tres dimensiones, aun cuando no sea tan fácil de determinar como en el ladrillo; en cuerpos de forma esférica como una bola de billar, o de forma irregular como un pedazo de roca, se pueden determinar las tres dimensiones, sólo que esta determinación resulta un poco más difícil.

Figura 4

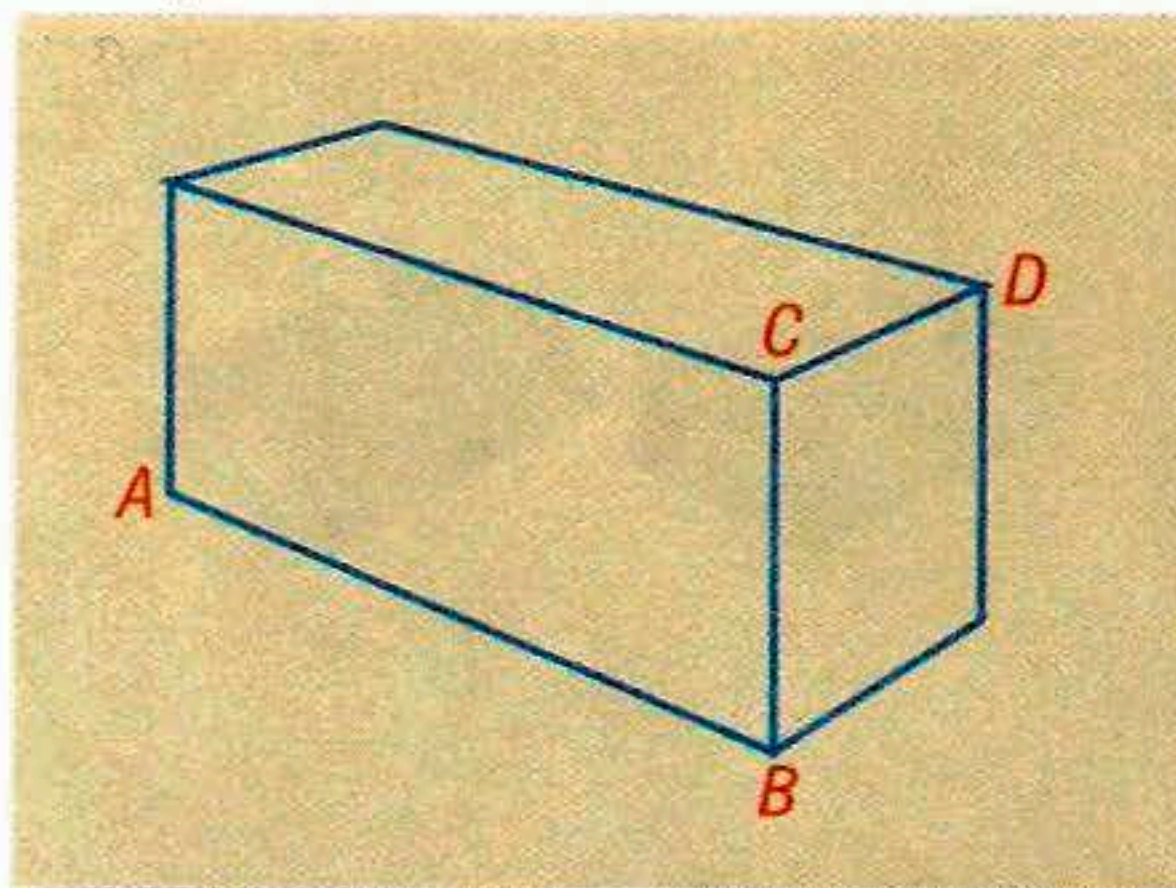
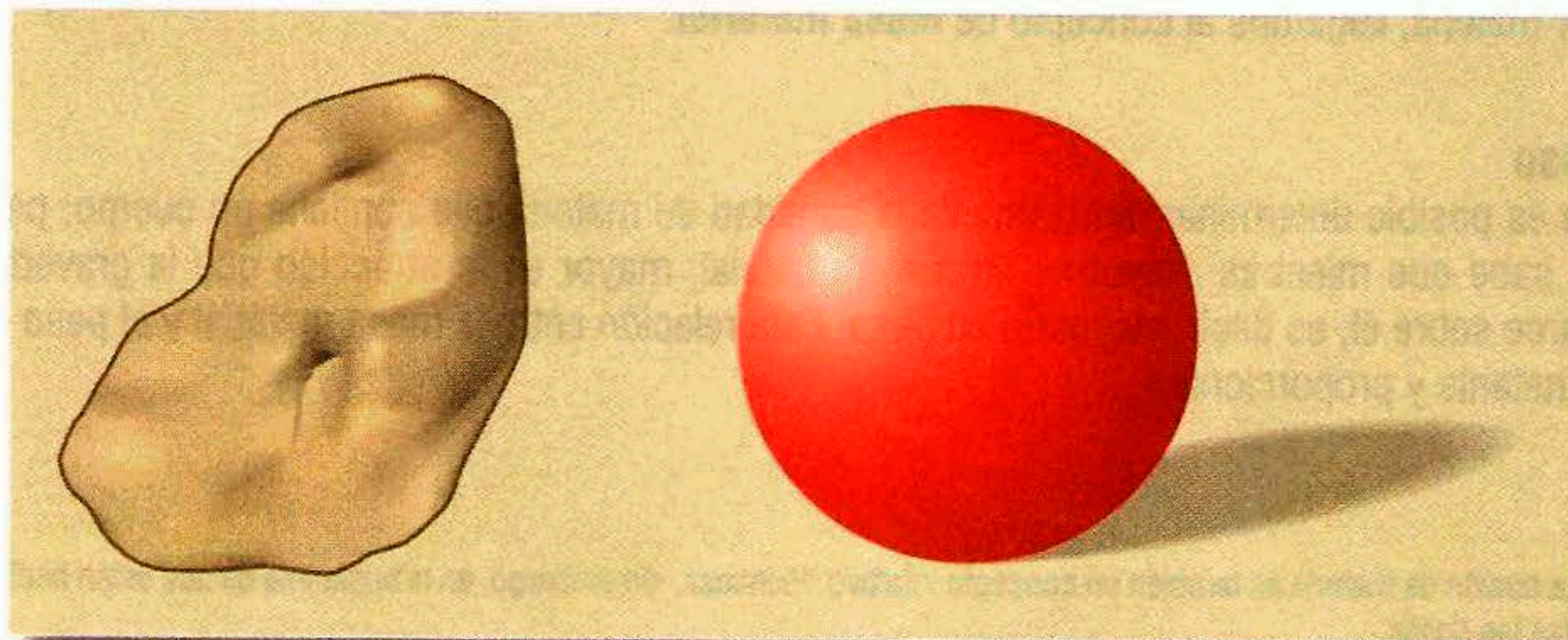


Figura 5



CANTIDAD DE MATERIA QUE CONTIENE UN CUERPO MASA MATERIAL. PESO

Masa material

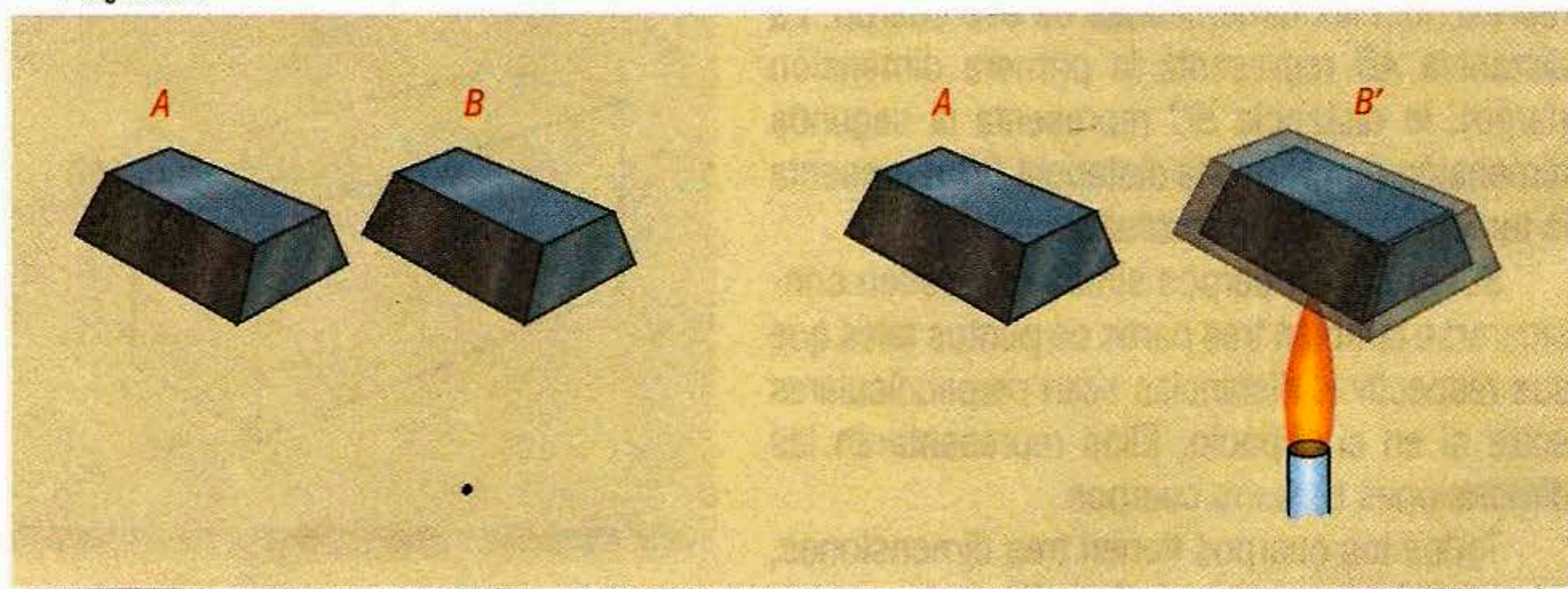
Con frecuencia se definen también los cuerpos como porciones limitadas de materia⁽¹⁾, lo que no contradice, en modo alguno, la definición dada anteriormente.

La cantidad de materia que tiene un cuerpo se llama **masa material** de ese cuerpo.

Tomemos dos pedazos de hierro que tengan el mismo volumen a la temperatura ambiente. Ambos tienen la misma cantidad de materia (la misma masa material), por ser también igual la sustancia que los forma (hierro). Apliquemos calor a uno de ellos, al *B*, por ejemplo. Aumentará de volumen en virtud del fenómeno físico llamado dilatación de los cuerpos por el calor. Tenemos entonces dos cuerpos, *A* y *B'*, con la misma cantidad de materia y distinto volumen.

Si pudiésemos disminuir en el cuerpo caliente *B'*, la porción aumentada hasta igualar su volumen con el cuerpo *A*, tendríamos dos cuerpos con el mismo volumen y distinta cantidad de materia.

Figura 6



Observando los cuerpos que se presentan en la Naturaleza y separando mentalmente todas sus otras cualidades para fijarnos sólo en el atributo común a todos ellos de estar formados por materia, llegamos al concepto de **masa material**.

Peso

No es posible determinar directamente la cantidad de materia que contiene un cuerpo; pero se sabe que mientras mayor es su masa material, mayor es la atracción que la gravedad ejerce sobre él, es decir, mayor es su peso. Esta relación entre la masa material y el peso es constante y proporcional.

⁽¹⁾La noción de materia es también un concepto intuitivo. Piénsese, sin embargo, en la sustancia de que están hechas todas las cosas.

Observando los cuerpos que se presentan en la Naturaleza y separando mentalmente todas sus otras cualidades, para fijarnos sólo en la atracción que la gravedad ejerce sobre ellos, llegamos al concepto de **peso**.

Debido a la relación constante que hay entre la masa material de un cuerpo y su peso, hasta el punto de expresarse con el mismo número (551), prescindiremos en esta obra de hablar de un modo sistemático acerca de la masa material de los cuerpos, para referirnos sólo a su peso. Pero téngase presente que los conceptos de masa material y peso son distintos.

PLURALIDADES

7

Consideremos los cuerpos que se encuentran en una habitación en un momento dado. Constituyen lo que se llama un **conjunto de cuerpos**.

Imaginemos otros conjuntos de cuerpos como los libros que están sobre una mesa o las frutas que hay en una cesta. Imaginemos inclusive, conjuntos de entes inmateriales como las ideas de un razonamiento.

Observando los conjuntos de cuerpos o de entes inmateriales que se puedan considerar en la Naturaleza y separando mentalmente todas sus características particulares para fijarnos sólo en su condición de ser conjuntos de cosas, llegamos al concepto de **pluralidad**. El concepto de pluralidad, que es intuitivo, coincide, pues, con el concepto genérico de conjunto; pero reservaremos el término **conjunto** para designar los grupos de cosas, es decir, en su acepción específica, y el de pluralidad para su acepción genérica.

El de pluralidad es, pues, un concepto general. No se refiere a la pluralidad de ningún conjunto determinado, sino al atributo común a todos los conjuntos de estar integrados por entes, materiales o no.

Podemos pensar también en **pluralidades de ciertos cuerpos** como pluralidades de naranjas, pluralidades de lápices, pluralidades de puntos. Estos conceptos siguen siendo generales, pues no se refieren a ningún conjunto determinado de naranjas, ni de lápices, ni de puntos; pero su generalidad es menor, desde luego, que la del concepto de pluralidad, porque excluye de su connotación todos los conjuntos que no sean de naranjas, lápices o puntos.

ABSTRACCIÓN. CONCEPTOS ABSTRACTOS

8

El proceso intelectual mediante el cual separamos en nuestra mente las cualidades particulares de varios objetos para fijarnos exclusivamente en uno o en varios atributos comunes a todos ellos, recibe el nombre de **abstracción**. El concepto que es resultado de una abstracción recibe el nombre de **concepto abstracto**⁽¹⁾.

Los conceptos de volumen, superficie, longitud, masa material, peso y pluralidad de cosas, son conceptos abstractos, pues son el resultado de abstracciones, como puede apreciarse al releer los párrafos anteriores.

Otro importantísimo concepto abstracto es el de número, que estudiaremos en el próximo capítulo.

⁽¹⁾En rigor, la operación mental que nos conduce al concepto se llama **generalización simple**. La abstracción es sólo el instrumento mental con el cual aislamos los atributos que queremos recoger en ese concepto.

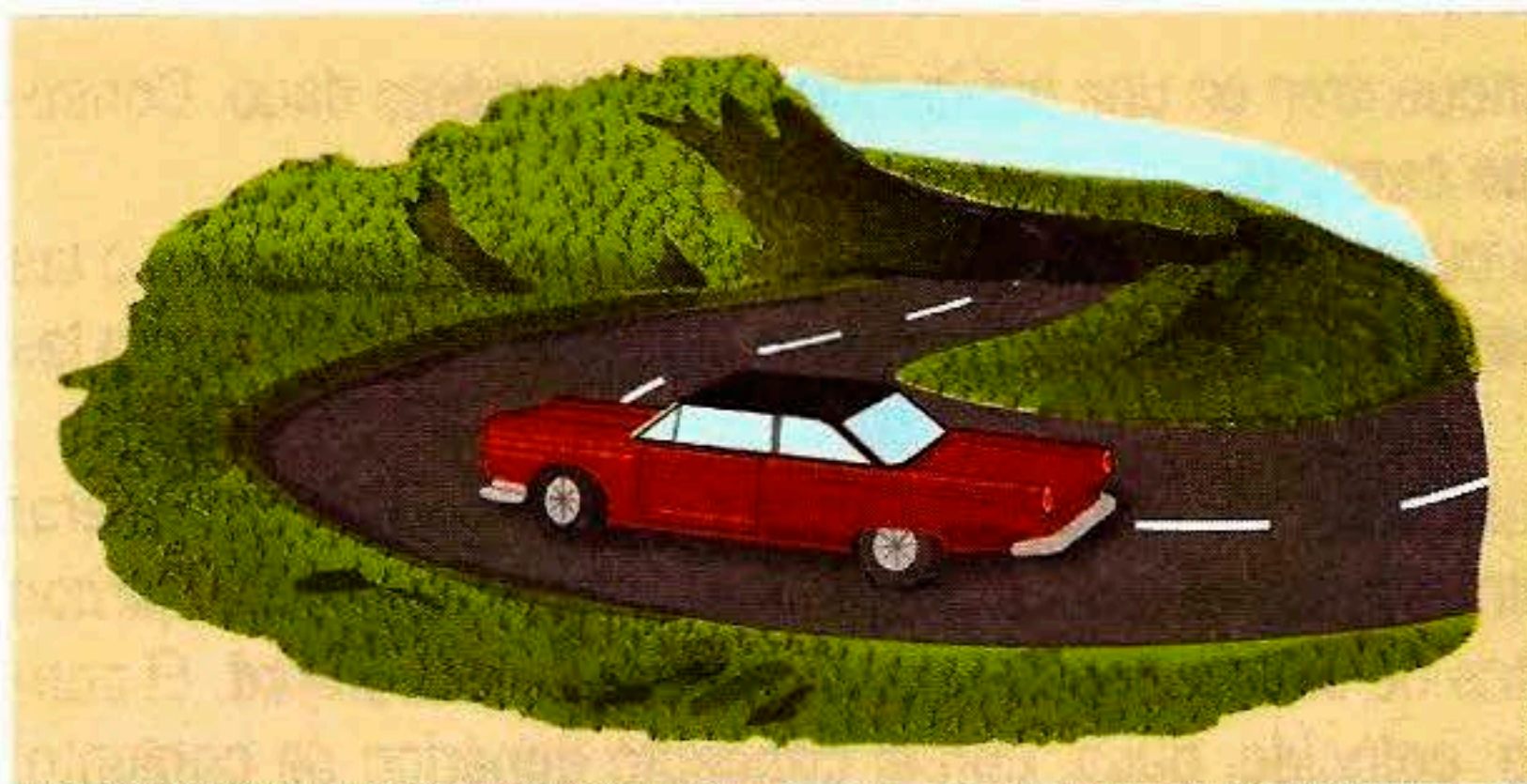
9

MAGNITUDES Y CANTIDADES

Los conceptos abstractos de volumen, superficie, longitud, masa material, peso, pluralidad, pluralidad de cosas, tiempo, temperatura, velocidad, fuerza y amplitud angular, reciben el nombre de **magnitudes**.

Los casos específicos o concretos, que por observación y abstracción de los cuales hemos llegado a los conceptos abstractos antes mencionados, se llaman **cantidades**. Así, son cantidades: el volumen **de este libro**, la superficie **de mi pelota**, la longitud **de aquel camino**, los alumnos **de esa aula**, el tiempo **que hace desde que nació Newton**, la velocidad **de ese automóvil**, etcétera.

Figura 7



Nótese que dos o más casos particulares correspondientes a la misma magnitud pueden compararse, pudiendo determinarse si son iguales o no. Se pueden comparar, por ejemplo, la longitud de un lápiz con la de una regla, y determinar si esas longitudes son iguales o desiguales.

Magnitudes son, pues, los conceptos abstractos en cuyos estados particulares (cantidades) pueden establecerse la igualdad y la desigualdad.

Cantidades son los estados particulares de las magnitudes.

Los de magnitud y cantidad son a su vez conceptos abstractos.

10

CLASES DE MAGNITUDES

Atendiendo a su naturaleza, las magnitudes pueden ser **continuas** y **discontinuas**.

Magnitudes continuas son aquellas que, como la longitud y el volumen, dan idea de totalidad, sin partes o elementos naturales identificables. Otras magnitudes continuas son: la superficie, la masa material, el tiempo, la presión, la fuerza electromotriz, el peso, la temperatura y la velocidad.

Magnitudes discontinuas son las pluralidades de cosas (7), como las pluralidades de libros, mesas, rectas, etc. Estas magnitudes también se llaman **discretas**.

Las magnitudes también se dividen en **escalares** y **vectoriales**.

Magnitudes escalares son las que no poseen dirección, como longitud, peso, área, volumen y tiempo. Estas magnitudes quedan por completo definidas por un **número** que expresa su medida.

Así, la longitud es una magnitud escalar, porque al decir que una regla tiene, por ejemplo, 20 cm, queda perfectamente determinada su longitud.

Magnitudes vectoriales son las que poseen dirección y sentido, como la fuerza y la velocidad. Para que estas magnitudes queden definidas no basta conocer su valor, representado por un número, sino que es necesario, además, conocer su dirección y su sentido. Si yo digo, por ejemplo, que la velocidad de un móvil es de 4 cm por segundo (lo que quiere decir que recorre 4 cm en cada segundo), sólo con esto no se define la velocidad, pues para ello tendré que especificar cuál es la **dirección** que sigue el móvil, por ejemplo, vertical, y en qué **sentido** lo hace, por ejemplo, de abajo a arriba.

CLASES DE CANTIDADES

11

Según sean estados particulares de una u otra clase de magnitud, las cantidades pueden ser continuas, discontinuas, escalares y vectoriales.

Cantidades continuas son los estados particulares de magnitudes continuas, como el volumen de una naranja, la longitud de una carretera, la temperatura de mi cuerpo o la velocidad de un cohete.

Cantidades discontinuas o discretas son los estados particulares de magnitudes discontinuas, como los alumnos de un colegio, las hojas de un libro o las pelotas que hay en una caja.

Cantidades escalares son los estados particulares de las magnitudes escalares, como la longitud de un lápiz, el área de una sala o el volumen de un cuerpo.

Cantidades vectoriales son los estados particulares de las magnitudes vectoriales, como la velocidad de un corredor o de un automóvil.

Cantidades homogéneas son las cantidades de una misma magnitud, como el volumen de una piedra o de una caja; **cantidades heterogéneas** son cantidades de distintas magnitudes, como la longitud de un terreno y el peso de una persona.

1. Mencionar cinco ejemplos de cuerpos animados, cinco de cuerpos inanimados y cinco de cuerpos extraterrestres.
2. ¿Son cuerpos una piedra y una gota de agua? ¿Qué diferencia hay entre ellos?
3. ¿Hay algún cuerpo en la Naturaleza que carezca de volumen?
4. ¿Qué diferencia hay entre la superficie de un cuerpo sólido y la de un líquido?
5. ¿Qué se quiere decir al expresar que el concepto de superficie es general?

1

Ejercicio

12 LA CIENCIA MATEMÁTICA

Cuando consideramos las cantidades, es decir, los estados particulares de las magnitudes, podemos apreciar no sólo que pueden ser objeto de **comparación** y determinar **igualdad** o **desigualdad** entre esos estados, sino las **variaciones** que puede sufrir un mismo estado para tomar otros, en virtud de los fenómenos naturales (1) (distancia entre dos móviles que aumenta o disminuye; volumen de un sólido que se hace mayor por la acción del calor; presión de un gas encerrado que varía al modificar su volumen, etcétera).

La Ciencia Matemática tiene por objeto el estudio tanto de las magnitudes como de las cantidades, que son las variaciones de aquélla en el tiempo y el espacio (estados particulares).

13 CLASIFICACIÓN DE LA CIENCIA MATEMÁTICA

Los criterios que generalmente se fijan para clasificar la Ciencia Matemática en elemental y superior son algo arbitrarios.

Las tres ramas mejor caracterizadas de la Ciencia Matemática son, la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. Mas, siguiendo un criterio cuantitativo (suma total de asuntos estudiados) y otro cualitativo (complejidad de los asuntos objeto de estudio), cualquiera de estas tres ramas presenta una serie de niveles que pueden orientarse hacia lo elemental o hacia lo superior.

FORMA EN QUE SE CONSTITUYE LA CIENCIA MATEMÁTICA

14 CONCEPTOS INTUITIVOS.

En toda consideración sobre el carácter de una ciencia, hay que distinguir entre **objetos** y sus relaciones y **propiedades** de los objetos y sus relaciones.

Objeto, desde el punto de vista de la ciencia, no tiene que ser necesariamente una cosa material. Un libro es objeto; pero lo es también el espacio, un razonamiento o un punto geométrico. Es decir, son **objetos** aquellos datos o sistemas de datos que se presentan a nuestra experiencia con cierta perdurabilidad o identidad a través del tiempo.

La inteligencia humana tiene conocimiento de los objetos de diversas maneras. Hay conocimientos puramente intuitivos, es decir, aquellos que logramos por intuición sensible, por contacto directo con los objetos, sin que medien para ello otros conocimientos anteriores. La mente los capta sin razonamiento alguno. De este tipo es el conocimiento de espacio, materia, unidad, pluralidad, ordenación y correspondencia, entre otros.

Estos conocimientos reciben el nombre de **conceptos primitivos** o **intuitivos** y también el de **nociones intuitivas**, y tienen mucha importancia como fundamento de la Ciencia Matemática.

DEFINICIONES

15

La definición expresa una noción compleja mediante la enumeración de las nociones más simples que la integran. Por eso se dice que los objetos representados por las nociones intuitivas no son definibles, por no existir nociones previas que las integren.

Son ejemplos de definiciones:

Cantidad es el estado de una magnitud.

Triángulo es el polígono de tres lados.

PROPIEDADES

16

Las propiedades de los conceptos primitivos y de los conceptos definibles forman, por decirlo así, toda la armazón teórica de la Ciencia Matemática y se enuncian en forma de proposiciones lógicas, evidentes o no. Estas propiedades son los postulados y los teoremas.

POSTULADOS

17

Del mismo modo que existen los conceptos primitivos, hay ciertas propiedades fundamentales de carácter también intuitivo y, por tanto, de captación espontánea. Son los postulados.

Postulado es una verdad intuitiva que tiene suficiente evidencia para ser aceptada como tal.

Son ejemplos de postulados:

Todo objeto es igual a sí mismo.

La suma de dos números es única.

TEOREMA

18

Hay otras propiedades que han surgido a partir de un corto número de propiedades intuitivas. Tienen un carácter eminentemente deductivo; requiriéndose este tipo de razonamiento lógico (demostración) para que puedan ser aceptados con el carácter de verdades absolutas. Son los teoremas.

Teorema es, pues, una verdad no evidente, pero demostrable.

Son ejemplos de teoremas:

Si un número termina en cero o en cinco es divisible entre cinco.

Si un número divide a otros varios divide también a su suma.

Tanto el teorema como el postulado tienen una parte condicional (hipótesis) y una conclusión (tesis) que se supone se cumple en caso de tener validez la hipótesis. En el postulado, este cumplimiento se acepta tácitamente. En el teorema es necesaria la demostración, que consiste en una serie de razonamientos eslabonados, los cuales se apoyan en propiedades intuitivas (postulados), en otros teoremas ya demostrados o en ambos.

19 LEMA

Es un teorema que debe anteponerse a otro por ser necesario para la demostración de este último.

20 COROLARIO

Es una verdad que se deriva como consecuencia de un teorema.

21 RECÍPROCO

Recíproco de un teorema es otro teorema cuya hipótesis es la tesis del primero (llamado teorema directo) y cuya tesis es la hipótesis del directo. Ejemplo:

Teorema directo: **Si un número termina en cero o en cinco** (hipótesis), **será divisible entre cinco** (tesis).

Teorema recíproco: **Si un número es divisible entre cinco** (hipótesis), **tiene que terminar en cero o en cinco** (tesis).

No siempre los recíprocos son ciertos; para que sean ciertos tienen que cumplir determinadas condiciones.

22 NOTA

Es una advertencia u observación sobre alguna cuestión matemática.

23 PROBLEMA

Es una cuestión práctica en la que hay que determinar cantidades desconocidas llamadas incógnitas, por medio de sus relaciones con cantidades conocidas, llamadas datos del problema.

—| Figura 8 |—

	CONCEPTOS	PROPIEDADES
CAPTACIÓN ESPONTÁNEA	Conceptos intuitivos	Postulados
ELABORACIÓN RACIONAL	Definiciones	Teoremas



En la ilustración, basada en un friso asirio, aparece **Assurbanipal (Sardanápalo)** guiando a sus soldados en una batalla. Los pueblos mesopotámicos representaban los números con marcas en forma de cuña de acuerdo con su escritura cunei-

forme; así, una marca para el uno; dos para el dos, hasta el nueve. Para el diez, cien, etc., usaban signos convencionales. En la imagen pueden verse los cuatros primeros números.

Capítulo /

NOCIONES SOBRE CONJUNTOS

UNIDADES

24

La observación de **un solo** ser u objeto considerado de modo aislado, como una persona, una silla, un pizarrón, un libro, nos da la idea de **unidad**.

Estos ejemplos de unidades que hemos puesto son de muy diversa naturaleza y propiedades, pero todos ellos tienen de común que son **una sola cosa** de su especie. La palabra **uno** se aplica a cualquiera de esos seres tan diversos, prescindiendo de sus cualidades especiales. En este caso, efectuamos también una abstracción (8).

PLURALIDAD, CONJUNTO Y ELEMENTO

25

Ya hemos visto (7) que el de pluralidad es un concepto genérico y el de conjunto, específico.

Pueden considerarse las **pluralidades** (genéricamente hablando) como magnitudes discontinuas, y los **conjuntos**, como las cantidades correspondientes a esas magnitudes. Así puedo hablar en general de la **pluralidad de libros** (magnitud) y del **conjunto** que forman los libros de mi biblioteca (cantidad).

Los entes que integran un conjunto pueden ser materiales o no. Así, los alumnos de una clase, los libros de una biblioteca, las naciones de América o los miembros de una familia, son conjuntos formados por entes materiales; mientras que los puntos de una recta, las rectas de un plano, los vértices de un polígono y las ideas de un razonamiento son conjuntos formados por entes inmateriales.

Cada uno de los seres u objetos que integran un conjunto es un **elemento** del conjunto. Así, cada uno de los alumnos de una clase es un elemento del conjunto formado por sus integrantes; cada uno de los vértices de un polígono es un elemento del conjunto formado por todos los vértices de dicho polígono. Como vemos, la noción de elemento coincide con la de unidad.

Tanto el de unidad como el de conjunto y el de pluralidad son conceptos intuitivos.

Para ulteriores desarrollos tiene suma importancia el siguiente postulado, que ha sido llamado Postulado Fundamental de la Aritmética.

A todo conjunto se le puede añadir o quitar uno de sus elementos.

26

RELATIVIDAD DE LOS TÉRMINOS CONJUNTO Y ELEMENTO

Los términos **conjunto** y **elemento** son relativos. Lo que es conjunto con relación a unidades inferiores, puede ser considerado como unidad con relación a un conjunto superior. Así, una **docena** es un conjunto con relación a las doce cosas que la integran; pero en relación con la **gruesa**, que consta de doce docenas, la docena es un elemento.

27

CLASES DE CONJUNTOS

Considerados de manera aislada, los conjuntos pueden ser homogéneos y heterogéneos; ordenables o no ordenables; finitos e infinitos; de elementos naturales y de elementos convencionales. Al comparar conjuntos puede suceder que éstos sean iguales o no iguales; coordinables y no coordinables.

Conjuntos homogéneos y heterogéneos

Suele decirse que un conjunto es **homogéneo** cuando los elementos que lo integran son de la misma especie y **heterogéneo** cuando sus elementos no son de la misma especie.

Sin embargo, el concepto de especie está sujeto al criterio de homogeneidad que se considere. Este criterio debe fijarse con claridad.

Conjuntos ordenables y no ordenables

Siempre que en un conjunto pueda fijarse un criterio de ordenación tal que permita determinar la posición de un elemento con respecto a los demás, se dice que es **ordenable**. Los alumnos de un aula constituyen un conjunto ordenable con respecto a su estatura, a su edad o a su aprovechamiento en matemáticas.

Conjunto **no ordenable** es aquél en el cual no se puede fijar tal criterio. Las moléculas de un gas constituyen un conjunto no ordenable, debido a que el constante movimiento que realizan no permite establecer una ordenación entre ellas.

Conjuntos finitos e infinitos

Cuando todos los elementos de un conjunto ordenable, sean o no entes materiales, pueden ser considerados uno por uno, real o imaginariamente en determinado tiempo, se dice que el conjunto es **finito**.

Así, el conjunto de las naciones de América es finito, porque podemos enunciarlas a todas, una por una, en un tiempo determinado; el conjunto de los alumnos de un aula es finito, porque yo puedo designar a cada uno por su nombre en un tiempo determinado.

Son **infinitos** los conjuntos en los que no se cumplen las condiciones anteriores. Es decir, los conjuntos en los cuales si se intentase considerar uno por uno sus elementos, real o imaginariamente, esta operación no tendría fin en el tiempo.

Son infinitos los puntos de una recta, las rectas que pueden pasar por un punto, los diámetros de una circunferencia, entre otros.

Conjuntos de elementos naturales y de elementos convencionales

Son **conjuntos de elementos naturales** las cantidades discontinuas, como los lápices de una caja y los empleados de una oficina. En estos conjuntos, los elementos son perfectamente identificables de un modo natural.

Cuando una cantidad continua ha sido real o imaginariamente **seccionada** en elementos artificiales iguales, el conjunto de estos elementos se comporta de un modo similar a las cantidades discontinuas. Se dice entonces, que forman un **conjunto de elementos convencionales**.

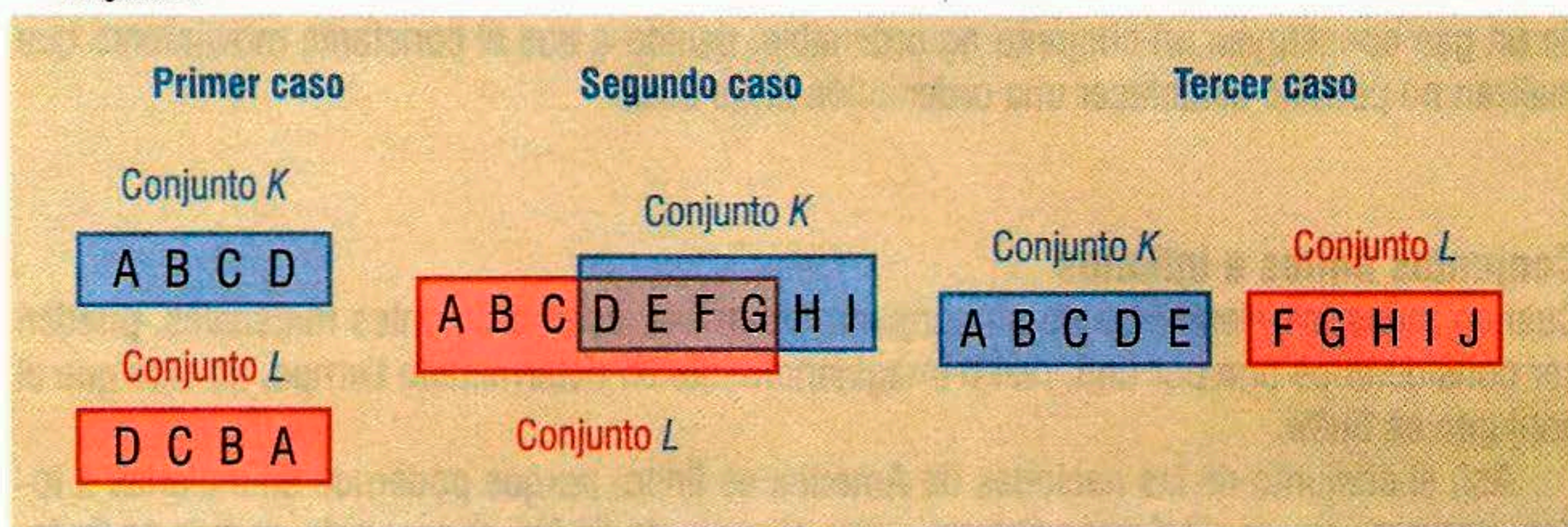
Comparación de conjuntos. Conjuntos iguales. Conjuntos parciales. Conjuntos no iguales

Al comparar dos conjuntos K y L , puede suceder:

- 1° Que todo elemento del conjunto K esté en el conjunto L y viceversa.
- 2° Que K y L tengan alguno o algunos elementos comunes.
- 3° Que K y L no tengan ningún elemento común.

En el primer caso, se dice que los conjuntos son **iguales**. El conjunto formado por las letras A, B, C y D es igual al conjunto formado por las letras D, C, B y A.

Figura 9



En el segundo caso se dice que el conjunto formado por los elementos comunes es **parcial** con respecto a K y **parcial** con respecto a L . Así, el conjunto formado por las letras D, E, F y G es parcial con respecto al conjunto formado por las letras A, B, C, D, E, F y G, y es también parcial con respecto al conjunto formado por las letras D, E, F, G, H e I.

En el tercer caso, se dice que el conjunto K y el conjunto L son dos conjuntos **no iguales**. El conjunto formado por las letras A, B, C, D y E, es un conjunto **no igual** al formado por las letras F, G, H, I y J.

Conjuntos coordinables y no coordinables

Véanse números 28 y 29.

2

Ejercicio

1. Citar cinco ejemplos de unidades materiales.
2. Citar cinco ejemplos de unidades inmateriales.
3. Citar cinco conjuntos que conozca.
4. Citar tres ejemplos de conjuntos iguales.

28

CORRESPONDENCIA ENTRE ELEMENTOS

El ejemplo siguiente ilustra este concepto.

En la sala de una casa hay un conjunto de personas integrado por Carlos, Juan, Pedro y Roque, y en la sombrerera un conjunto de sombreros. Al marcharse, cada persona toma un sombrero, de este modo:

Carlos...	sombrero negro
Juan...	" marrón
Pedro...	" gris
Roque...	" azul

Cada persona ha tomado un sombrero y cada sombrero pertenece a una persona distinta, sin que alguien quede sin sombrero ni ningún sombrero sin dueño. En este caso decimos que

entre el conjunto de las personas y el de los sombreros hay una **correspondencia perfecta o biunívoca** que también se llama **coordinación**.

Cuando se establece una coordinación, se llaman **elementos homólogos** a los elementos que se corresponden. Así, en el ejemplo anterior son elementos homólogos; Carlos y sombrero negro; Juan y sombrero marrón; Pedro y sombrero gris; Roque y sombrero azul.

Generalizando la noción ilustrada con el ejemplo anterior podemos decir que:

Dos conjuntos son coordinables cuando entre sus elementos puede establecerse una correspondencia biunívoca o perfecta, de modo que a cada elemento del primer conjunto corresponda uno y sólo un elemento del segundo conjunto, y a cada elemento del segundo conjunto corresponda uno y sólo un elemento del primer conjunto.

A los conjuntos coordinables se les llama también **equivalentes**.

CONJUNTOS NO COORDINABLES

29

Cuando entre dos conjuntos no puede establecerse una correspondencia perfecta, porque sobran elementos de uno de los conjuntos, los conjuntos son **no coordinables**.

Así, si en una clase entra un conjunto de alumnos y después de ocupar todas las sillas del aula quedan algunos alumnos de pie, el conjunto de los alumnos no es coordinable con el conjunto de las sillas del aula.

ALGUNOS POSTULADOS SOBRE LA COORDINACIÓN DE CONJUNTOS

30

- 1) Si a cada uno de dos conjuntos coordinables se añade o suprime un elemento, los conjuntos que resultan son coordinables.

CONJUNTOS

A B C D
| | | |
A B C D

1º CASO

A B C D E
| | | | |
A B C D E

2º CASO

A B C
| | |
A B C

- 2) Dados dos conjuntos finitos, o son coordinables o uno de ellos es coordinable con parte del otro.

Tenemos un conjunto de pomos y un conjunto de tapas. Si intentamos colocar una tapa a cada pomo, puede suceder lo siguiente:

- Cada pomo queda con su tapa.
- Algunos pomos se quedan sin tapas.
- Después de tapar todos los pomos, sobran algunas tapas.

Figura 10



En el primer caso los dos conjuntos son coordinables.

En el segundo caso una parte del conjunto de pomos es coordinable con el conjunto de tapas.

En el tercer caso una parte del conjunto de tapas es coordinable con el conjunto de pomos.

- 3) Si dos conjuntos finitos están coordinados de cierta manera, la coordinación siempre será posible de cualquier otro modo que se ensaye.**

A continuación exponemos tres modos (de los muchos que hay) de coordinar los conjuntos ABCDE y MNOPQ:

Figura 11



Corolario: Si dos conjuntos finitos no son coordinables de un cierto modo, la coordinación nunca será posible, cualquiera que sea el modo de ensayarla.

Tenemos un conjunto de lápices en un aula. Repartimos los lápices dando uno a cada alumno y al final quedan varios alumnos sin lápices, lo que indica que el conjunto de lápices no es coordinable con el de alumnos. Si entonces recogemos todos los lápices y los distribuimos de otro modo, dando siempre uno a cada alumno, es evidente que al final quedará el mismo número de alumnos sin lápices que antes.

3

Ejercicio

- Coordinar de todos los modos posibles los conjuntos formados por las letras de las palabras **casa** y **mesa**; **rosal** y **plato**.
- Explicar cuándo serán coordinables un conjunto de sombreros y uno de personas; un conjunto de sillas y uno de personas; un conjunto de alumnos y uno de suspensos.
- Explicar cuándo no son coordinables un conjunto de alumnos y uno de sobresalientes; un conjunto de soldados y uno de rifles; un conjunto de automóviles y uno de choferes.
- ¿Son coordinables los conjuntos de letras **cama** y **mesa**; **Adán** y **nada**; **tabla** y **bala**; **toca** y **tacón**?

CARACTERES DE LA COORDINACIÓN DE CONJUNTOS

31

Carácter idéntico: **Todo conjunto es coordinable con sí mismo.**

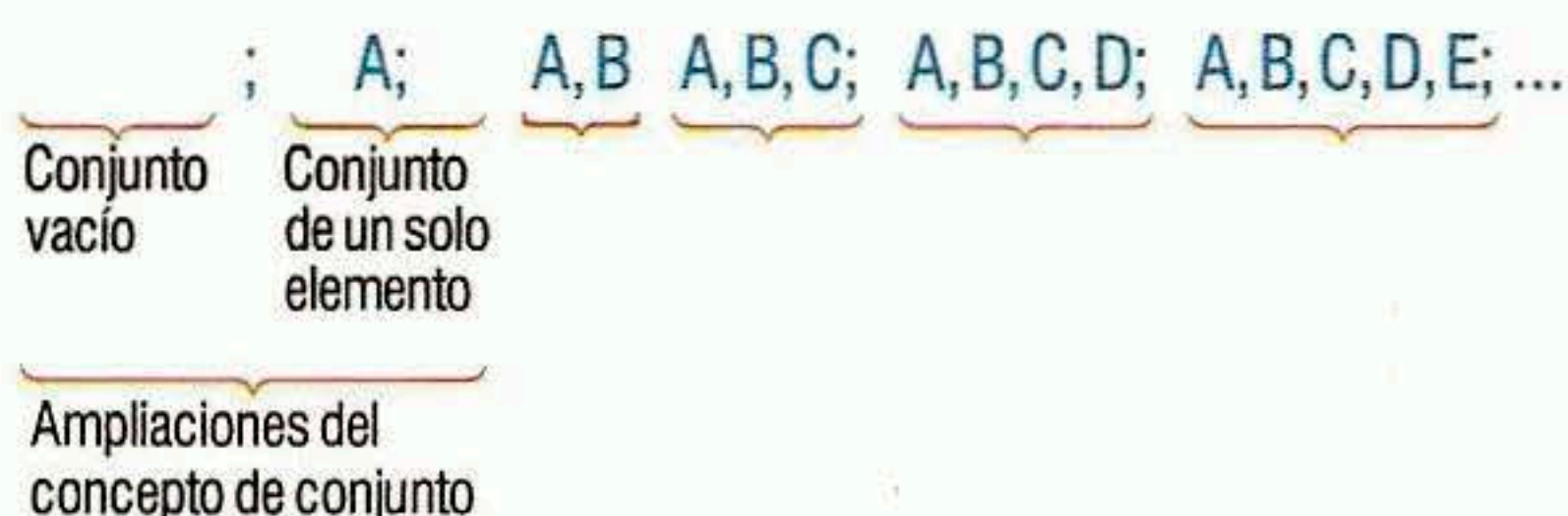
Carácter recíproco: **Si un conjunto es coordinable con otro, ese otro conjunto es coordinable con el primero.**

Carácter transitivo: **Si un conjunto es coordinable con otro, y éste es coordinable con un tercero, el primero es coordinable con el tercero.**

SUCESIÓN FUNDAMENTAL DE CONJUNTOS

32

La **serie** o **sucesión** de conjuntos finitos



en la cual cada conjunto tiene un elemento más que el conjunto anterior y en la que puede suponerse que A es **un conjunto de un solo elemento**, que tiene un elemento más que el conjunto nulo anterior o **conjunto que carece de elementos**, representa la **sucesión fundamental de los conjuntos finitos**.

Añadiendo un elemento a un conjunto cualquiera de la sucesión fundamental, que eventualmente quisiera considerarse como el último (25), obtenemos uno mayor (siguiente). Añadiendo a éste un elemento más, obtenemos el que le sigue, y así sucesivamente.

En esta sucesión no hay dos conjuntos que sean coordinables entre sí. Por tanto, todo conjunto finito cualquiera es coordinable con uno y sólo con uno de la sucesión fundamental.

Por lo general, para representar la sucesión fundamental de conjuntos finitos se utilizan letras mayúsculas del alfabeto, en la forma ilustrada arriba.

EL NÚMERO NATURAL

CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL

33

La figura 12 representa un conjunto de ruedas y un conjunto de cajas, coordinable a la vez con el conjunto A, B, de la sucesión fundamental y, por tanto, coordinables entre sí.

En la figura 13 representamos varios conjuntos coordinables a la vez con el conjunto A, B, C, de la sucesión fundamental y, por tanto, coordinables entre sí.

En la figura 14 representamos varios conjuntos coordinables con el conjunto A, B, C, D, de la sucesión fundamental y, por tanto, coordinables entre sí.

Pudiésemos continuar con ejemplos similares y representar conjuntos de cosas que fuesen coordinables respectivamente a su vez, con los conjuntos de la sucesión fundamental:

A, B, C, D, E; A, B, C, D, E, F, ..., etcétera. Pudiésemos también representar varios "conjuntos de un solo elemento" que fuesen coordinables con el conjunto A de la sucesión fundamental. Inclusive pudiésemos imaginar varios conjuntos vacíos, que vendrían a ser coordinables con el conjunto nulo de la sucesión fundamental (32).

Figura 12

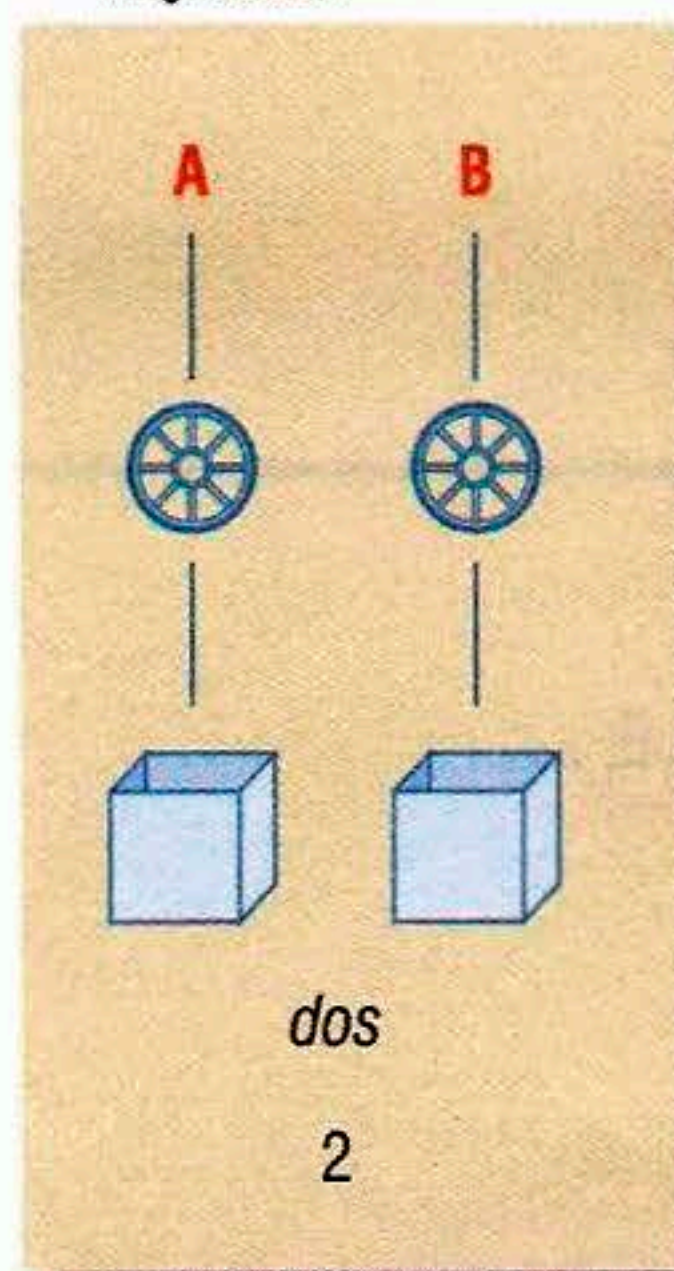


Figura 13

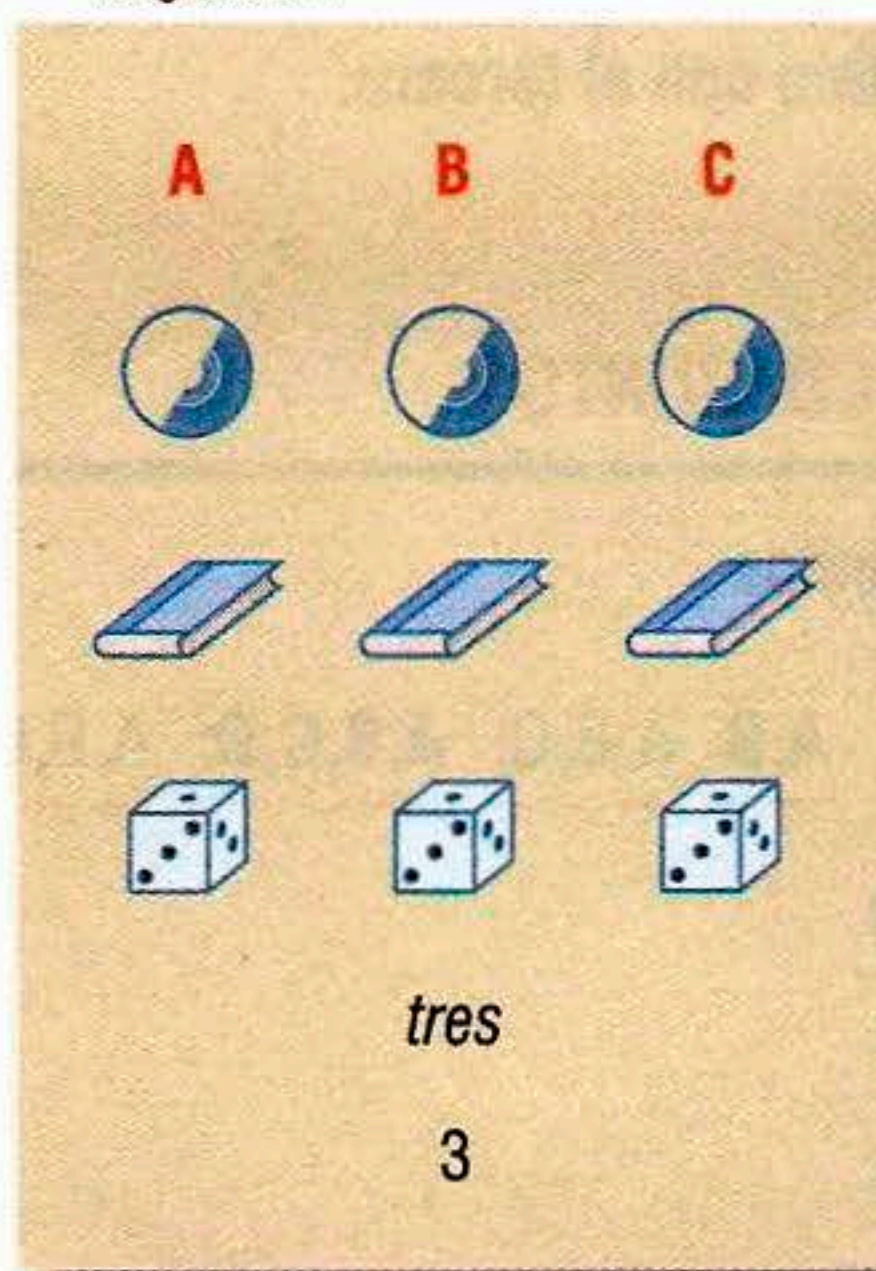
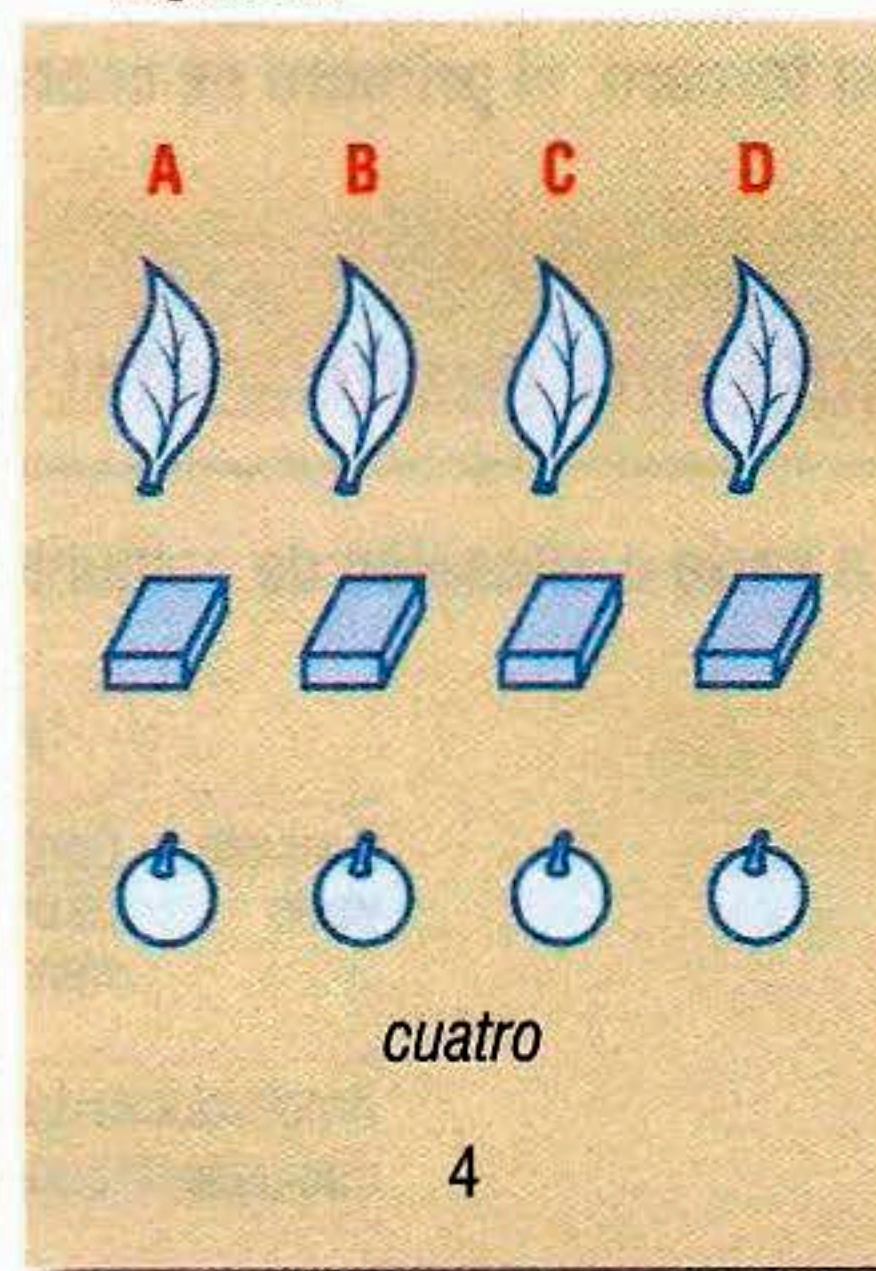


Figura 14



La coordinación de los conjuntos representados en la figura 12, hace surgir en nuestra mente la idea del **dos**.

La coordinación, en la figura 13, hace surgir la idea del **tres**; y en la figura 14, la idea del **cuatro**.

Puede comprenderse que en forma similar y con otros ejemplos, podemos hacer surgir en nuestra mente, la idea del **cinco**, del **seis**..., así como del **uno** y del **cero**.

Los conceptos de **cero**, de **uno**, de **dos**, de **tres**, de **cuatro**, de **cinco**, de **seis**..., etc., son conceptos abstractos y representan, respectivamente, la propiedad común a todos los conjuntos coordinables entre sí. Se dice que los conceptos de **cero**, de **uno**, de **dos**, de **tres**, etc., son números naturales.

Número natural es, pues, un concepto abstracto que simboliza cierta propiedad común a todos los conjuntos coordinables entre sí.

34

SERIE DE LOS NÚMEROS NATURALES

Se ha visto que cada conjunto de la sucesión fundamental representa un número. A esos números los llamamos **cero**, **uno**, **dos**, **tres**, **cuatro**, **cinco**, etc., y los representamos 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., de este modo:

Conjunto nulo; A; A, B; A, B, C; A, B, C, D; A, B, C, D, E; ...

cero uno dos tres cuatro cinco

0 1 2 3 4 5

y esta sucesión o serie infinita es lo que se llama **serie de los números naturales** o **serie natural de los números**.

NOTA

Dado lo difícil del concepto, se incurre muchas veces en el error de creer que las **palabras** cero, uno, dos, tres, cuatro, etc., y los **signos** 0, 1, 2, 3, 4, etc., **son** los números naturales, lo cual no es cierto. Esas palabras y esos signos no son los números naturales sino solamente **el medio** del que nos valemos para **expresar y representar** los números naturales (del mismo modo que un caballo representado en un cuadro **no es un caballo**, sino la **representación** o **imagen** de un caballo).

Así, ¿qué es **tres**? Una **palabra** con la cual expresamos la pluralidad común a toda la serie de conjuntos coordinables entre sí y con el conjunto A, B, C de la sucesión fundamental.

¿Qué es **6**? Un **signo** con el que representamos en la escritura la pluralidad común a toda la serie de conjuntos coordinables entre sí y con el conjunto A, B, C, D, E, F de la sucesión fundamental.

OPERACIÓN DE CONTAR

35

La coordinación de conjuntos es una operación que con frecuencia se realiza. Por ejemplo:

El administrador de un teatro que quiere que cada uno de los asistentes a una función tenga su asiento de modo que no queden espectadores de pie ni tampoco asientos vacíos, debe coordinar el conjunto de los espectadores con el de los asientos. Para ello, manda a hacer tantas entradas como asientos hay en el teatro y va entregando una a cada espectador que viene a comprarla a la taquilla. Cuando se entregue la última entrada a un espectador, ya estarán ocupados todos los asientos, o sea, que el conjunto de los espectadores y el de los asientos estarán coordinados.

En este caso, lo que ha hecho el administrador del teatro ha sido coordinar el conjunto de los espectadores con el de las entradas, que a su vez era coordinable con el conjunto de los asientos del teatro, o sea, que hemos **contado** tantos espectadores como asientos hay en el teatro, utilizando para ello como **conjunto de referencia** o tipo de comparación el conjunto de las entradas.

Para contar los objetos y coordinar conjuntos cuando sea necesario, se utiliza como conjunto de referencia un **conjunto fijo** que es el **conjunto de los números naturales**.

Contar un conjunto es coordinar sus elementos con una parte de la serie de los números naturales comenzando por el 1.

Para contar las letras de la palabra *latino*, procedemos así:



Lo que hemos hecho ha sido coordinar el conjunto de letras con el conjunto de los números naturales del 1 al 6.

Ejemplo

36

OPERACIÓN DE MEDIR

Cuando una cantidad continua ha sido real o imaginariamente **seccionada** en elementos artificiales iguales, el conjunto de estos elementos se comporta de una manera similar a las cantidades discretas y puede, por tanto, ser objeto de conteo.

El agua contenida en un recipiente (cantidad discreta) puede vaciarse en una serie de frascos iguales para después contar los frascos que resultan llenos, es decir, las porciones de agua contenidas en aquél.

La distancia entre dos puntos (cantidad continua) puede ser también seccionada en partes iguales por varios puntos, para luego contar las distancias entre cada dos puntos consecutivos.

Medir es comparar dos cantidades homogéneas. Supongamos la longitud de una mesa y la longitud de una regla (cantidades homogéneas). Llevemos la longitud de la regla sobre la de la mesa, y supongamos que cabe exactamente doce veces. Hemos medido la longitud de la mesa con la longitud de la regla. Una de las cantidades, en este caso la longitud de la regla, se llama unidad de medida. La otra es la cantidad que se mide. Pudiera medirse también en forma similar la superficie de la pizarra con la superficie de una hoja de papel; el peso de un libro con el peso de otro libro, etcétera.

A diferencia de lo que sucede con las cantidades discretas, las unidades de medida no son naturales, sino convencionales.

37

NÚMEROS ABSTRACTOS Y CONCRETOS

El número abstracto es el número propiamente dicho. Así, 1 (uno), 5 (cinco), 18 (dieciocho) representan números abstractos.

Cuando coordinamos los elementos de un conjunto homogéneo de cosas (cantidad discontinua), digamos, por ejemplo, los limones que hay en una caja, con una parte de la serie de números naturales (abstractos), comenzando por el uno, es decir, cuando contamos los elementos de un conjunto homogéneo de cosas (**35**), el resultado es un número **concreto**.

Cuando coordinamos los elementos iguales determinados artificialmente en una cantidad continua por medio de una medición, pongamos por caso, la longitud de un pedazo de sogá que al medirse con la longitud de un metro ha quedado imaginariamente seccionado en cuatro porciones iguales a la longitud de él, con una parte de los números naturales, comenzando por el uno, estamos, en cierta forma, contando también. Sólo que en este caso, las unidades no son naturales, como sucede con las cantidades discontinuas, sino convencionales (**27**), y la coordinación se efectúa al mismo tiempo que la medición, es decir, al mismo tiempo que la comparación de la unidad de medida (convencional) con la cantidad que se mide. En este caso el resultado es también un número concreto.

Este tipo de número concreto se representa también por el cardinal abstracto correspondiente a la parte de los números naturales empleada para la coordinación y el nombre de la unidad convencional utilizada para medir la cantidad continua.

Si en esta medición se llegó al número cuatro, se dice cuatro metros y se escribe 4 metros. Este es, pues, un número concreto.

Otros números concretos son 25 sillas, 32 vacas, 150 kilómetros, 16 kilogramos.

SERIES DE NÚMEROS CONCRETOS

Quando se tiene una serie de dos o más números concretos puede suceder que sean homogéneos o heterogéneos.

Son **homogéneos** los números concretos que representan estados de la misma magnitud. Por ejemplo:

5 metros, 8 metros
2 lápices, 12 lápices, 17 lápices

Son **heterogéneos** los números concretos que representan estados de distinta magnitud.
Por ejemplo:

25 libras, 8 vacas
5 metros, 19 kilogramos, 4 litros

Los números **complejos** o **denominados** podemos definirlos como las series de números concretos homogéneos que representan estados de la misma magnitud continua, expresados en distintas unidades concretas pertenecientes a un mismo sistema de medida. Así, 6 metros, 8 decímetros y 4 centímetros es un número complejo o denominado.

NÚMERO CARDINAL

Cuando contamos los elementos de un conjunto, el número que corresponde al **último** elemento se llama **número cardinal** del conjunto.

El número cardinal del conjunto MNPQRSTUV es 9 porque: _____

M	N	P	Q	R	S	T	U	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9

El número cardinal de un conjunto representa el conjunto.

CARACTERES DEL NÚMERO CARDINAL

- 1) El número cardinal de un conjunto siempre es el mismo, cualquiera que sea el orden en que se cuenten sus elementos.**

Contando de tres modos distintos las letras de la palabra **libreta** tendremos:

LIBRETA LIBRETA LIBRETA

1 2 3 4 5 6 7 7 6 5 4 3 2 1 5 4 2 6 3 7 1

7 7 7

En el primer caso contamos de izquierda a derecha; en el segundo, de derecha a izquierda, y en el tercero, en orden alfabético, y en todos ellos el número correspondiente al último elemento ha sido el 7, que es el número cardinal del conjunto.

- 2) Todos los conjuntos coordinables entre sí tienen el mismo número cardinal, cualquiera que sea la naturaleza de sus elementos.**

Consideremos tres conjuntos: uno de personas, otro de letras y otro de lápices, coordinables entre sí, como se indica a continuación:

Pedro	A	lápiz verde.....	1
Rosa.....	M.....	lápiz rojo	2
María	O	lápiz negro	3
Elsa.....	R.....	lápiz azul	4

El conjunto de personas Pedro-Rosa-María-Elsa está coordinado con el conjunto de letras AMOR y con el de lápices, y cada uno de ellos a su vez está coordinado con el conjunto de números naturales del 1 al 4, luego **el 4 es el número cardinal** de estos tres conjuntos, coordinables entre sí.

El número cardinal representa todos los conjuntos coordinables entre sí, prescindiendo de la naturaleza y del orden de sus elementos.

41

NÚMERO ORDINAL

Cuando se cuentan los elementos de un conjunto, el número natural que corresponde a **cada elemento** del conjunto se llama **número ordinal** de dicho elemento.

Así, al contar las letras de la palabra CABLES, tenemos:

C	A	B	L	E	S
1	2	3	4	5	6

Aquí vemos que, contando de izquierda a derecha, el número ordinal de la letra C es el 1, o sea, que la C es el **primer** elemento; el número ordinal de la A es el 2, o sea, que la A es el **segundo** elemento; el número ordinal de la E es el 5, o sea, que la E es el **quinto** elemento, etcétera.

Si se varía el **orden**, varía el número ordinal de cada elemento. En efecto, contando en orden alfabético, tenemos:

C	A	B	L	E	S
3	1	2	5	4	6

El número ordinal representa un elemento de un conjunto teniendo en cuenta el orden de los mismos.

Los números ordinales, en rigor, se representan 1° , 2° , 3° , 4° , etc., pero en la práctica suelen emplearse los números 1, 2, 3, 4, etc., porque se sobreentiende que el elemento al que corresponde el 1 al contar en un orden dado es el 1° , el elemento al que corresponde el 2 es el 2° , etc.

En resumen:

El número cardinal representa un conjunto y el número ordinal representa un elemento teniendo en cuenta el orden.

4

Ejercicio

1. ¿Cómo se coordinaría el conjunto de las habitaciones de un hotel con un conjunto de huéspedes utilizando piedrecitas como conjunto de referencia?
2. ¿Qué quiere decir que en una sala hay 25 personas?
3. ¿Qué operación se hace para saber que se tienen 8 lápices?
4. Si un conjunto de personas y otro de mesas son coordinables con el conjunto ABCDE de la sucesión fundamental, ¿cuál es el número cardinal de estos conjuntos?
5. ¿Qué es el 3? ¿Qué es el 5? ¿Qué es el 9?

LA ARITMÉTICA Y SU OBJETO

42

El concepto de número natural sufre una serie de ampliaciones a través del desarrollo de la Ciencia Matemática. Una de estas ampliaciones es la de considerar al cero como un número que representaría la única propiedad común a todos los conjuntos nulos o carentes de elementos.

Otras de las ampliaciones son las que se refieren a los números fraccionarios (336) y a los números irracionales (482).

Una nueva ampliación nos lleva al concepto de número negativo⁽¹⁾. Este concepto transforma todo el sistema de los números naturales, fraccionarios e irracionales. Los números negativos constituyen uno de los fundamentos del cálculo algebraico.

Tanto los números naturales como los fraccionarios e irracionales reciben el nombre de **números reales**.

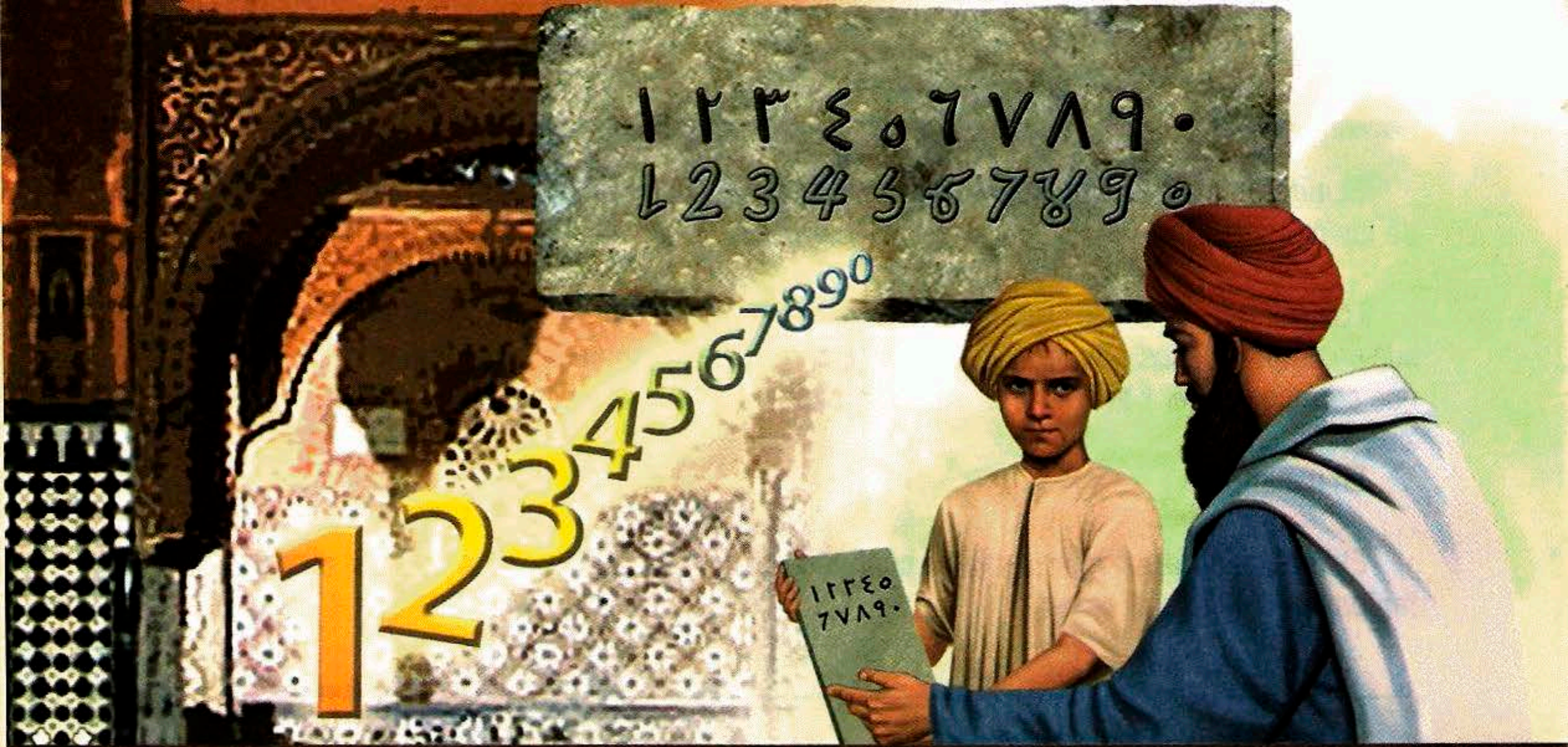
Una considerable e importantísima ampliación del campo numérico, tiene lugar con la introducción de los números no reales (complejos).

Suele dársele el nombre de **número entero** (positivo o negativo) al número real que no es fraccionario ni irracional. Los números naturales son, pues, los números enteros positivos.

Definiremos, pues, la **Aritmética General** como **la Ciencia Matemática que tiene por objeto el estudio de los números (naturales o no)**.

La **Aritmética Elemental**, que es la que se desarrolla en esta obra, **tiene por objeto el estudio de los números reales positivos**.

⁽¹⁾Baldor, Álgebra (II).



Los griegos y romanos no tuvieron una adecuada manera de representar los números, lo que les impidió hacer mayores progresos en el cálculo matemático. Los indios, en cambio, desarrollaron un práctico sistema de notación numeral, al

descubrir el cero y el valor posicional de las cifras. Los árabes dieron a conocer dicho sistema en Europa a partir del siglo VIII d. C. Por eso, nuestras cifras se llaman indoarábigas.

Capítulo //

NUMERACIÓN

ESTUDIO DEL SISTEMA DECIMAL

43 LA NUMERACIÓN es la parte de la Aritmética que enseña a expresar y a escribir los números.

La numeración puede ser **hablada** y **escrita**.

Numeración hablada es la que enseña a expresar los números.

Numeración escrita es la que enseña a escribir los números.

44 GENERACIÓN DE LOS NÚMEROS

Los números se forman por agregación de unidades. Así, si a una unidad o número uno agregamos una unidad, resulta el número dos; si a éste agregamos otra unidad, resulta el número tres; si a este agregamos otra unidad, resulta el número cuatro, y así sucesivamente.

De lo anterior se deduce que la **serie natural de los números no tiene fin** porque, por grande que sea un número, siempre podremos formar otro mayor agregándole una unidad.

CIFRAS O GUARISMOS son los signos que se emplean para representar los números.

Las cifras que empleamos, llamadas cifras **arábigas** porque fueron introducidas por los árabes en España, son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

El cero recibe el nombre de cifra **no significativa** o cifra **auxiliar** y las demás son **cifras significativas**.

CIFRA CERO

Hemos visto (34) que el 0 representa los conjuntos **nulos** o conjuntos que carecen de elementos.

Así pues, la cifra cero carece de valor absoluto y se emplea para escribirla en el lugar correspondiente a un orden cuando en el número que se escribe no hay unidades de ese orden. La palabra cero proviene de la voz árabe *sifr*, que significa **lugar vacío**.

NÚMERO DÍGITO es el que consta de una sola cifra, como 2, 3, 7, 8.

NÚMERO POLIDÍGITO es el que consta de dos o más cifras, como 18, 526.

SISTEMA DE NUMERACIÓN es un conjunto de reglas que sirven para expresar y escribir los números.

BASE de un sistema de numeración es el número de unidades de un orden que forman una unidad del orden inmediato superior. Así, en el sistema decimal empleado por nosotros, la base es 10 porque 10 unidades de primer orden forman una decena; diez decenas forman una centena, etcétera.

En el sistema **duodecimal**, que también se emplea mucho en la práctica, la base es 12 porque 12 unidades forman una **docena** y 12 docenas forma una **gruesa**.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

En los sistemas de numeración se cumplen los siguientes principios:

- 1) Un número de unidades de un orden cualquiera, igual a la base, forma una unidad del orden inmediato superior.
- 2) Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades tantas veces mayores que las que representa la anterior, como unidades tenga la base. Éste es el Principio del valor relativo.
- 3) En todo sistema, con tantas cifras como unidades tenga la base, contando el cero, se pueden escribir todos los números.

Estos principios se aclararán convenientemente con el estudio del sistema decimal y de los demás sistemas de numeración que se hace a continuación. (Ver número 70).

ESTUDIO DEL SISTEMA DECIMAL

52 **SISTEMA DECIMAL O DÉCUPLO** es el que tiene por base 10. Es el que empleamos nosotros.

NUMERACIÓN DECIMAL HABLADA

53 **BASE DEL SISTEMA DECIMAL**

La base del sistema decimal es 10, lo que significa que **diez unidades de un orden cualquiera constituyen una unidad del orden inmediato superior y viceversa, una unidad de un orden cualquiera está formada por diez unidades del orden inmediato inferior.**

54 **PRINCIPIO FUNDAMENTAL O CONVENIO DE LA NUMERACIÓN DECIMAL HABLADA**

Es que **diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.**

55 **NOMENCLATURA**

La numeración decimal consta de órdenes y subórdenes.
Veamos su formación.

56 **ÓRDENES**

Si al número 1, que es la **unidad de primer orden**, añadimos sucesivamente, y una a una, unidades, formaremos los números **dos, tres, cuatro, cinco**, etc., hasta llegar a **diez** unidades, que ya forman una decena o unidad del orden superior inmediato.

Decena es la **unidad de segundo orden** y es la reunión de diez unidades. A una decena añadimos los nombres de los nueve primeros números y obtendremos el **once, doce, trece**, etc., hasta llegar a **veinte** o dos decenas; a éste añadimos otra vez los nombres de los nueve primeros números y formamos el **veintiuno, veintidós, veintitrés**, etc., hasta **treinta** o tres decenas y procediendo de modo semejante obtendremos el **cuarenta** o cuatro decenas, **cincuenta** o cinco decenas, etc., hasta llegar a **cien** o diez decenas, que ya forman una unidad del orden superior inmediato.

Centena es la **unidad de tercer orden** y es la reunión de diez decenas o cien unidades.

Si a la centena añadimos los nombres de los noventa y nueve primeros números, iremos formando los números **ciento uno, ciento dos, ciento tres**, etc., hasta llegar a **doscientos** o dos centenas; si con éste procedemos de modo semejante, iremos obteniendo **trescientos** o tres centenas, **cuatrocientos** o cuatro centenas, etc., hasta llegar a diez centenas o **mil**, que ya forman una unidad del orden superior inmediato.

Millar es la **unidad de cuarto orden** y es la reunión de diez centenas o mil unidades. Si al millar añadimos los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números, iremos obteniendo los números sucesivos hasta llegar a **dos mil** o dos millares; **tres mil** o tres millares, etc., hasta **diez mil** o diez millares, que ya forman una unidad del orden superior inmediato.

Decena de millar es la **unidad de quinto orden** y es la reunión de diez millares o diez mil unidades. Añadiendo a una decena de millar los nombres de los nueve mil novecientos noventa y nueve primeros números, formaremos el **veinte mil** o dos decenas de millar, **treinta mil** o tres decenas de millar, etc., hasta llegar a diez decenas de millar, o cien mil, y que constituyen una unidad del orden superior inmediato.

Centena de millar es la **unidad de sexto orden** y es la reunión de diez decenas de millar. De modo semejante llegaremos al **millón** o **unidad de séptimo orden** que consta de diez centenas de millar o mil millares; **decena de millón** o **unidad de octavo orden**, que consta de diez millones; **centena de millón** o **unidad de noveno orden**; **unidad de millar de millón** o **unidad de décimo orden**; **decena de millar de millón** o **unidad de undécimo orden**; **centena de millar de millón** o **unidad de duodécimo orden**; **billón** o **unidad de décimo tercer orden** y que es la reunión de un millón de millones; **trillón** o **unidad de décimo noveno orden** que es la reunión de un millón de billones; **cuatrillón** o **unidad de vigésimo quinto orden** que es la reunión de un millón de trillones; **quintillón** o **unidad de trigésimo primer orden**; etcétera.

OBSERVACIÓN

En algunos países como Estados Unidos de América, Francia y Alemania, se tiene un criterio distinto al nuestro. Lllaman **billón** al **millar de millones** o unidades de décimo orden; **trillón** a nuestro billón; **cuatrillón** a nuestro **millar de billones**, etcétera.

CLASES Y PERIODOS

La reunión de tres órdenes, comenzando por las unidades simples, constituye una **clase**; así, las unidades, decenas y centenas forman la **clase de las unidades**; las unidades de millar, decenas de millar y centenas de millar forman la **clase de los millares**; las unidades de millón, decenas de millón y centenas de millón forman la **clase de los millones**; las unidades de millar de millón, decenas de millar de millón y centenas de millar de millón forman la **clase de los millares de millón**; las unidades de billón, decenas de billón y centenas de billón forman la **clase de los billones**, y así sucesivamente.

La reunión de dos clases forma un **periodo**. Así, la clase de las unidades y la clase de los millares forman el **periodo de las unidades**; la clase de los millones y la de los millares de

millón forman el **periodo de los millones**; la clase de los billones y la de los millares de billón forma el **periodo de los billones**; y así sucesivamente.

58

SUBÓRDENES

Del mismo modo que la decena consta de diez unidades, la centena de diez decenas, etc., podemos suponer que la unidad simple o de primer orden está dividida en diez partes iguales que reciben el nombre de **décimas** y que constituyen el **primer suborden**; cada décima se divide en otras diez partes iguales llamadas **centésimas** y que forman el **segundo suborden**; cada centésima se divide en otras diez partes iguales llamadas **milésimas** que forman el **tercer suborden**; y así sucesivamente se van obteniendo las **diezmilésimas** o **cuarto suborden**; las **cienmilésimas** o **quinto suborden**; las **millonésimas** o **sexto suborden**; etcétera.

5

Ejercicio

1. ¿Qué forman diez decenas; diez centenas de millar; diez millones?
2. ¿Qué forman cien decenas; cien centenas; cien millones?
3. ¿Qué forman mil unidades; mil decenas; mil centenas?
4. ¿Qué forman mil millares; diez millares; diez mil centenas; cien mil decenas?
5. ¿Qué forman cien decenas de millar; mil centenas de millar; diez mil millones; un millón de millones?
6. ¿Cuántas unidades tiene una unidad de tercer orden; de cuarto orden; de quinto orden?
7. ¿Cuántas decenas tiene una unidad de cuarto orden; de quinto orden; de séptimo orden?
8. ¿Cuántos millares tiene un millón; cuántas decenas de millar tiene una decena de millar de millón; cuántos millones un billón?
9. ¿Cuántas centenas hay en 4 millares; en 6 millones; en 5 centenas de millar?
10. ¿Cuántas décimas hay en una unidad; en una decena; en un millar?
11. ¿Cuántas centésimas hay en una decena; cuántas milésimas en una centena; cuántas diezmilésimas en un millar?
12. ¿Cuántas décimas hay en 3 unidades; en 2 decenas; en 3 centenas?
13. ¿Cuántas centésimas hay en 6 centenas; en 3 millares; en 2 unidades de cuarto orden?
14. ¿Cuántas décimas forman 2 centenas; cuántas centésimas 2 decenas; cuántas milésimas 3 centenas?
15. ¿Cuáles son las decenas de decenas; las centenas de las decenas; los millares de centenas; los millones de millón?
16. ¿Cuáles son las décimas de centenas; las centésimas de los millares; las millonésimas de los billones?

17. ¿Cuáles son las décimas de decena; las centésimas de decena; las milésimas de decena; las milésimas de decena?
18. ¿Qué orden representa la primera cifra de la izquierda de un número de 3 cifras; de 4 cifras; de 6 cifras?
19. ¿Qué orden representan la primera y tercera cifra de la izquierda de un número de 4 cifras; de 5 cifras; de 6 cifras?
20. ¿Cuántos guarismos tiene un número cuya cifra de mayor orden representa decenas de centena; centenas de millar; millares de millón; billones?

NUMERACIÓN DECIMAL ESCRITA

PRINCIPIO FUNDAMENTAL O CONVENIO DE LA NUMERACIÓN DECIMAL ESCRITA

59

Es que **toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades diez veces mayores que las que representa la anterior y viceversa, toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades diez veces menores que las que representa la anterior.**

Así, si a la izquierda de la cifra 4 ponemos 5, formamos el número 54, en el cual el 4 representa unidades y el 5, por estar escrito a la izquierda del 4, representa unidades diez veces mayores que las que representa éste, o sea, decenas. Si a la izquierda del 54 escribimos un 8, formaremos el número 854, donde el 5 representa decenas y el 8 por estar escrito a su izquierda representa unidades diez veces mayores, o sea **centenas**.

VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO

60

Toda cifra tiene dos valores: **absoluto** y **relativo**.

Valor absoluto es el que tiene el número por su figura, y **valor relativo** es el que tiene el número por el lugar que ocupa.

Así, en el número 4,344 el valor absoluto de los tres cuatros es el mismo: **cuatro unidades**, pero el valor relativo del 4 de la derecha es 4 unidades del primer orden; el valor relativo del 4 de las decenas es $4 \times 10 = 40$ unidades de primer orden; el valor relativo del 4 de los millares es $4 \times 10 \times 10 \times 10 = 4,000$ unidades del primer orden.

El valor relativo del 3 es $3 \times 10 \times 10 = 300$ unidades del primer orden.

1. Decir el valor relativo de cada una de las cifras de:

16	364	13,000	1,432,057
50	1,963	72,576	25,437,056
105	2,184	890,654	103,470,543

6

Ejercicio

2. ¿En cuántas unidades disminuyen los números

176	cambiando	el 7 por 0?
294	"	" 2 y el 9 por 0?
1,362	"	" 1, 3 y 6 por 0?
23,140	"	" 1 por 0 y el 4 por 3?
186,754	"	" 6 por 4 y el 5 por 2?
974,532	"	" 4 por 3, el 5 por 4 y el 3 por 0?

3. ¿En cuántas unidades aumentan los números

76	cambiando	el 7 por 9?
123	"	" 1 por 2 y el 2 por 3?
354	"	" 4 y el 5 por 6?
321	"	" 3 por 5, el 2 por 4 y el 1 por 4?
2,615	"	" 2 por 4, el 6 por 8 y el 5 por 6?

4. ¿Aumentan o disminuyen y cuánto en cada caso los números

86	cambiando	el 8 por 6 y el 6 por 8?
1,234	"	" 2 por 3, el 3 por 2 y el 4 por 6?
8,634	"	" 8 por 6, el 6 por 7 y el 3 por 5?
19,643	"	" 1 por 2, el 9 por 0, el 6 por 9 y el 4 por 5?

61

REGLA PARA ESCRIBIR UN NÚMERO

Para escribir un número se van anotando las unidades correspondientes a cada orden, comenzando por las superiores, poniendo un cero en el lugar correspondiente al orden del cual no haya unidades y separando con un punto los órdenes de los subórdenes.

Ejemplo

Escribir el número cinco mil treinta y cuatro unidades y ocho décimas. Lo escribiremos de este modo: 5,034.8, donde vemos que cada cifra ocupa el lugar correspondiente al orden que representa: 5 millares, 3 decenas, 4 unidades y 8 décimas y como no había centenas en el número dado hemos puesto cero en el lugar correspondiente a las centenas.

7

Ejercicio

1. Escribir los números: catorce mil treinta y dos; ciento cuarenta y nueve mil ocho; trescientos cuatro mil seis; ochocientos mil ocho; novecientos nueve mil noventa; dos millones, dos mil doscientos dos; quince millones, dieciséis mil catorce; ciento cuarenta y cuatro millones, ciento cuarenta y cuatro; ciento dieciséis millones, trescientos ochenta y seis mil, quinientos catorce; doscientos

catorce mil millones, seiscientos quince; dos billones, dos millones, dos unidades; tres mil tres billones, trescientos treinta mil, trescientos treinta; seis trillones, seis billones, seiscientos sesenta millones, seiscientos mil, seiscientos seis.

2. Escribir los números: catorce milésimas; diecinueve cienmilésimas; trescientas cuatro millonésimas; dos mil ochenta diezmillonésimas; mil treinta y dos mil millonésimas; seis millonésimas; seis milbillonésimas.
3. Escribir los números: ciento cuatro unidades, ocho centésimas; dos mil ciento seis unidades, ocho milésimas; treinta mil treinta unidades, ciento cuatro cienmilésimas; dos millones, dos mil dos unidades, dos mil dos millonésimas.
4. Escribir los números: cincuenta y cuatro décimas; doscientas dos centésimas; cinco mil cinco milésimas; diecinueve mil nueve diezmilésimas; tres millones, tres mil cuatro cienmilésimas; quince mil millones, quince millonésimas.
5. Escribir los números: trescientas cuatro décimas; nueve mil nueve centésimas; catorce mil catorce milésimas; ciento nueve mil seis diezmilésimas; un millón de cienmilésimas.
6. Escriba los números que constan de 7 unidades de tercer orden, 4 del primer suborden y 3 del tercer suborden; 5 unidades del cuarto orden y 5 del cuarto suborden; 6 unidades del quinto orden, 4 del segundo, 8 del cuarto suborden y 6 del quinto suborden.
7. Escribir los números: catorce decenas; ciento treinta y cuatro millares; catorce decenas de millar; diecinueve centenas de millón; doscientas treinta y cuatro decenas de millar de millón; catorce centenas de millón.
8. Escribir los números: seis decenas de decenas; ocho centenas de centenas; nueve millares de décimas; catorce millares de milésimas; nueve décimas de decenas; veintidós centésimas de millar; nueve diezmilésimas de decena; treinta y dos millonésimas de centenas; tres cienmillionésimas de millar.
9. Escribir el menor y el mayor número de dos cifras; de 4 cifras; de 5 cifras, de 7 cifras.
10. Escribir el menor y el mayor número de la 1ª clase; de la 2ª clase; de la 3ª clase.
11. Escribir el número superior e inferior inmediato a 2,100; 3,200; 4,500.

REGLA PARA LEER UN NÚMERO

Para leer un número se divide en grupos de seis cifras empezando por la derecha, colocando entre el primero y el segundo grupo y abajo el número 1, entre el segundo y el tercero el número 2, entre el tercero y el cuarto el número 3, y así sucesivamente. Cada grupo de seis cifras se divide por medio de una coma en dos grupos de tres. Hecho esto, se empieza a leer el número por la izquierda, poniendo la palabra trillón donde haya un tres, billón donde haya un dos, millón donde haya un uno y mil donde se encuentre una coma. Si el número tiene parte decimal se lee ésta a continuación de la parte entera, dándole la denominación del último suborden.

Ejemplo

Leer el número 56784321903423456.245. Para leerlo escribiremos de este modo: 56,784,321,903,423,456.245 y se leerá: 56 mil 784 billones, 321 mil 903 millones, 423 mil 456 unidades y 245 milésimas.

8**Ejercicio**

1. Leer los números:

964	84103725	2005724568903
1032	463107105	40725032543108
14265	9432675321	724056431250172
132404	96723416543	2000002002002002
1030543	100001001001	30000003030000030

2. Leer los números:

0.4	0.00074	0.472003056
0.18	0.130046	0.0725631235
0.415	0.00107254	0.432003561003
0.0016	0.100000003	0.0000000000500

3. Leer los números:

6.4	86.00325	1444.4444444
84.25	151234.76	6995.0072545
9.003	84.000356	72567854.70325
16.0564	184.7256321	9465432161.00007

63**CONSECUENCIAS**

De lo anteriormente expuesto se deduce:

- 1) Un número no varía porque se añadan ceros a su izquierda, porque el valor absoluto y relativo de cada cifra permanece idéntico.
- 2) Si a la derecha de un número añadimos uno, dos, tres, etc., ceros, el número se hace diez, cien, mil, etc., veces mayor porque el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil, etc., veces mayor.
- 3) Si de la derecha de un número entero se separan con un punto decimal una, dos, tres, etc., cifras, el número se hace diez, cien, mil, etc., veces menor porque el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil, etc., veces menor.

- 4) Si en un número decimal se corre el punto decimal uno, dos, tres, etc., lugares a la derecha el número se hace diez, cien, mil, etc., veces mayor, porque el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil, etc., veces mayor.
- 5) Si en un número decimal corremos el punto uno, dos, tres, etc., lugares a la izquierda, el número se hace diez, cien, mil, etc., veces menor porque el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil, etc., veces menor.

1. ¿Cuál de estos números 17, 017 y 0017 es el mayor?
2. Hacer los números 8, 25, 326, diez, cien, mil veces mayores.
3. ¿Cuántas veces es el número 5,600 mayor que 56; que 560? ¿Por qué?
4. Hacer los números 9, 39, 515, diez, cien, mil veces menores.
5. ¿Cuántas veces es 34 menor que 340; 3,400; 34,000? ¿Por qué?
6. Hacer el número 456.89 diez, cien, mil, diez mil veces mayor y menor. Dar la razón.
7. Reducir 9 a décimas; 14 a centésimas; 19 a milésimas.
8. Reducir 0.9 a decenas; 0.14 a centenas; 0.198 a millares.
9. ¿Qué relación hay entre los números 12,345; 1,234.5 y 123.45?
10. ¿Qué relación hay entre los números 0.78, 78 y 780?



Aunque los egipcios, griegos y romanos tenían formas distintas de representar los números, la base de su numeración era decimal. Otros pueblos elaboraron distintos sistemas; por ejemplo, los babilonios tenían como base el 60; los mayas,

en América, desarrollaron un sistema de base 20. En el siglo xvii, **Leibnitz** descubrió la numeración de base binaria y la posibilidad de infinitos sistemas de numeración.

Capítulo III

ESTUDIO DE OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

64

POSIBILIDAD DE OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

En el sistema decimal que hemos estudiado la base es 10. Si en lugar de 10 tomamos como base 2, 3, 4, 5, 6, etc., tendremos otros sistemas de numeración en que se cumplirán principios semejantes a los establecidos para el sistema decimal.

Así, en el sistema de base 2 se cumplirá: **1) Que dos unidades de un orden forman una del orden superior inmediato. 2) Que toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades dos veces mayores que las que representa ésta. 3) Que con dos cifras se pueden escribir todos los números.**

Principios semejantes se cumplirán en los sistemas cuya base sea 3, 4, 5, 6, etcétera.

Entonces, los sistemas de numeración **se diferencian unos de otros por su base.**

Como podemos tomar por base cualquier número, el número de sistemas es **ilimitado.**

65

NOMENCLATURA

Atendiendo a su base, los sistemas se denominan: el de base 2, **binario**; el de base 3, **ternario**; el de base 4, **cuaternario**; el de base 5, **quinario**; el de base 6, **senario**; el de base 7,

septenario; el de base 8, **octonario** u **octal**; el de base 9, **nonario**; el de base 10, **decimal** o **décuplo**; el de base 11, **undecimal**; el de base 12, **duodecimal**; de base 13, de base 14, de base 15, etcétera.

NOTACIÓN

66

Para indicar el sistema en que está escrito un número, se escribe abajo y a su derecha un número pequeño que indica la base, el cual recibe el nombre de **subíndice**. Así 11_2 indica que este número está escrito en el sistema binario; 432_5 indica que este número está escrito en el sistema quinario; $8,956_{12}$ indica que este número está escrito en el sistema duodecimal.

Cuando un número no lleva subíndice, está escrito en el sistema decimal.

NÚMERO DE CIFRAS DE UN SISTEMA

67

En todo sistema se emplean tantas cifras, contando el cero, como unidades tiene la base.

En el sistema binario, cuya base es 2, se emplean dos cifras, que son: el 0 y el 1. El 2 no puede emplearse, porque en este sistema dos unidades de un orden cualquiera forman una del orden inmediato superior y el 2 se escribirá 10, lo que significa: cero unidades del primer orden y una del segundo.

En el sistema ternario, cuya base es 3, se emplean tres cifras que son: el 0, el 1 y el 2. El 3 ya no puede escribirse en este sistema, porque tres unidades de un orden cualquiera forman una del orden inmediato superior y el 3 se escribirá 10, lo que significa: cero unidades del primer orden y una del segundo.

En el sistema cuaternario, cuya base es 4, se emplean cuatro cifras, que son: el 0, el 1, el 2 y el 3. El 4 no puede escribirse, porque siendo la base del sistema, forma ya una unidad del orden inmediato superior y se escribirá 10, lo que significa: cero unidades del primer orden y una del segundo.

Por análoga razón, las cifras que se emplean en el sistema quinario son: el 0, el 1, el 2, el 3 y el 4; en el sistema senario: el 0, el 1, el 2, el 3, el 4 y el 5; en el septenario: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, etcétera.

Cuando la base del sistema es mayor que 10, las cifras que pasan de 10 se suelen representar por medio de letras, de esta manera: la **A** representa el 10; la **B** representa el 11; la **C**, el 12; la **D**, el 13; la **E**, el 14; la **F**, el 15; y así sucesivamente.

Por tanto, las cifras del sistema undecimal son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y **A**; las del sistema duodecimal son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A** y **B**; las del sistema de base 13 son las anteriores y además **C**; las del de base 14 las del de base 13 y además **D**; etcétera.

68

CIFRAS COMUNES

Las cifras comunes a todos los sistemas son el 0 y el 1.

69

BASE COMÚN

La base de todos los sistemas se escribe del mismo modo: 10.

Parecerá una contradicción decir esto, cuando antes hemos dicho que los sistemas se diferencian unos de otros por su base; pero es que 10 no representa siempre diez unidades, sino una unidad del segundo orden, que en cada sistema tendrá distinto valor. Así, en el binario, 10 representa 2 unidades, o sea la base, porque en este sistema cada unidad del segundo orden tiene dos unidades del primero; en el ternario, 10 representa 3 unidades, o sea la base, porque en este sistema cada unidad del segundo orden representa tres unidades del primero; en el de base 9, 10 representará 9 unidades, o sea la base, porque en este sistema cada unidad del segundo orden tiene 9 unidades del primero, y así sucesivamente.

70

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Explicamos ahora los principios fundamentales expuestos en el número 51, aplicados a los sistemas distintos del decimal.

- 1) En todo sistema, un número de unidades de cualquier orden, igual a la base, forma una unidad del orden inmediato superior.**

Esto significa que en el sistema binario, de base 2, dos unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior; en el sistema ternario o de base 3, tres unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior; en el sistema cuaternario o de base 4, cuatro unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior; en el sistema nonario, 9 unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior; en el sistema duodecimal, 12 unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior, y así sucesivamente.

- 2) En todo sistema una cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades tantas veces mayores que las que representa la anterior, como indique la base.**

Esto significa que en el número 123_5 escrito como lo indica el subíndice, en el sistema quinario, el 2, escrito a la izquierda del 3, representa unidades que son cinco veces mayores que las que representa el 3; y el 1, escrito a la izquierda del 2, representa unidades que son cinco veces mayores que las que representa el 2, o sea veinticinco veces mayores que las que representa el 3.

En el número $6,543_9$, el 4 que está escrito a la izquierda del 3 representa unidades que son nueve veces mayores que las que representa el 3; el 5 representa unidades nueve veces mayores que las que representa el 4, o sea ochenta y una veces mayores que las que representa el 3; y el 6, escrito a la izquierda del 5 representa unidades que son nueve

veces mayores que las que representa el 5, o sea, ochenta y una veces mayores que las que representa el 4 y setecientos veintinueve veces mayores que las que representa el 3.

3) En todo sistema, con tantas cifras como unidades tenga la base, se pueden escribir todos los números.

Esto significa que en el sistema binario o de base 2, con dos cifras que son el 0 y el 1, se pueden escribir todos los números; en el sistema ternario o de base 3, como la base tiene tres unidades, con tres cifras que son el 0, el 1 y el 2, se pueden escribir todos los números; en el sistema septenario o de base 7, como la base tiene siete unidades, con siete cifras, que son el 0, el 1, el 2, el 3, el 4, el 5 y el 6, se pueden escribir todos los números, etcétera.

1. ¿Cuántos sistemas de numeración hay?
2. ¿En qué se distinguen unos de otros los sistemas de numeración?
3. ¿Cómo se sabe en qué sistema está escrito un número?
4. ¿En qué sistema no se emplea subíndice?
5. Diga qué cifras se emplean en el sistema quinario, nonario, undecimal, duodecimal, en el de base 13, de base 15, en el vigesimal.
6. ¿Existe la cifra 7 en el sistema de base 6; el 9 en el de base 8; el 7 en el de base 5?
7. ¿Por qué no se emplea la cifra 5 en el sistema ternario; en el cuaternario?
8. ¿Cómo se escribe la base en el sistema quinario; en el octonario; en el de base 15? ¿Cuántas unidades representa en cada uno?

10

Ejercicio

VALOR RELATIVO DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO ESCRITO EN UN SISTEMA CUALQUIERA

71

Conociendo el lugar que ocupa una cifra y la base del sistema en que está escrito el número, podemos hallar su valor relativo.

1) Valor relativo de las cifras del número 123_4

La cifra 1 representa unidades de tercer orden, pero como la base es 4, cada unidad de tercer orden contiene 4 del segundo y como cada unidad del segundo orden contiene 4 del primero, el valor relativo de la cifra 1 es $1 \times 4 \times 4 = 16$ unidades del primer orden.

La cifra 2, que representa unidades del segundo orden, contiene $2 \times 4 = 8$ unidades del primer orden, luego su valor relativo es 8.

El valor relativo de la cifra 3 es 3 unidades del primer orden.

2) Valor relativo de las cifras del número $2,340_6$

Valor relativo de la cifra 2: $2 \times 6 \times 6 \times 6 = 432$ unidades del 1^{er} orden

" " " " " 3: $3 \times 6 \times 6 = 108$ " " " "

" " " " " 4: $4 \times 6 = 24$ " " " "

1. Hallar el valor relativo de cada una de las cifras de los números:

11_2	223_4	312_5	564	879_{11}	$7,245_{20}$
21_3	$2,342_5$	436_7	703_9	ab_{15}	$10,023_{30}$

2. ¿Cuántas unidades del primer orden contiene cada uno de los números siguientes?

20_3	312_5	$2,134_7$	$7,012_{11}$	$7,ab2_{15}$
112_4	$2,002_6$	$7,010_9$	$20,314_{12}$	$4c,d63_{20}$

- Escribir el número que representa: 2 unidades del primer orden en el sistema binario; 3 ídem en el ternario; 9 ídem en el nonario.
- Escribir el número que representa: 3 unidades del primer orden en el sistema binario; 4 ídem en el ternario; 5 ídem en el cuaternario; 10 ídem en el undecimal; 12 ídem en el undecimal.
- Escribir el número que representa: 4 unidades del primer orden en el sistema binario; 5 ídem en el ternario; 6 ídem en el cuaternario; 8 ídem en el senario.
- Escribir el número que representa: 6 unidades del primer orden en el sistema binario; 9 ídem en el ternario; 12 ídem en el cuaternario.
- Escribir el número que representa: 9 unidades del primer orden en el sistema senario; en el septenario; en el nonario.
- Escribir el número que representa: 8 unidades del primer orden en el sistema cuaternario; 10 ídem en el quinario; 12 ídem en el senario; 18 ídem en el nonario.
- Escribir el número que representa: 15 unidades del primer orden en el sistema quinario; 18 ídem en el senario; 21 ídem en el septenario; 45 ídem en el de base 15.

CONVERSIÓN DE UN NÚMERO ESCRITO EN UN SISTEMA A OTRO DISTINTO

Se pueden considerar los tres casos que a continuación se estudian.

PRIMER CASO

Convertir un número escrito en el sistema decimal a otro sistema distinto.

REGLA

Se divide el número y los sucesivos cocientes entre la base del nuevo sistema, hasta llegar a un cociente menor que el divisor. El nuevo número se forma escribiendo de izquierda a derecha el último cociente y todos los residuos colocados a su derecha, de uno en uno, aunque sean ceros.

1) Convertir 85 al sistema ternario.

85	3			
25	28	3		
(1)	(1)	9	3	
		(0)	3	3
			(0)	(1)

$$85 = 10,011_3 \text{ R.}$$

2) Convertir 3,898 al sistema duodecimal.

3,898	12		
29	324	12	
58	84	27	12
(10)	(0)	(3)	2

$$3,898 = 230A_{12} \text{ R.}$$

OBSERVACIÓN

Cuando el último cociente o alguno de los residuos sea mayor que 9 se pone en su lugar la letra correspondiente.

Convertir:

1.	123	al sistema binario.	R. $1,111,011_2$
2.	871	" " ternario.	R. $1,012,021_3$
3.	3,476	" " quinario.	R. $102,401_5$
4.	10,087	" " de base 7.	R. $41,260_7$
5.	1,007	" " de base 8.	R. $1,757_8$
6.	78,564	" " nonario.	R. $128,683_9$
7.	87,256	" " duodecimal	R. $42,5B4_{12}$
8.	120,022	" " de base 20.	R. $F,012_{20}$
9.	14,325	" " de base 30.	R. FQF_{30}
10.	86,543	" " de base 32.	R. $2,KGF_{32}$

12

SEGUNDO CASO

Convertir un número escrito en un sistema distinto del decimal al sistema decimal.

REGLA

Se multiplica la primera cifra de la izquierda del número dado por la base y se suma con este producto la cifra siguiente. El resultado de esta suma se multiplica por la base y a este producto se le suma la tercera cifra y así sucesivamente hasta haber sumado la última cifra del número dado.

Ejemplos

1) Convertir $11,101_2$ al sistema decimal.

$$\begin{array}{rcl} 1 \times 2 & = & 2 \\ 3 \times 2 & = & 6 \\ 7 \times 2 & = & 14 \\ 14 \times 2 & = & 28 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2 + 1 & = & 3 \\ 6 + 1 & = & 7 \\ 14 + 0 & = & 14 \\ 28 + 1 & = & 29 \end{array}$$

$$11,101_2 = 29 \text{ R.}$$

2) Convertir el número $89,AB3_{12}$ al sistema decimal.

$$\begin{array}{rcl} 8 \times 12 & = & 96 \\ 105 \times 12 & = & 1,260 \\ 1,270 \times 12 & = & 15,240 \\ 15,251 \times 12 & = & 183,012 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 96 + 9 & = & 105 \\ 1,260 + 10 & = & 1,270 \\ 15,240 + 11 & = & 15,251 \\ 183,012 + 3 & = & 183,015 \end{array}$$

$$89,AB3_{12} = 183,015 \text{ R.}$$

13

Convertir al decimal:

Ejercicio

1. $1,101_2$ R. 13

2. $32,012_4$ R. 902

3. $5,431_6$ R. 1,243

4. $76,321_8$ R. 31,953

5. $20,078_9$ R. 13,193

6. $7,AB5_{12}$ R. 13,673

7. $C,DA6_{15}$ R. 43,581

8. $8,EFA_{18}$ R. 51,472

9. $HE,G34_{20}$ R. 2,838,464

10. A,BCD_{30} R. 280,273

74

TERCER CASO

Convertir un número escrito en un sistema distinto del decimal a otro sistema que no sea el decimal.

REGLA

Se reduce el número dado primero al sistema decimal y de éste al pedido.

Ejemplos

1) Convertir el número $2,211_3$ al sistema de base 7.

$2,211_3$ al decimal:

$$\begin{array}{rcl} 2 \times 3 & = & 6 \\ 8 \times 3 & = & 24 \\ 25 \times 3 & = & 75 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 6 + 2 & = & 8 \\ 24 + 1 & = & 25 \\ 75 + 1 & = & 76 \end{array}$$

76 al de base 7:

$$\begin{array}{r} 76 \\ (6) \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 10 \\ (3) \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 1 \\ (1) \end{array}$$

$$2,211_3 = 136_7 \text{ R.}$$

2) Convertir ABE_{15} al sistema de base 13.

ABE_{15} al decimal:

$$10 \times 15 = 150$$

$$161 \times 15 = 2,415$$

$$150 + 11 = 161$$

$$2,415 + 14 = 2,429$$

2,429 al de base 13:

2,429	13		
112	186	13	
089	56	14	13
(11)	(4)	(1)	(1)

$$ABE_{15} = 1,14B_{13} \text{ R.}$$

Convertir:

1. $1,002_3$ al cuaternario. R. 131_4

2. 432_7 al ternario. R. $22,010_3$

3. $B56_{12}$ al quinario. R. $23,100_5$

4. $5,4CD_{15}$ al duodecimal. R. $A,494_{12}$

5. $C,00B_{18}$ al de base 23. R. $5,H76_{23}$

6. $5,AB4_{14}$ al de base 7. R. $64,114_7$

7. A,BCD_{20} " " " 9. R. $138,108_9$

8. $E,F4C_{21}$ " " " 22. R. $C,HG9_{22}$

9. $HF,00C_{25}$ " " " 30. R. $8E,IQ2_{30}$

10. $8,A0D_{24}$ " " " 15. R. $24,72A_{15}$

14

Ejercicio

1. De un lugar en que se emplea el sistema binario nos remiten 1,101 bultos postales. ¿Cómo escribiremos ese número? R. 9

2. De México enviamos a un comerciante que emplea el sistema duodecimal 5,678 barriles de aceite. ¿Cómo escribirá ese número dicho comerciante? R. $3,352_{12}$

3. Pedimos 18 automóviles a una persona que emplea el sistema de base 18. ¿Cómo escribe ese individuo el número de automóviles que nos envía? R. 10_{18}

4. Un comerciante que emplea el sistema quinario pide 4,320 sombreros a otro que emplea el sistema de base 13. ¿Cómo escribirá este comerciante el número de sombreros que envía al primero? R. 360_{13}

15

Ejercicio

NOTACIÓN LITERAL

75

En matemáticas, cuando se quieren generalizar las cuestiones, las propiedades de los números o los razonamientos, las cantidades se representan con **letras**.

Así, cuando yo pruebo que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, la propiedad que he demostrado es **general** y diré que el cuadrado de la suma de dos números **cualesquiera** es igual al cuadrado del **primero**, más el doble del **primero** por el **segundo** más el cuadrado del **segundo**.

Cuando en una cuestión cualquiera asignamos a una letra un valor determinado, dicha letra no puede representar, en la misma cuestión, otro valor distinto del que le hemos asignado.

Para que una misma letra pueda representar distintos valores hay que diferenciarlos por medio de apóstrofes, por ejemplo, a' , a'' , a''' , que se leen **a prima**, **a biprima**, **a triprima**.

o por medio de subíndices, por ejemplo, a_1 , a_2 , a_3 , que se leen **a subuno**, **a subdos**, **a subtres**.

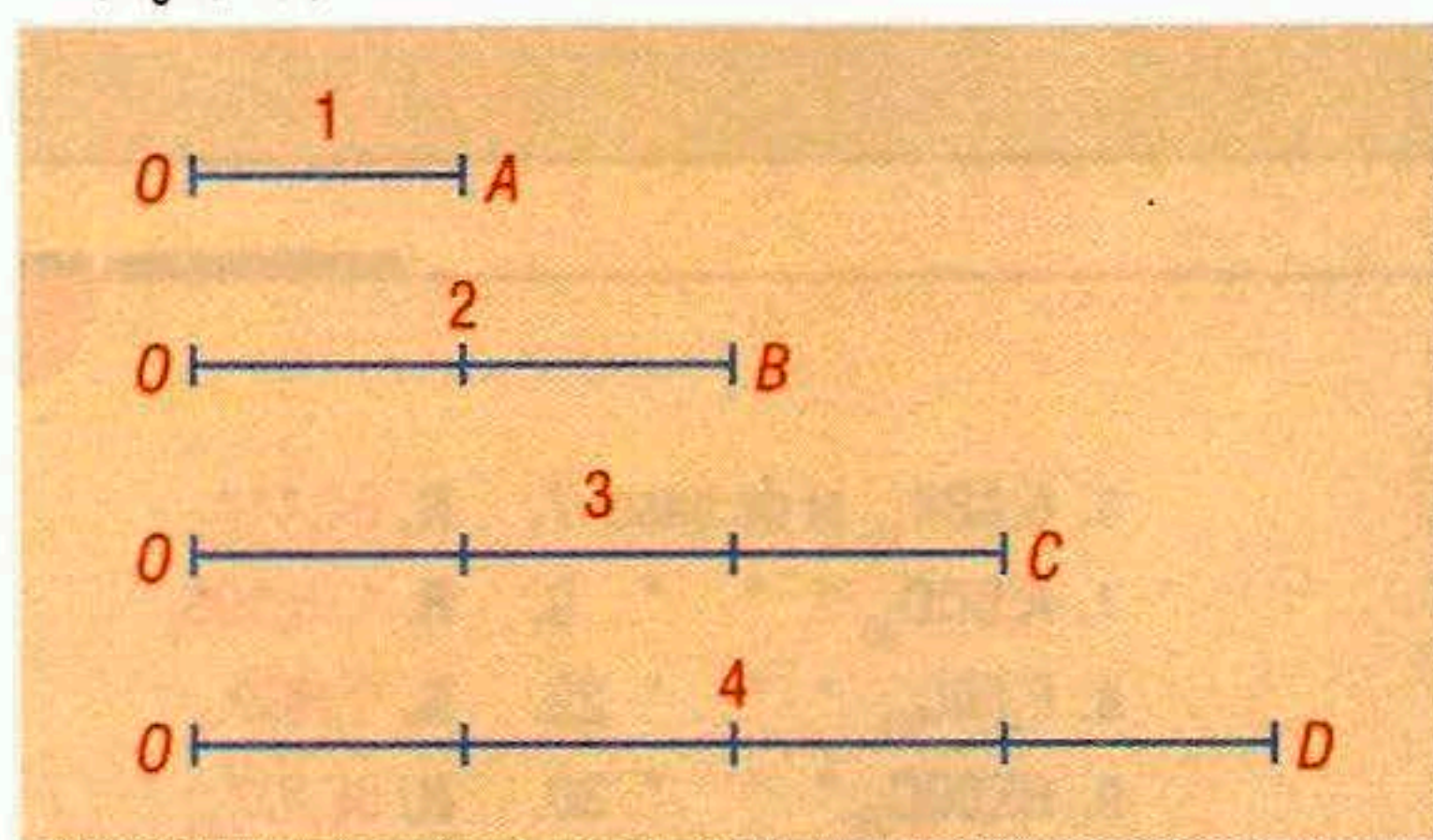
76

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales se representan geoméricamente por medio de **segmentos** de recta.

Para ello se elige un segmento cualquiera, por ejemplo: OA (Fig. 15), que representa el 1; OA es el segmento **unidad**.

Figura 15

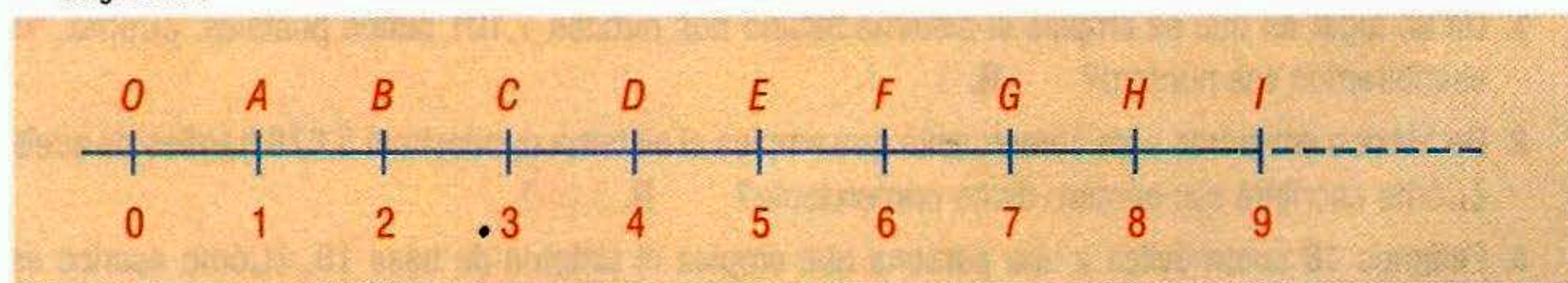


Entonces, cada número natural se representa por un segmento que contiene el segmento unidad tantas veces como elementos tiene el conjunto que representa el número.

Así, el 2 se representa por un segmento OB que contiene 2 veces el segmento unidad; el 3 se representa por un segmento OC que contiene tres veces el segmento unidad; el 4 se representa por el segmento OD , etcétera.

Para representar sobre una semirrecta la serie de los números naturales se procede de este modo:

Figura 16



A partir del origen O (Fig. 16) se toman sucesivamente segmentos iguales al segmento escogido como unidad y tendremos que el segmento OA representa el 1; el segmento OB el 2; el segmento OC el 3; el segmento OD el 4 y así sucesivamente. El 0, que representa el conjunto nulo, se representa por un **segmento nulo**: el punto O , origen.

Vemos que los puntos O, A, B, C, D, \dots son los extremos de los segmentos $OO = 0$, $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$, $OD = 4$, etc., todos de origen O . En la práctica se dice que el **extremo** de cada segmento representa un número natural. Así, el punto A representa el 1; el punto B , el 2; el punto C , el 3; el punto F , el 6; el punto I , el 9, etcétera.

La **distancia** de cada uno de los puntos O, A, B, C, D, \dots al origen O se llama **abscisa** de ese punto. Así, OA es la abscisa del punto A , OB la abscisa del punto B , OE la abscisa del punto E , etc., y esas abscisas se expresan por el **número** que corresponde al punto. Así, la abscisa del punto A es 1, la de B es 2, la de D es 4, la de H es 8, etcétera.

La **escala** de una cinta métrica, de un nonio, de una regla o de un termómetro no son más que semirrectas que llevan marcadas las abscisas de cada uno de sus puntos.



La contribución de los romanos a las matemáticas se limitó a algunas nociones de agrimensura, surgidas de la necesidad de medir y fijar las fronteras del vasto imperio. No obstante, la huella romana se observa todavía hoy a través de su nu-

meración, que ha sido fijada por el uso en los capítulos de los libros, en la sucesión de los reyes, en la notación de los siglos y, especialmente, en las inscripciones históricas.

Capítulo **IV**

NUMERACIÓN ROMANA

LA NUMERACIÓN ROMANA es el sistema de representación de los números empleado por los romanos. La numeración romana no utiliza el principio del valor relativo, pues el valor de los símbolos siempre es el mismo, sin que influya el **lugar** que ocupan.

La numeración romana parece ser resto de un sistema de numeración de base 5.

Su uso en la actualidad

Se usa muy poco. Solamente se emplea para fechas, algunas veces; para numerar los capítulos de una obra; en algunos relojes, etcétera.

SÍMBOLOS QUE EMPLEA. SUS VALORES

Los símbolos que emplea la numeración romana son: I que vale 1; V que vale 5; X que vale 10; L que vale 50; C que vale 100; D que vale 500 y M que vale 1,000.

Además, **una rayita** colocada encima de la letra indica tantos millares como unidades tenga ese símbolo; **dos rayitas** encima de cualquier símbolo indican tantos millones como unidades tenga el símbolo; **cuatro rayitas**, tantos billones como unidades indique el símbolo; **seis rayitas**, tantos trillones como unidades tenga el símbolo.

79

REGLAS PARA LA REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS

Son tres:

- 1) Si a la **derecha** de una cifra colocamos otra **igual** o **menor**, el valor de la primera queda aumentado con el de la segunda.

Ejemplo

LV equivale a $L + V = 55$

- 2) Si a la **izquierda** de una cifra colocamos otra **menor**, el valor de ésta se resta de la anterior.

Ejemplo

IV equivale a $V - 1 = 4$

- 3) Nunca se pueden emplear **más de tres símbolos iguales** seguidos a la derecha de otra cifra mayor, ni aislados; ni **más de uno** a la izquierda de otra mayor. Así, el 40 no se escribe XXXX, sino XL; el 9 no se escribe Vllll, sino IX; el 70 no se escribe XXXC, sino LXX.

Ejemplos

NÚMEROS ARÁBIGOS	NÚMEROS ROMANOS	NÚMEROS ARÁBIGOS	NÚMEROS ROMANOS
1	I	234	CCXXXIV
2	II	580	DLXXX
3	III	1,000	M
4	IV	2,000	MM
5	V	2,349	MMCCCXLIX
6	VI	3,000	MMM
7	VII	4,000	IV̄
8	VIII	5,609	V̄DCIX
9	IX	50,190	L̄CXC
10	X	1,000,000	M̄
13	XIII	2,000,000	MM̄
18	XVIII	20,000,000	XX̄
30	XXX	Billón	≡̄
40	XL		M̄
65	LXV	Trillón	≡̄
105	CV	4,132,208	M̄
			IV̄CXXXIĪCCVIII

Leer los números siguientes:

- | | | | |
|--------------|----------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. LVIII | 5. CMXLV | 9. $\overline{\text{MXIXCXV}}$ | 13. $\overline{\text{XMMXXV}}$ |
| 2. CCCXXXIII | 6. MMCCIV | 10. $\overline{\text{VIVCCVI}}$ | 14. $\overline{\text{MMIICVIII}}$ |
| 3. DCIII | 7. $\overline{\text{VDC}}$ | 11. $\overline{\text{VIDVIICC}}$ | 15. $\overline{\text{VLIII}}$ |
| 4. DCCXXXII | 8. $\overline{\text{DLX}}$ | 12. $\overline{\text{MXVI}}$ | 16. $\overline{\text{MXV}}$ |

16

Ejercicio

Escribir los números siguientes en el sistema romano:

- | | | |
|------------|---------------|--------------------|
| 1. 209 | 7. 245,708 | 13. 20,778,908 |
| 2. 343 | 8. 300,000 | 14. 54,000,008 |
| 3. 1,937 | 9. 300,018 | 15. 1,384,435,786 |
| 4. 4,143 | 10. 325,208 | 16. 45,789,000,324 |
| 5. 81,000 | 11. 4,135,506 | 17. 4 billones |
| 6. 124,209 | 12. 6,000,000 | 18. 14 trillones |

17

Ejercicio

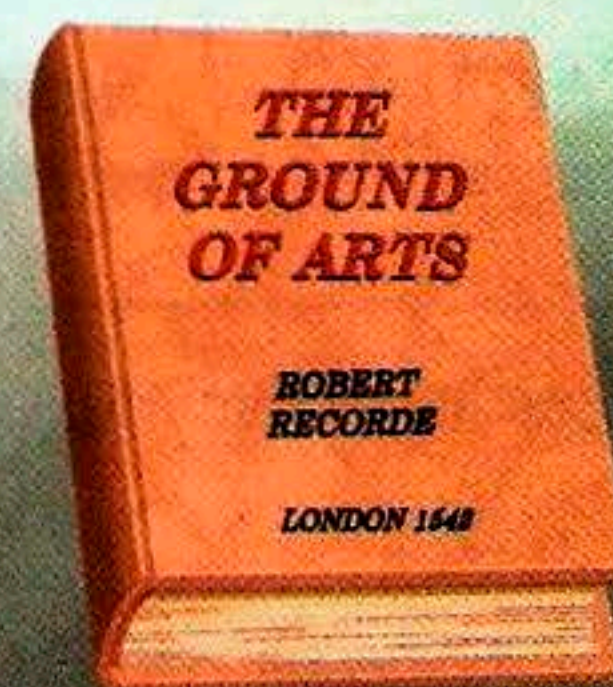
Escribir con números arábigos los números romanos de los ejercicios siguientes:

- Colón descubrió América en el año MCDXCII y murió en el año MDVI.
- Don Benito Juárez murió el XVIII de julio de MDCCCLXXII.
- La Invasión comenzó el XXII de octubre de MDCCCXCV y terminó el mismo día del MDCCCXCVI.
- La República de Venezuela proclamó su independencia el día V del VII mes del año MDCCCXI.
- El cuadrante del meridiano terrestre tiene aproximadamente $\overline{\text{X}}$ de metros.
- Don Miguel Hidalgo y Costilla dio el grito de Independencia de México el XV de septiembre de MDCCCX.

18

Ejercicio

$$\begin{aligned} a - b &= c \\ a &> b \\ b &< a \end{aligned}$$



El problema de las igualdades no fue conocido por los antiguos en su forma aritmética. El primero que utilizó el signo igual (=) y expuso algunas cuestiones teóricas sobre las igualdades fue **Robert Recorde**, en su obra, *The Ground of*

Arts, publicada en Londres en **1542**. Más tarde, en el siglo xvii, el inglés **Harriot** y el francés **Bouguer** establecieron el uso de los signos mayor que (>) y menor que (<).

Capítulo V

RELACIONES DE IGUALDAD Y DESIGUALDAD

80

IGUALDAD ENTRE NÚMEROS NATURALES

Sabemos (38, 2º) que todos los conjuntos coordinables entre sí tienen **el mismo número cardinal**. Por tanto, podemos decir que:

Números iguales son los que representan conjuntos coordinables.

Ejemplo

Si en un tranvía cada persona ocupa un asiento de modo que no queda ningún asiento vacío ni ninguna persona de pie, ambos conjuntos están coordinados, luego si a es el número que representa el conjunto de personas y b el número que representa el conjunto de asientos, tendremos que los números a y b son iguales (o son el mismo número), lo cual se expresa por la *notación*

$$a = b \quad \text{y se lee} \quad a \text{ igual } b$$

La expresión $a = b$ es una *igualdad* en la cual a está a la izquierda del signo = es el *primer miembro* y b que está a la derecha del signo = es el *segundo miembro*.

DESIGUALDAD ENTRE NÚMEROS NATURALES

81

Cuando dos conjuntos no son coordinables entre sí tienen **desigual número**. Por tanto, podemos decir que:

Números desiguales son los que representan conjuntos no coordinables.

Ejemplos

Si en un tranvía no es posible lograr que cada pasajero ocupe un asiento y que cada asiento esté ocupado por una sola persona, ambos conjuntos no son coordinables y ello obedecerá a que hay *más* personas que asientos o *más* asientos que personas. Entonces, si a es el número que representa el conjunto de personas y b el número que representa el conjunto de asientos, diremos que a es desigual a b . Si hay *más personas que asientos* después de que cada asiento esté ocupado por una persona, quedarán personas de pie; entonces el conjunto de los asientos está coordinado con *una parte* del conjunto de personas y en este caso diremos que el número de personas a es *mayor* que el número de asientos b o que el número de asientos es menor que el número de personas lo cual se expresa con la siguiente notación:

$$a > b \text{ o } b < a$$

Luego, un número a es *mayor* que otro número b cuando el conjunto que representa b es coordinable con *una parte* del conjunto que representa a .

Si hay *más* asientos que personas o *menos* personas que asientos, después de que cada persona ocupe un asiento quedarán asientos vacíos; entonces el conjunto de personas estará coordinado con una parte del conjunto de asientos y en este caso diremos que el número de personas a es menor que el número de asientos b o que el número de asientos es *mayor* que el número de personas lo que se expresa con la notación:

$$a < b \text{ o } b > a$$

Luego, un número a es *menor* que otro número b cuando el conjunto que representa a es coordinable con *una parte* del conjunto que representa b .

Al escribir una desigualdad hay que poner el número *menor* junto al vértice del signo $<$ y el número *mayor* junto a la abertura. Así,

$$\begin{array}{l} 5 < 8 \\ 10 > 6 \end{array}$$

El *primer miembro* de una desigualdad es el número que está a la izquierda del signo $<$ o $>$ y el *segundo miembro* es el número que está a la derecha. Así, en $5 < 8$, 5 es el primer miembro y 8 el segundo miembro.

POSTULADO DE RELACIÓN

82

Sea a el número de elementos del conjunto A y b el número de elementos del conjunto B . Necesariamente, tiene que ocurrir una de estas dos cosas: **A es coordinable con B o no lo es.**


Si A es coordinable con B , $a = b$.

Si A no es coordinable con B , ello se deberá a que A tenga más elementos que B y entonces $a > b$ o a que A tenga menos elementos que B y entonces $a < b$. Podemos, pues, enunciar el siguiente:

Postulado

Dados dos números a y b necesariamente tiene que verificarse una y sólo una de estas posibilidades: $a = b$, $a > b$ o $a < b$.

Estas tres posibilidades se **completan**, es decir, necesariamente tiene que verificarse una de ellas. En efecto: es imposible que un número a no sea igual, ni menor ni mayor que otro número b . Es imposible que la edad de una persona no sea ni 20 años, ni menos de 20 años, ni más de 20 años.

Estas posibilidades **se excluyen** mutuamente, es decir, que si se verifica una de ellas las otras dos no pueden verificarse. Así, 

Si $a = b$, no es $a > b$ ni $a < b$

Si $a > b$, no es $a = b$ ni $a < b$

Si $a < b$, no es $a = b$ ni $a > b$

Si una persona tiene 20 años, no tiene ni más ni menos de 20 años; si tiene menos de 20 años no tiene ni 20 años ni más de 20 años; si tiene más de 20 años no tiene 20 años ni menos de 20 años.

83

SIGNOS DOBLES EN LA DESIGUALDAD

Si una de las tres posibilidades no se verifica, necesariamente tiene que verificarse una de las otras dos. Así:

Si a no es igual a b ,	necesariamente	$a > b$ o $a < b$ ()
Si a no es mayor que b ,	"	$a = b$ o $a < b$ ()
Si a no es menor que b ,	"	$a = b$ o $a > b$ ()

Para expresar que un número **no es igual** a otro se emplea el signo \neq , que es el signo $=$ cruzado por una raya; para indicar que **no es mayor** que otro se emplea el signo \nlessgtr , y para indicar que **no es menor** que otro se emplea el signo \nless .

Empleando los signos \neq , \nlessgtr y \nless , las relaciones (1), (2) y (3) pueden escribirse: 

Si $a \neq b$, necesariamente $a \leq b$

Si $a \nlessgtr b$, " $a \geq b$

Si $a \nless b$, " $a \geq b$

Vemos, pues, que el signo \neq (no igual) equivale al signo doble \leq (mayor o menor que); el signo \nlessgtr (no mayor) equivale al signo doble \geq (menor o igual que) y el signo \nless (no menor) equivale al signo doble \geq (mayor o igual que).

1. Establecer la relación adecuada entre los números 3 y 5; 9 y 7. **R. $3 < 5$; $9 > 7$**
2. ¿Qué significa que el número m es igual a n ; que $m > n$; que $m < n$? **R. Que el conjunto que representa m es coordinable con el que representa n ; que el conjunto que representa n es coordinable con una parte del conjunto que representa m ; que el conjunto que representa m es coordinable con una parte del conjunto que representa n .**
3. En un colegio hay x dormitorios y y pupilos. ¿Cuándo será $x = y$, cuándo $x > y$ y cuándo $x < y$, de acuerdo con la coordinación de los conjuntos que ellos representan? **R. Cuando el conjunto de pupilos sea coordinable con el conjunto de dormitorios; cuando el conjunto de pupilos sea coordinable con una parte del conjunto de dormitorios; cuando el conjunto de dormitorios sea coordinable con una parte del conjunto de pupilos.**
4. a es un número de jóvenes y b un número de muchachas. ¿Qué relaciones se podrán escribir si al formar parejas sobran jóvenes; si sobran muchachas; si no sobran jóvenes ni muchachas? **R. $a > b$; $a < b$; $a = b$**
5. ¿Por qué cierto número de lápices es igual a cierto número de naranjas? **R. Porque ambos conjuntos son coordinables.**
6. Explique cuándo cierto número de personas es menor que cierto número de sombreros. **R. Cuando el conjunto de personas es coordinable con una parte del conjunto de sombreros.**
7. Explique por qué el número de profesores de un colegio es mayor que el número de aulas del colegio. **R. Porque el conjunto de aulas es coordinable con una parte del conjunto de profesores.**
8. Reparto x lápices entre los n alumnos de una clase dando uno a cada alumno y quedan alumnos sin lápices. ¿Qué podrás escribir? **R. $x < n$**
9. En un tranvía de 32 asientos, entran x personas y no quedan asientos vacíos. ¿Qué relación se puede escribir? **R. $x = 32$ o $x > 32$**
10. Reparto m lápices entre los 18 alumnos de una clase y sobran lápices. ¿Qué se puede escribir? **R. $m > 18$**
11. En un ómnibus que tiene 20 asientos entran n personas y no quedan personas de pie. ¿Qué relación se puede escribir? **R. $n < 20$ o $n = 20$**
12. La velocidad x de un automóvil que poseo no puede pasar de 140 km/h. ¿Qué se puede escribir? **R. $x = 140$ o $x < 140$**
13. Si la velocidad x de un auto no puede bajar de 8 km/h, ¿qué se puede escribir? **R. $x = 8$ o $x > 8$**
14. Yo no tengo 34 años. Si mi edad es x años, ¿qué se puede escribir? **R. $x < 34$ o $x > 34$**
15. Para contraer matrimonio un hombre necesita tener 14 años cumplidos. Si Juan, que tiene n años, se casa, ¿cuál es su edad? **R. $n = 14$ años o $n > 14$ años.**
16. Para presentar el examen de ingreso a la secundaria se deben tener 13 años cumplidos. Si a es la edad de una niña que presenta dicho examen, ¿qué edad tiene? **R. $a = 13$ o $a > 13$**

17. Con los x pesos que tengo puedo comprar una entrada para el cine. Si la entrada no cuesta más de 20 pesos, ¿qué se puede escribir? **R. $x = 20, x < 20$ o $x > 20$**
18. Con 30 ¢ puedo comprar una entrada que cuesta x ¢. ¿Qué relación se puede escribir? **R. $x = 30$ o $x < 30$**
19. Con 50 ¢ no puedo comprar una entrada que cuesta x ¢. ¿Qué relación se puede escribir? **R. $x > 50$**
20. En un colegio hay n aulas y no hay diez aulas. ¿Qué se puede escribir? **R. $n < 10$ o $n > 10$**
21. Para ser representante hay que tener 21 años cumplidos. Si Roberto García es representante, ¿cuál es su edad? **R. 21 años o más de 21**

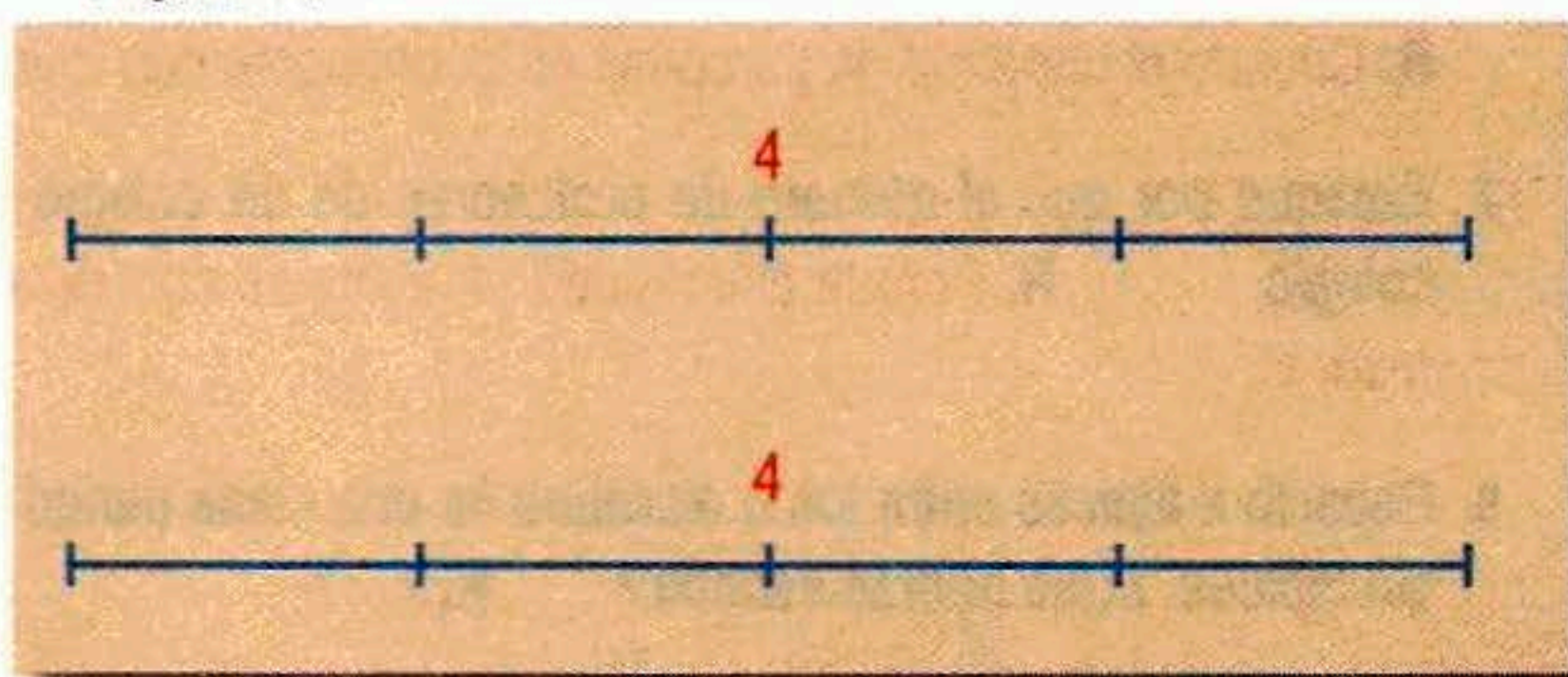
84

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA IGUALDAD Y LA DESIGUALDAD

Sabemos que cada número natural se representa de modo gráfico por un segmento que contiene al **segmento unidad** tantas veces como elementos tiene el conjunto que representa el número.

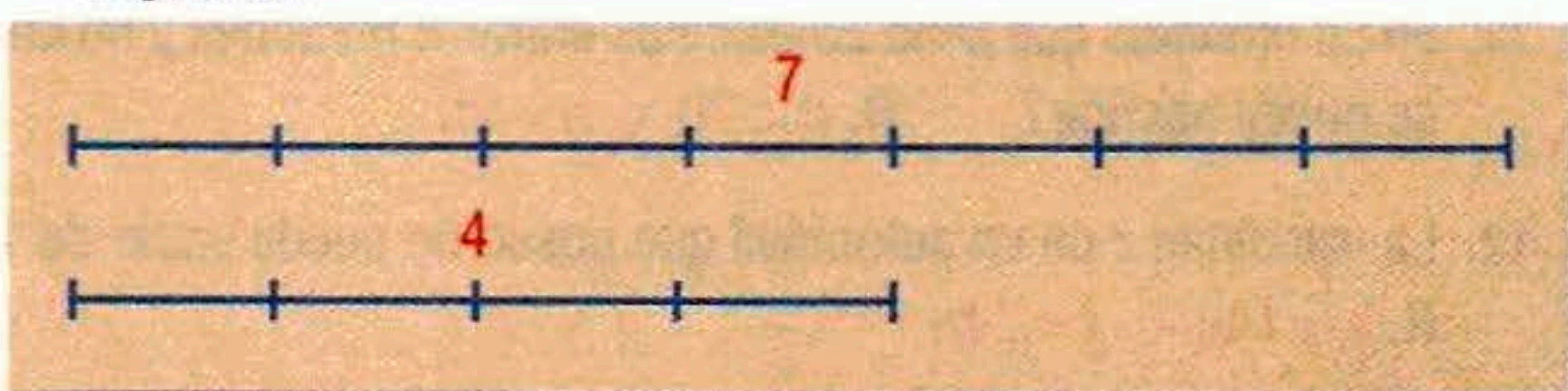
Dos números son iguales cuando representan dos conjuntos coordinables, o sea, dos conjuntos que tienen **igual número de elementos**, luego dos números iguales se representarán por dos segmentos que contengan **igual número de veces** al segmento unidad, o sea, por dos segmentos **iguales**. Así: $4 = 4$ se representa: →

Figura 17



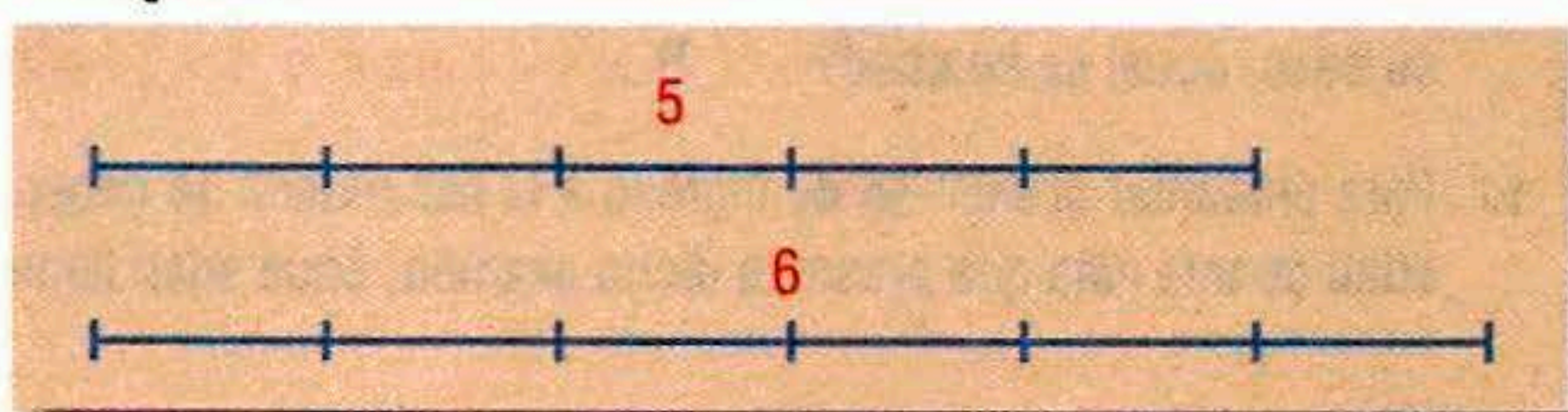
Cuando un número es **mayor** que otro el conjunto que representa el número mayor tiene **más elementos** que el conjunto que representa el número menor, luego el segmento que representa el número mayor contendrá al segmento unidad más veces que el segmento que representa el número menor, o sea, que ambos segmentos serán **desiguales**. Así $7 > 4$ se representa: →

Figura 18



Cuando un número es **menor** que otro, el segmento que representa el número menor contiene **menos veces** al segmento unidad que el que representa el número mayor. Así: $5 < 6$ se representa: →

Figura 19



En resumen: **segmentos iguales** representan **números iguales** y **segmentos desiguales** representan **números desiguales**.

Representar gráficamente:

1. $3 = 5$

3. $3 > 2$

5. $8 < 10$

7. $15 = 15$

2. $5 < 8$

4. $6 > 4$

6. $9 > 5$

8. $7 < 12$

20

Ejercicio

LEYES DE LA IGUALDAD

85

Las leyes o caracteres de la igualdad son tres:

1) **Carácter idéntico.** Todo número es igual a sí mismo.

$$a = a$$

2) **Carácter recíproco.** Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.

Así, si:

$$a = b, b = a$$

Si la edad de Pedro es igual a la de Rosa, la de Rosa es igual a la de Pedro.

El carácter recíproco de las igualdades nos *permite invertir los dos miembros de una igualdad sin que la igualdad varíe*.

Ejemplo

3) **Carácter transitivo.** Si un número es igual a otro y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.

Así, si:

$$a = b \text{ y } b = c, a = c$$

Si la edad de Pedro es igual a la de Juan y la de Juan es igual a la de Enrique, Pedro y Enrique tienen la misma edad.

El carácter transitivo de las igualdades se suele enunciar diciendo que *dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí* o también que *si dos igualdades tienen un miembro en común, con los otros dos miembros se puede formar igualdad*.

Ejemplo

LEYES DE LA DESIGUALDAD

86

En la desigualdad no existe el carácter idéntico, pues es imposible que un número sea mayor o menor que él mismo. Así, es imposible que $m > m$ o que $m < m$.

Tampoco existe el carácter recíproco. Si un número es mayor que otro, este último no puede ser mayor que el primero, sino menor. Así, siendo $a > b$ no se verifica que $b > a$, sino que $b < a$.

Lo anterior nos dice que **si se invierten los miembros de una desigualdad, cambia el signo de la desigualdad**. Así, para invertir los miembros de la desigualdad $5 < 7$ hay que escribir $7 > 5$.

Las desigualdades sólo tienen **carácter transitivo**, que vamos a estudiar.

87

CARÁCTER TRANSITIVO DE LAS RELACIONES DE MAYOR Y MENOR

- 1) Si un número es mayor que otro y éste es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero.

Así, si:

$$a > b \text{ y } b > c, a > c$$

Ejemplo

Si el aula Martí tiene mayor número de alumnos que el aula Agramonte y ésta tiene mayor número de alumnos que años su profesor, el aula Martí tiene más alumnos que años el profesor.

- 2) Si un número es menor que otro y éste es menor que un tercero, el primero es menor que el tercero.

Así, si:

$$a < b \text{ y } b < c, a < c$$

Ejemplo

Si Pedro tiene más pesos que yo años y Enrique tiene más primos que pesos tiene Pedro, mis años son menos que los primos de Enrique.

Las propiedades anteriores **1** y **2** se pueden enunciar de este modo: *Si se tienen dos desigualdades del mismo sentido (es decir, ambas con $>$ o ambas con $<$) tales que el segundo miembro de la primera sea igual al primer miembro de la segunda, de ellas resulta otra desigualdad del mismo sentido, cuyo primer miembro es el primer miembro de la primera desigualdad y cuyo segundo miembro es el segundo miembro de la segunda desigualdad.*

Si dos desigualdades como las anteriores fueran de *distinto sentido*, el primer miembro de la primera puede ser igual, menor o mayor que el segundo miembro de la segunda.

Así: $7 > 5$ y $5 > 3$	luego	$7 > 3$
$3 < 8$ y $8 < 11$	"	$3 < 11$
$9 > 7$ y $11 > 9$	"	$11 > 7$
$7 < 8$ y $4 < 7$	"	$4 < 8$

Así: $3 < 5$ y $5 > 2$	y $3 > 2$
$8 > 6$ y $6 < 9$	y $8 < 9$
$7 > 4$ y $4 < 7$	y $7 = 7$

1. Aplicar el carácter recíproco de las igualdades a $x = y$; $a + b = c$; $p = q + r$.

R. $y = x$; $c = a + b$; $q + r = p$

2. Mis x años son tantos como los y hermanos de Enrique. ¿Qué se puede escribir de acuerdo con el carácter recíproco de las igualdades? R. $y = x$

3. Aplicar el carácter transitivo a las igualdades siguientes:

$m = n$	y	$n = p$	R. $m = p$
$p = q$	y	$r = p$	R. $q = r$
$x = y$	y	$n = y$	R. $x = n$
$a + b = c$	y	$x = a + b$	R. $c = x$

4. Mi aula tiene tantos alumnos como años tengo yo y María tiene tantos primos como alumnos tiene mi aula, luego... ¿Qué carácter aplica para ello? R. Transitivo.

5. $m = n + p$ y $n + p = c + d$ luego... R. $m = c + d$

6. Si $m > n$ resulta que $n ? m$. R. $n < m$

7. Siendo $x < y$ resulta que $y ? x$. R. $y > x$

8. ¿Qué se deriva de cada una de las parejas siguientes de desigualdades de acuerdo con el carácter transitivo?:

$7 > 5$	y	$5 > 2$	R. $7 > 2$
$9 > 3$	y	$3 > 2$	R. $9 > 2$
$a < b$	y	$b < m$	R. $a < m$
$m < n$	y	$n < p$	R. $m < p$

9. De

$6 > 3$	y	$2 < 3$	resulta que...	R. $6 > 2$
$9 < 11$	y	$9 > 7$	resulta que...	R. $7 < 11$
$20 > 6$	y	$3 < 6$	resulta que...	R. $20 > 3$

10. Expresar el carácter transitivo de la relación de mayor con los números 8, 3 y 7.

R. $8 > 7$ y $7 > 3$ luego $8 > 3$

11. Representar gráficamente el carácter transitivo de la relación de menor con los números 2, 5 y 9.

R. $2 < 5$ y $5 < 9$ luego $2 < 9$

12. Expresar el carácter transitivo de la relación de menor con 11, 9 y 7. R. $7 < 9$ y $9 < 11$ luego $7 < 11$

13. Representar gráficamente el carácter transitivo de la relación mayor con tres números consecutivos.

14. De $m > n$ y $m < p$, resulta que... R. $p > n$

15. Pedro es mayor que María y menor que Jorge. ¿Cuál es el mayor de los tres? R. Jorge.

16. Mi casa es menor que la de B y mayor que la de C. ¿Cuál de las tres es la menor? R. La de C.

17. Yo tengo más dinero que tú y menos que tu primo. ¿Quién es el más rico? R. Tu primo.

88

COMBINACIÓN DE IGUALDADES Y DESIGUALDADES

Estudiaremos los 3 casos siguientes:

- 1) Combinación de igualdades y desigualdades que tengan todas el signo $>$.

Ejemplos

- 1) Combinar $a = b, b > c, c > d$ y $d > e$.

Tendremos: $a = b > c > d > e$ y de aquí $a > e$.

- 2) Combinar $m > n, p > r, q = m$ y $n = p$.

Tendremos: $q = m > n = p > r$ y de aquí $q > r$.

Vemos pues, que cuando todos los signos de desigualdad son $>$ se deduce la relación de *mayor* entre el primer miembro y el último.

- 2) Combinación de igualdades con desigualdades que tengan todas el signo $<$.

Ejemplos

- 1) Combinar $a = b, b < c, c < d$ y $d < e$.

Tendremos: $a = b < c < d < e$ y de aquí $a < e$.

- 2) Combinar $p < q, r < s, r = q, s = m$ y $n > m$.

Tendremos: $p < q = r < s = m < n$ y de aquí $p < n$.

Vemos pues, que cuando todos los signos de desigualdad son $<$ se deduce la relación de *menor* entre el primer miembro y el último.

- 3) Combinación de igualdades y desigualdades no todas del mismo sentido.

Ejemplo

- 1) Combinar $a = b, b > c, c > m$ y $m < p$.

Tendremos: $a = b > c > m < p$.

De aquí no se puede deducir relación alguna entre a y p pues puede ser $a = p, a > p$ o $a < p$.

89

ORDENAMIENTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Hemos visto en el número 34, que los números naturales son solamente símbolos que representan la sucesión fundamental de conjuntos finitos, y como en esta sucesión cada conjunto tiene **un elemento menos** que el siguiente, cada conjunto de la sucesión fundamental es

parcial con relación al siguiente, luego cada número natural que representa un conjunto dado es **menor** que el número que representa el conjunto siguiente. Por tanto,

$$0 < 1, 1 < 2, 2 < 3, 3 < 4, 4 < 5, \text{ etcétera.}$$

y combinando estas desigualdades, resulta:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 \dots$$

Vemos, pues, que los elementos de la serie natural de los números están ordenados en orden ascendente.

22

Ejercicio

- Reunir en una sola expresión $a = b, b > c, c > d$ y hallar la relación entre a y d .
R. $a = b > c > d; a > d$
- Combinar $a = m, m < n, n < p$ y hallar la relación final. **R. $a = m < n < p; a < p$**
- Combinar $7 > 5, 3 = 3, 5 > 3, 3 > 2$ y hallar la relación final. **R. $7 > 5 > 3 = 3 > 2; 7 > 2$**
- Combinar $x > y, z > p, q = p, q > r, y = z$ y hallar la relación final.
R. $x > y = z > p = q > r; x > r$
- Reunir en una sola expresión $c < d, e = f, d < e, f = g, h > g$ y hallar la relación final.
R. $c < d < e = f = g < h; c < h$
- Reunir en una sola expresión $b = c, c < d$ y $a > b$. ¿Puedes hallar la relación entre a y d ?
R. $a > b = c < d; \text{no.}$
- Combinar $m = n, p < q, q > r, n > p$. ¿Hay relación final? **R. $m = n > p < q > r; \text{no.}$**
- Combinar $x < y, z > y, p > z, a = x$. ¿Hay relación final? **R. $a = x < y < z < p; \text{sí, } a < p$**
- A es mayor que B , D es mayor que F y B es igual a D . ¿Cuál es mayor, A o F ? **R. A**
- M es menor que N , P es igual a Q , P es mayor que N y Q es menor que S . ¿Cómo es M con relación a S ? **R. $M < S$**
- A es mayor que B , D es mayor que E , H es igual a I , H es menor que F , F es igual a E , C es menor que B y D es igual a C . ¿Cómo es A con relación a I ? **R. $A > I$**
- Carlos dice a un amigo: Yo soy mayor que tú, tú eres mayor que Enrique, Pedro y Juan son gemelos, Sofía es más joven que Juan y Pedro es más joven que Enrique. ¿Cuál es el mayor?
R. Carlos.
- Pedro es más alto que Juan, Carlos más bajo que Enrique, Carlos más alto que Roberto y Enrique más bajo que Juan. ¿Quién es el más alto? **R. Pedro.**
- En un examen Rosa obtuvo menos puntos que María, Laura menos que Edelmira, Noemí igual que Sara, Rosa más que Carmelina, Laura igual que María y Noemí más que Edelmira. ¿Quién obtuvo más puntos de todas y quién menos? **R. Más puntos Sara y Noemí; menos puntos Carmelina.**



La primera operación aritmética que se conoció fue la suma. Para resolver esta operación siempre se recurría a elementos concretos, puesto que no se había llegado a un grado suficiente de abstracción matemática. En América, los incas, que

alcanzaron un elevado nivel de cultura, practicaban la suma haciendo nudos en unas cuerdas de vivos colores que iban juntando hasta formar el llamado **quipu**.

Capítulo VI

OPERACIONES ARITMÉTICAS: SUMA

90

OPERACIONES ARITMÉTICAS

Las operaciones aritméticas son siete: suma o adición, resta o sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

91

CLASIFICACIÓN

Las operaciones aritméticas se clasifican en operaciones de **composición o directas** y operaciones de **descomposición o inversas**.

La suma, la multiplicación y la potenciación son operaciones **directas** porque en ellas, conociendo ciertos **datos**, se halla un **resultado**.

La resta, la división, la radicación y la logaritmación son operaciones **inversas**.

La resta es inversa de la suma; la división es inversa de la multiplicación; la radicación y la logaritmación son inversas de la potenciación. Estas operaciones se llaman **inversas** porque en ellas, conociendo el **resultado** de la operación directa correspondiente y **uno de sus datos**, se halla el **otro dato**.

SUMA

SUMA DE CONJUNTOS

92

Sumar dos o más conjuntos (sumandos), que no tienen elementos comunes, es reunir en un solo conjunto (suma) todos los elementos que integran los conjuntos dados y sólo ellos.

Así, sumar los conjuntos

AB, MNP, QRS

es formar el conjunto *ABMNPQRS*, que contiene todos los elementos de los conjuntos dados y sólo ellos.

Sumar los conjuntos

...
...
.....

es formar el conjunto

Podemos, pues, decir que:

Conjunto suma de varios conjuntos dados (sumandos) que no tienen elementos comunes, es el conjunto que contiene todos los elementos de los conjuntos sumandos y sólo ellos.

Así, el conjunto **alumnos de bachillerato** de un colegio es el conjunto suma de los conjuntos **alumnos de 1^{er} año**, **alumnos de 2^o año**, **alumnos de 3^{er} año**, **alumnos de 4^o año** y **alumnos de 5^o año**.

.

SUMA DE NÚMEROS NATURALES

93

Suma de varios números naturales es el número cardinal del conjunto suma de los conjuntos cuyos números cardinales son los números dados.

Así, al sumar los conjuntos

..	cuyo número cardinal es	2
...	" " " "	3
y	" " " "	4

obtenemos el conjunto

.....

cuyo número cardinal es 9 (que se obtiene contando sus elementos). Por tanto, 9 es la suma de 2, 3 y 4, lo que se expresa:

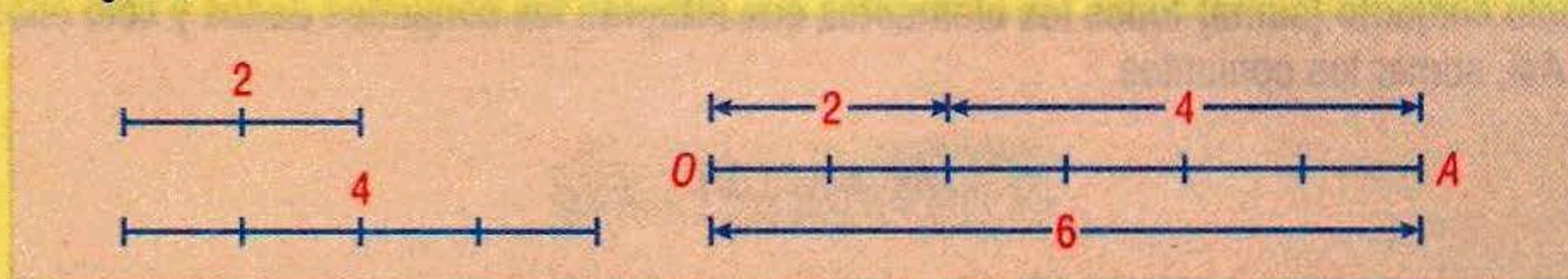
$$2 + 3 + 4 = 9$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SUMA

Ejemplos

- 1) Representar gráficamente la suma $2 + 4 = 6$.

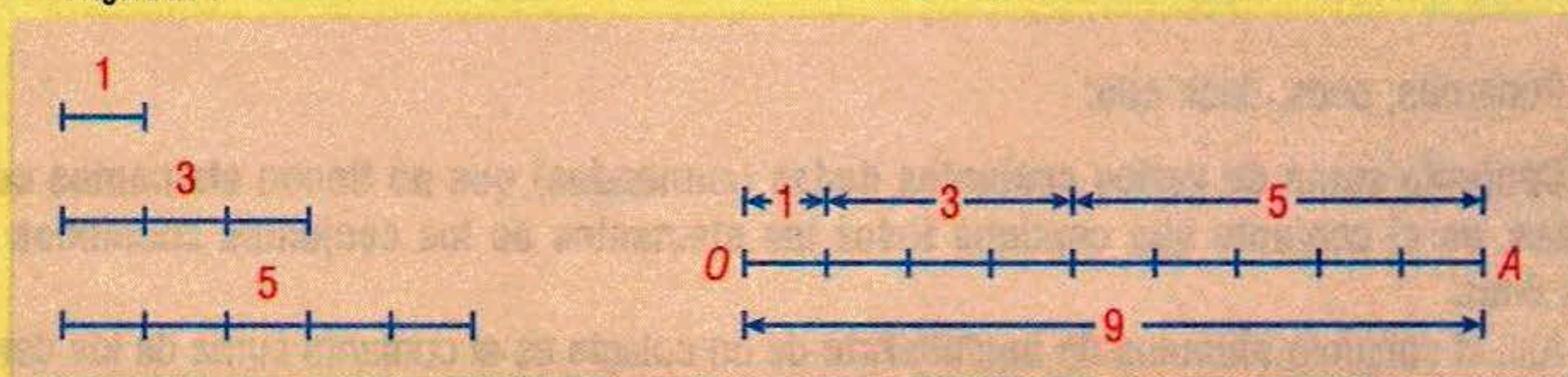
Figura 20



Se representan los sumandos (Fig. 20) por segmentos como se vio en el número 76 y se transportan los segmentos sumandos consecutivamente sobre una semirrecta a partir de su origen O . El segmento total que resulta $OA = 6$ es la representación gráfica de la suma $2 + 4 = 6$.

- 2) Representar gráficamente la suma $1 + 3 + 5 = 9$.

Figura 21



El segmento total $OA = 9$ (Fig. 21) es la representación gráfica de la suma $1 + 3 + 5 = 9$.

Ejercicio

- Formar el conjunto suma de los conjuntos de letras *al, mis, por*. **R. Almispor.**
- ¿Cuál es el conjunto suma de los conjuntos *alumnas* y *alumnos* de un colegio?
R. El conjunto formado por todos los alumnos del colegio.
- El Congreso de nuestro país es el conjunto suma de... **R. La Cámara de Diputados y el Senado.**
- ¿Qué es la provincia de La Habana con relación a los municipios de La Habana?
R. El conjunto suma.
- Si se juntan en una caja varios lápices azules, varios rojos y varios blancos, ¿qué se obtiene?
R. El conjunto suma.
- Representar con números la suma de los conjuntos de letras *Lima, mía, fe*. **R. 9**
- Formar el conjunto suma de los conjuntos de letras siguientes y hallar el número cardinal de la suma:
 - cabo, tuve*
 - mesa, pobre, fin*
 - libro, puse***R. cabotuve, 8; mesapobrefin, 12; libropuse, 9**

8. Representar gráficamente las sumas:

a) $3 + 4$

c) $2 + 5 + 6$

b) $5 + 8$

d) $1 + 4 + 2 + 7$

9. ¿Por dónde se empieza la adición y por qué?

10. ¿Cuándo se puede empezar la suma por cualquier columna?

11. Contar

De	5	en	5	desde el	6	al	36,	del	7	al	57,	del	8	al	53	
"	6	"	6	"	"	8	"	56,	"	9	"	63,	"	10	"	82
"	7	"	7	"	"	24	"	59,	"	25	"	95,	"	26	"	96
"	8	"	8	"	"	30	"	102,	"	31	"	111,	"	32	"	128
"	9	"	9	"	"	45	"	108,	"	46	"	136,	"	47	"	155
"	11	"	11	"	"	20	"	119,	"	21	"	153,	"	22	"	187
"	12	"	12	"	"	7	"	151,	"	6	"	174,	"	9	"	177
"	13	"	13	"	"	9	"	139,	"	13	"	143,	"	11	"	167

12. Escribir y sumar las cantidades siguientes: 3 unidades de tercer orden, 2 de segundo, 1 del primero; 4 del cuarto orden, 15 del primero; 14 del cuarto orden, 132 del primero.

13. Escribir y sumar las cantidades: 2 decenas de decenas, 6 unidades; 3 centenas, 8 decenas de centenas, 4 décimas de centenas; 5 millares de centenas, 6 decenas de décimas, 1 millar de centenas.

14. Escribir y sumar las cantidades: 8 unidades del quinto orden, 7 millares de centésimas; 4 centenas de millar, 2 milésimas de millar; 9 millares de millar, 4 decenas de centenas, 6 centésimas de millar; 8 millones de centenas, 5 centenas de centenas, 6 decenas de decenas.

CASOS PARTICULARES DE LA SUMA

95

1) **Sumando unidad.** Hemos visto (34) que el 1 representa los conjuntos de un solo elemento. Sumando conjuntos de un solo elemento, tenemos:

$$1 \text{ silla} + 1 \text{ silla} + 1 \text{ silla} = 3 \text{ sillas}$$

$$1 \text{ pera} + 1 \text{ pera} + 1 \text{ pera} = 3 \text{ peras}$$

Vemos, pues, que el número 3 es la suma de **tres** sumandos 1.

Del propio modo:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

o sea que el número 4 es la suma de **cuatro** sumandos 1 y en general:

$$a = 1 + 1 + 1 \dots (a \text{ sumandos } 1)$$

Por tanto, **cuando todos los sumandos son 1 la suma es igual al número de sumandos.**

2) **Sumando nulo. Módulo de la adición.** Sabemos que el 0 representa los conjuntos nulos o conjuntos que carecen de elementos.

Si a un conjunto cualquiera, por ejemplo, a un conjunto de n sillas, le sumamos un conjunto nulo, la suma será el mismo conjunto de n sillas. Por tanto, tenemos que:

$$n + 0 = n$$

El **0** es el único número que sumado con otro no lo altera. El **0** es el módulo de la suma.

96

LEYES DE LA SUMA

Las leyes de la suma son cinco: ley de uniformidad, ley conmutativa, ley asociativa, ley disociativa y ley de monotonía.

97

I. LEY DE UNIFORMIDAD

Esta ley puede enunciarse de tres modos que son equivalentes:

1) La suma de varios números dados tiene un valor único o siempre es igual.

$$3 \text{ sillas} + 4 \text{ sillas} = 7 \text{ sillas}$$

$$3 \text{ mesas} + 4 \text{ mesas} = 7 \text{ mesas}$$

$$3 \text{ días} + 4 \text{ días} = 7 \text{ días}$$

Vemos, pues que la suma de 3 y 4, cualquiera que sea la naturaleza de los conjuntos que ellos representen, siempre es 7.

2) Las sumas de números respectivamente iguales son iguales.

Si en cada aula de un colegio cada asiento está ocupado por un alumno de modo que no queda ningún alumno sin asiento ni ningún asiento vacío, tenemos que el número de alumnos de cada aula es igual al número de asientos del aula.

Si sumamos los números que representan los alumnos de cada una de las aulas, esta suma será igual a la suma de los números que representan los asientos de cada una de las aulas.

3) Suma de igualdades. Sumando miembro a miembro varias igualdades, resulta una igualdad.

Así, sumando miembro a miembro las igualdades

$$a = b$$

$$c = d$$

$$m = n$$

$$\text{resulta } a + c + m = b + d + n$$

II. LEY CONMUTATIVA

98

El orden de los sumandos no altera la suma.

Si en la suma

$$2 \text{ libros} + 3 \text{ libros} + 4 \text{ libros} = 9 \text{ libros}$$

cambiamos el orden de los conjuntos sumandos, el conjunto suma no varía, porque contiene el mismo número de elementos y así, tenemos:

$$3 \text{ libros} + 2 \text{ libros} + 4 \text{ libros} = 9 \text{ libros}$$

$$4 \text{ libros} + 3 \text{ libros} + 2 \text{ libros} = 9 \text{ libros}$$

Por tanto, podemos escribir que:

$$2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 4 + 3 + 2 = 2 + 4 + 3, \text{ etcétera.}$$

Ejemplo

III. LEY ASOCIATIVA

99

La suma de varios números no varía sustituyendo varios sumandos por su suma.

1) Si A tiene 5 años, B 6 años y C 8 años, sumando edades, tendremos:

$$5 \text{ años} + 6 \text{ años} + 8 \text{ años} = 19 \text{ años.}$$

El mismo resultado se obtiene si sumamos primero las edades de A y B, lo cual se indica incluyendo estas cantidades en un paréntesis, y a esta suma le añadimos la edad de C:

$$(5 \text{ años} + 6 \text{ años}) + 8 \text{ años} = 19 \text{ años}$$

11 años

porque en ambos casos el conjunto suma contendrá el mismo número de años. Luego tenemos que $5 + 6 + 8 = (5 + 6) + 8$.

2) Igualmente se tendrá:

$$3 + 4 + 5 + 6 = (3 + 4) + (5 + 6) = 3 + (4 + 5 + 6)$$

Ejemplos

PARÉNTESIS

100

Los paréntesis o signos de agrupación tienen cuatro formas:

() llamados **paréntesis ordinarios**.
 [] " **corchetes**.
 { } " **llaves**.
 — **vínculo o barra**.

SU USO COMO SIGNOS DE AGRUPACIÓN

101

Los paréntesis son signos de asociación o agrupación, pues se usan para asociar o agrupar los números indicando una operación. Cuando una operación se encierra en un paréntesis,

ello indica que dicha operación tiene que efectuarse primero, y con el resultado de ella se verifica la otra operación indicada.

Ejemplos

- 1) En la expresión $(3 + 4) + 6$ el paréntesis indica que primero se efectúa la suma $(3 + 4) = 7$ y este resultado se suma con 6:

$$(3 + 4) + 6 = 7 + 6 = 13 \quad \text{R.}$$

- 2) En $(2 + 5) + (6 + 4)$ los paréntesis indican que primero se efectúan las sumas $(2 + 5) = 7$ y $(6 + 4) = 10$ y luego se suman ambas:

$$(2 + 5) + (6 + 4) = 7 + 10 = 17 \quad \text{R.}$$

- 3) En la expresión $100 - [18 + (6 + 4)]$ los paréntesis indican que primero se efectúa $(6 + 4) = 2$, este resultado se suma con 18; $18 + 2 = 20$ y 20 se resta de 100:

$$100 - 20 = 80 \quad \text{R.}$$

102

IV. LEY DISOCIATIVA

La suma de varios números no se altera descomponiendo uno o varios sumandos en dos o más sumandos.

Esta ley es recíproca de la ley asociativa.

Ejemplos

- 1) En la suma $10 + 3$, puesto que $10 = 8 + 2$, tendremos que:

$$10 + 3 = 8 + 2 + 3$$

- 2) En la suma $12 + 15$, puesto que $12 = 9 + 3$ y $15 = 7 + 6 + 2$, tendremos:

$$12 + 15 = 9 + 3 + 7 + 6 + 2$$

SUMA DE IGUALDADES Y DESIGUALDADES

103

V. LEY DE MONOTONÍA

Consta de dos partes:

- 1) Sumando miembro a miembro desigualdades del mismo sentido con igualdades resulta una desigualdad del mismo sentido.

Ejemplos

- 1) Siendo

$$8 > 3$$

$$5 = 5$$

resulta $8 + 5 > 3 + 5$

$$13 > 8$$

- 2) Siendo

$$a < b$$

$$c = d$$

$$e < f$$

$$g = h$$

resulta $a + c + e + g < b + d + f + h$

2) Sumando miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

1) Siendo

$$\begin{array}{r} 5 > 3 \\ 4 > 2 \\ \hline \text{resulta } 5 + 4 > 3 + 2 \\ 9 > 5 \end{array}$$

2) Siendo

$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \\ e < f \\ \hline \text{resulta } a + c + e < b + d + f \end{array}$$

Ejemplos

Nota

Si se suman desigualdades de sentido contrario, el resultado no puede anticiparse, pudiendo ser una desigualdad o una igualdad.

1)

$$\begin{array}{r} 8 > 3 \\ 5 < 12 \\ \hline 8 + 5 < 3 + 12 \\ 13 < 15 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r} 5 < 7 \\ 8 > 2 \\ \hline 5 + 8 > 7 + 2 \\ 13 > 9 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r} 5 < 9 \\ 6 > 2 \\ \hline 5 + 6 = 9 + 2 \\ 11 = 11 \end{array}$$

Ejemplos

24

Ejercicio

1. ¿Cuál es el módulo de la adición? ¿Por qué?

R. El 0, porque sumado con otro número no lo altera.

2. ¿Cuándo la suma es igual a un sumando?

R. Cuando todos los sumandos menos uno son 0.

3. ¿Cuándo la suma es igual al número de sumandos?

R. Cuando todos los sumandos son 1.

4. Si P es la suma de P sumandos, ¿cuáles son los sumandos?

R. Todos son 1

5. Sumar las igualdades:

a) $\begin{cases} 6 = 6 \\ a = b \end{cases}$

b) $\begin{cases} m = n \\ p = q \end{cases}$

c) $\begin{cases} c = d \\ a = 3 \\ m = n \end{cases}$

d) $\begin{cases} a = b + c \\ m + n = p \end{cases}$

R. a) $6 + a = 6 + b$ b) $m + p = n + q$ c) $c + a + m = d + 3 + n$

d) $a + m + n = b + c + p$

6. Aplicar la ley de uniformidad a las igualdades:

a) $\begin{cases} a = 3 + 1 \\ 6 = b + c \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = z \\ 5 + 6 = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a + b = c + d \\ 18 = m + n \\ x = 9 + y \end{cases}$

R. a) $a + 6 = 4 + b + c$ b) $x + y + 11 = z + 11$

c) $a + b + 18 + x = c + d + m + n + 9 + y$

7. Si $a + b + c = S$, ¿cuál será la suma de $b + c + a$? ¿Por qué?

R. S , por la ley conmutativa.

8. $m + n + p + q = p + q + m + n = m + q + p + n$ por...

R. La ley conmutativa.

9. Aplicar la ley conmutativa a la suma $a + b + c$ escribiéndola de 6 modos distintos.
R. $a + b + c, a + c + b, b + a + c, b + c + a, c + a + b, c + b + a$
10. La suma $2 + 3 + 5 + 6$ se puede escribir de 24 modos distintos aplicando la ley... Escribirla de 12 modos distintos. **R.** Conmutativa; $2 + 3 + 5 + 6, 2 + 3 + 6 + 5, 2 + 6 + 5 + 3, 2 + 6 + 3 + 5, 2 + 5 + 3 + 6, 2 + 5 + 6 + 3$, etcétera.
11. $2 + 3 + 4 = 5 + 4$ por la ley... **R.** Asociativa.
12. Siendo $m + n + p = q$ podremos escribir que $(m + n) + p = q$ por la ley... **R.** Asociativa.
13. Siendo $m + n + p = q$ y $(m + n) = a$ podremos escribir por la ley asociativa que... **R.** $a + p = q$
14. Escribir la suma $6 + 5 + 4$ de tres modos distintos aplicando la ley asociativa.
R. $(6 + 5) + 4, (6 + 4) + 5, 6 + (5 + 4)$
15. Escribir la suma $1 + 2 + 3 + 4$ de 6 modos distintos aplicando la ley asociativa. **R.** $(1 + 2) + 3 + 4, (1 + 3) + 2 + 4, (1 + 4) + 2 + 3, (2 + 3) + (1 + 4), (2 + 4) + (1 + 3), (3 + 4) + (1 + 2)$
16. Puesto que $8 = 5 + 3$ tendremos que $8 + 6 = \dots$ por la ley disociativa. **R.** $8 + 6 = 5 + 3 + 6$
17. Transformar la suma $9 + 7$ en una suma equivalente de 4 sumandos. ¿Qué ley se aplica?
R. $5 + 4 + 6 + 1$; la ley disociativa.
18. Aplicar la ley... a la suma $15 + 10 + 8$ para transformarla en una suma de 9 sumandos.
R. Disociativa: $2 + 4 + 9 + 1 + 7 + 2 + 4 + 3 + 1$.
19. Efectuar las operaciones siguientes:
- $8 + (5 + 3)$
 - $(4 + 3) + (5 + 6)$
 - $3 + (2 + 1) + (4 + 6 + 5)$
 - $(9 + 4) + 3 + (6 + 1) + (7 + 5)$
 - $(12 + 15) + (3 + 2 + 1) + 4 + (5 + 3 + 2 + 8)$
 - $15 + [9 - (3 + 2)]$
 - $150 - [18 + (5 - 3) + (6 - 2)]$
- R.** a) 16 b) 18 c) 21 d) 35 e) 55 f) 19 g) 126
20. Sumar las desigualdades:
- $\begin{cases} 5 > 3 \\ 11 > 9 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 11 < 13 \\ 7 < 10 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3 > 2 \\ 5 > 1 + 3 \\ 8 > 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a < b \\ m < n + p \\ q + r < s \end{cases}$
- R.** a) $16 > 12$ b) $18 < 23$ c) $16 > 9$ d) $a + m + q + r < b + n + p + s$
21. Aplicar la ley de monotonía en:
- $\begin{cases} a = b \\ c > d \end{cases}$
 - $\begin{cases} 8 = a \\ 9 > 5 \end{cases}$
 - $\begin{cases} m = n \\ p > q \\ r = s \end{cases}$
 - $\begin{cases} a < b \\ c = d \\ e = f \\ p + q < 10 \end{cases}$
- R.** a) $a + c > b + d$ b) $17 > 5 + a$ c) $m + p + r > n + q + s$
 d) $a + c + e + p + q < b + d + f + 10$

PRUEBAS Y COMPROBACIONES

104

La prueba de la suma puede verificarse de tres modos:

- 1) **Por la ley conmutativa.** Como según esta ley el orden de los sumandos no altera la suma, se suman los sumandos de abajo hacia arriba y esta suma tiene que ser igual a la obtenida sumando de arriba a abajo, si la operación está correcta.

164,780	prueba	Ejemplo
1,234		
+ 5,659		
84,325		
73,562		
164,780		

- 2) **Por la ley asociativa.** Como según esta ley la suma no se altera sustituyendo varios sumandos por su suma, se verifican sumas parciales con los sumandos, y la suma de estas sumas parciales tiene que ser igual a la suma total.

3,184	}	3,399	Ejemplo
215	}		
+ 729	}		
6,134	}	16,181	
9,318	}		
19,580	}	19,580	

- 3) **Por la prueba del 9.** Véase el número 272.

ALTERACIONES DE LOS SUMANDOS

105

- 1) **Si un sumando aumenta o disminuye un número cualquiera, la suma aumenta o disminuye el mismo número.**

En efecto: el conjunto suma es la **reunión** de los elementos de los conjuntos sumandos. Si los elementos de uno de los conjuntos sumandos aumentan o disminuyen y el conjunto suma no aumenta o disminuye en el mismo número de elementos, la suma no sería la reunión de los elementos de los sumandos, o sea, que no sería suma.

$8 + 3 = 11$ $(8 + 2) + 3 = 11 + 2 = 13$ $(8 - 2) + 3 = 6 + 3 = 9$	Ejemplo
--	---------

- 2) Si un sumando aumenta un número cualquiera y otro sumando disminuye el mismo número, la suma no varía.**

En efecto: al aumentar un conjunto sumando en un número cualquiera de elementos la suma aumenta en el mismo número de elementos, pero al disminuir otro conjunto sumando en el mismo número de elementos, la suma disminuye el mismo número de elementos que había aumentado, luego no varía.

25

Ejercicio

- ¿Qué alteración sufre una suma si un sumando aumenta 6 unidades y otro aumenta 8?
R. Aumenta 14 unidades.
- $a + b + c = 10$. ¿Cuál sería la suma si a aumenta 3, b aumenta 5 y c aumenta 10? **R. 28**
- $m + n = 52$. ¿Cuál será la suma si m disminuye 4 y n disminuye 6? **R. 42**
- $x + a = 59$. ¿Cuál será la suma si x aumenta 8 y a disminuye 8? **R. 59**
- $x + b = 1,516$. ¿Cuál será la suma si x disminuye 35 y b aumenta 86? **R. 1,567**
- $a + b + c = 104$. ¿Cuál será la suma $(a + 5) + (b - 8) + (c + 9)$? **R. 110**
- Un sumando aumenta 56 unidades y hay tres sumandos que disminuyen 6 cada uno. ¿Qué le sucede a la suma? **R. Aumenta 38 unidades.**
- Un sumando disminuye 6, otro 4, otro 7 y otros tres aumentan cada uno 5. ¿Qué le sucede a la suma? **R. Disminuye 2 unidades.**
- $5 + a + 9 = 20$. Hallar:

a) $7 + a + 9 = \dots$	c) $8 + a + 12 = \dots$	e) $11 + (a - 3) + 9 = \dots$
b) $4 + a + 6 = \dots$	d) $5 + (a - 2) + 9 = \dots$	f) $5 + (a + b) + 9 = \dots$

R. a) 22 b) 16 c) 26 d) 18 e) 23 f) $20 + b$
- $a + x + 19 = 80$. Hallar el valor de m cuando:

a) $(a - 4) + (x + 5) + m = 80$	c) $(a + 5) + (x + 2) + m = 80$
b) $(a + 4) + (x - 6) + m = 80$	d) $(a - 3) + (x - 4) + m = 80$

R. a) 18 b) 21 c) 12 d) 26

26

Ejercicio

- ¿Cuánto costó lo que al venderse en \$12,517 deja una pérdida de \$1,318? **R. \$13,835**
- ¿A cómo hay que vender lo que ha costado 9,309,000 bolívars para ganar 1,315,000?
R. 10,624,000 bolívars.
- Después de vender una casa perdiendo \$31,840, presté \$20,060 y me quedé con \$151,840. ¿Cuánto me había costado la casa? **R. \$203,740**
- El menor de 4 hermanos tiene 21 años y cada uno le lleva 2 años al que le sigue. ¿Cuál es la suma de las edades? **R. 96 años.**
- Hallar la edad de un padre que tiene 15 años más que la suma de las edades de 4 hijos que tienen, el 4º, 3 años; el 3º, 1 año más que el 4º; el 2º, 3 años más que el 3º, y el 1º tanto como los otros juntos. **R. 43 años.**

6. Una casa de comercio ganó en 2001, \$32,184; en 2002, \$14,159 más que el año anterior; en 2003 tanto como en los dos años anteriores juntos; en 2004 tanto como en los tres años anteriores y en 2005, \$12,136 más que lo que ganó en 2002 y 2004. ¿Cuánto ha ganado en los cinco años? **R. \$529,641**
7. Si ganara \$560 menos al mes podría gastar \$350 en alquiler, \$400 en manutención, \$180 en colegio para mis hijos, \$590 en otros gastos y podría ahorrar \$320 al mes. ¿Cuánto gano al mes? **R. \$2,400**
8. Para trasladarse de una ciudad a otra una persona ha recorrido: 38 millas en auto; a caballo 34 millas más que en auto; en ferrocarril 316 millas más que en auto y a caballo; y en avión 312 millas. Si todavía le faltan 516 millas para llegar a su destino, ¿cuál es la distancia entre las dos ciudades? **R. 1,364 millas.**
9. La superficie de la provincia de Matanzas excede en 223 km^2 a la superficie de La Habana; Pinar del Río tiene $5,056 \text{ km}^2$ más que Matanzas; Las Villas tiene $7,911 \text{ km}^2$ más que Pinar del Río; Camagüey $4,687 \text{ km}^2$ más que Las Villas y Oriente $10,752 \text{ km}^2$ más que Camagüey. Si la superficie de la provincia de La Habana es $8,221 \text{ km}^2$, ¿cuál es la superficie de Cuba? **R. $114,524 \text{ km}^2$**
10. ¿Cuál será la población de un país constituido por seis estados: A, B, C, D, E y F sabiendo que A tiene 52,642 habitantes más que B; C 169,834 habitantes más que A; D 411,906 habitantes más que C; E 508,641 habitantes más que D; que B tiene 395,780 habitantes y que F tiene 258,803 habitantes más que E? **R. 5,829,029 habitantes.**
11. Un hombre que nació en 1951 se casó a los 25 años; 3 años después nació su primer hijo y murió cuando el hijo tenía 27 años. ¿En qué año murió? **R. En 2006.**
12. Compré un libro que me costó \$160; un traje que me costó \$350; una cámara fotográfica que me costó \$420 más que el libro y el traje juntos; un anillo que me costó \$130 más que el libro, el traje y la cámara; y un auto que me costó \$12,350 más que todo lo anterior. Si me sobran \$2,110, ¿cuánto dinero tenía? **R. \$20,480**
13. Roberto Hernández acabó el bachillerato a los 15 años; se graduó de abogado 6 años después; se casó 5 años después; se embarcó para México 7 años después y 12 años después obtuvo una cátedra. Si Roberto tuviera 12 años más habría nacido en 1949. ¿En qué año obtuvo su cátedra? **R. En 2006.**
14. Cada uno de 6 hermanos recibió por herencia \$31,600 más que el anterior por orden de edad, y el menor recibió \$1,013,200. Se pagó un legado de \$561,400 y se separaron \$41,500 para gastos. ¿A cuánto ascendía la herencia? **R. \$7,156,100**
15. En reparar un auto se gastaron \$8,600; en ponerle neumáticos \$6,200; en pintura \$1,900 y al venderlo en \$13,600 menos que el costo se recibieron \$85,400. ¿Cuánto costó en total el auto? **R. \$115,700**
16. Un auto abierto costó \$98,400; uno cerrado \$19,500 más que el abierto, y un camión tanto como los dos autos juntos. En chapas se gastaron \$5,600 y en bocinas \$3,500 más que en las chapas. ¿En cuánto se vendieron si se obtuvo una ganancia de \$120,000? **R. \$567,300**



El signo más antiguo para indicar la resta lo encontramos en el famoso **papiro de Rhind**, tal como lo escribían los egipcios (✓). Se cuenta que los signos actuales de suma y resta se deben a que los mercaderes antiguos hacían marcas en los

bultos de mercancías: cuando pesaban los sacos les ponían un signo más (+) o un signo (−), según tuvieran mayor o menor cantidad de la estipulada.

Capítulo VII

RESTA O SUSTRACCIÓN

106

RESTA. SU OBJETO COMO INVERSA DE LA SUMA

La resta es una operación inversa de la suma que tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos (minuendo) y uno de ellos (sustraendo), hallar el otro sumando (resta, exceso o diferencia).

El signo de la resta es − colocado entre el sustraendo y el minuendo.

Siendo a el minuendo, b el sustraendo y d la diferencia, tendremos la notación:

$$a - b = d$$

De acuerdo con la definición de resta, la diferencia sumada con el sustraendo tiene que dar el minuendo.

Así, en la resta $9 - 4 = 5$ se tiene que $5 + 4 = 9$

y en $8 - 2 = 6$ se tiene que $6 + 2 = 8$

En general, siendo $a - b = d$ se tendrá que $b + d = a$

107

¿POR QUÉ LA RESTA ES INVERSA DE LA SUMA?

La resta es inversa de la suma porque en ésta, dados los sumandos, hay que hallar su suma, mientras que en la resta, dada la suma de dos sumandos y uno de ellos, se halla el otro sumando.

PRUEBAS

108

La prueba de la resta puede verificarse de tres modos:

- 1) Sumando el sustraendo con la diferencia, debiendo dar el minuendo.

$\begin{array}{r} 93,254 \\ - 58,076 \\ \hline 35,178 \end{array}$	Prueba:	$\begin{array}{r} 58,076 \text{ s} \\ + 35,178 \text{ d} \\ \hline 93,254 \text{ m} \end{array}$
--	---------	--

Ejemplo

- 2) Restando la diferencia del minuendo, debiendo dar el sustraendo.

$\begin{array}{r} 15,200 \\ - 13,896 \\ \hline 1,304 \end{array}$		$\begin{array}{r} 15,200 \text{ m} \\ - 1,304 \text{ d} \\ \hline 13,896 \text{ s} \end{array}$
---	--	---

Ejemplo

- 3) Por la prueba del 9. (Véase el número 274).

1. ¿Por qué la resta se empieza por la derecha?
2. ¿En qué caso es indiferente comenzar la resta por cualquier columna?
3. Si el sustraendo se suma con la diferencia, se obtiene... **R. El minuendo.**
4. Si se resta la diferencia del minuendo, se obtiene... **R. El sustraendo.**
5. Si se suma el minuendo con el sustraendo y la diferencia, se obtiene...
R. El doble del minuendo.
6. Si del minuendo se resta la diferencia y de esta resta se quita el sustraendo, se obtiene...
R. 0
7. Restando del minuendo la suma del sustraendo y la diferencia, se obtiene... **R. 0**
8. Siendo $m + n = p$, se tendrá que m es... de n y p que n es... entre p y m .
R. La diferencia; la diferencia.
9. Siendo $m - n = p$ se verifica que $n = \dots$ y $m = \dots$ **R. $n = m - p$, $m = p + n$**
10. Si $a + b = c$ se verifica que $b = \dots$ y $a = \dots$ **R. $b = c - a$, $a = c - b$**
11. $56 + n = 81$, ¿qué número es n ? **R. $n = 25$**
12. $a - 315 = 618$, ¿qué número es a ? **R. $a = 933$**
13. $a - x = 36$ y $a = 85$, ¿qué número es x ? **R. $x = 49$**

27

Ejercicio

14. $a - b = 14$ y $a - 14 = 36$, ¿qué número es b ? **R. $b = 36$**
15. $a - 36 = 81$, ¿qué número es a ? **R. $a = 117$**
16. $a - m = 5$ y $a + m + 5 = 12$, ¿qué número es m ? **R. $m = 1$**
17. $a - b = c$. Siendo $b + c = 30$ y $a - c = 13$, ¿qué número es c ? **R. $c = 17$**
18. Restar sucesivamente: 3, 4, 5, 7, 8 de cada uno de los números 24, 32, 45, 65, 72, 83, 97.
19. Restar sucesivamente: 11, 12, 13, 14, 15 de cada uno de los números 54, 65, 76, 87, 98, 110.
20. Hallar la diferencia entre 4 millones, 17 decenas de millar, 34 decenas y 6 centenas de decenas, 8 decenas de decena, 14 unidades.
21. Hallar la diferencia entre dos números formados de este modo: el primero 9 unidades de séptimo orden, 6 de cuarto orden y 8 de tercero y el segundo, 14 unidades de quinto orden, 6 de cuarto orden, 5 de tercero y 8 de primero.

28

Ejercicio

1. Si el minuendo es 342 y el resto 156, ¿cuál es el sustraendo? **R. 186**
2. Si el sustraendo es 36,815 y el resto 9,815, ¿cuál es el minuendo? **R. 46,630**
3. Tenía \$9,180. Compré un traje y me quedaron \$8,680. ¿Cuánto me costó el traje? **R. \$500**
4. Después de gastar \$319 me quedaron \$615 ¿Cuánto tenía al principio? **R. \$934**
5. Si tuviera 35 caballos más de los que tengo tendría 216. ¿Cuántos caballos tiene mi hermano si el número de los míos excede al número de los suyos en 89? **R. 92**
6. Si recibiera \$14,500 podría comprarme un auto de \$56,000. ¿Cuánto tengo ahora? **R. \$41,500**
7. La suma de dos números es 518 y el mayor es 312. Hallar el menor. **R. 206**
8. El doble del menor de dos números es 618 y la suma de ambos 14,673. Hallar el número mayor. **R. 14,364**
9. El triple de la suma de dos números es 63 y el doble del menor, 20. Hallar el mayor. **R. 11**
10. El mayor de dos números es 9,876 y la diferencia entre ambos es 3,456. Hallar el menor. **R. 6,420**
11. El menor de dos números es 12,304 y la diferencia entre ambos 1,897. Hallar el mayor. **R. 14,201**
12. La diferencia de dos números es 8 y el mayor excede a la diferencia en 12. Hallar el mayor. **R. 20**
13. La suma de dos números es 150 y la mitad del mayor 46. Hallar el menor. **R. 58**
14. La diferencia de dos números es 1,400 y el doble del menor 1,200. Hallar el mayor. **R. 2,000**

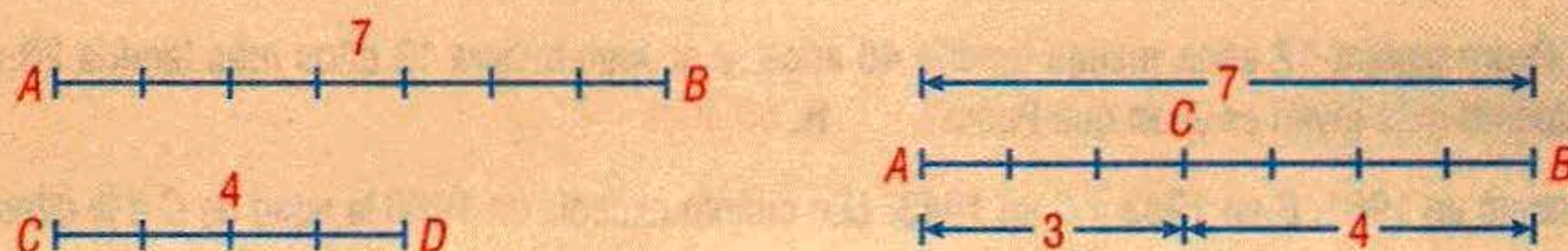
15. El menor de dos números es 36 y el doble del exceso del mayor sobre el menor es 84. Hallar el mayor. **R. 78**
16. En cuánto excede la suma de 756 y 8,134 a la diferencia entre 5,234 y 1,514? **R. En 5,170**
17. Al vender una casa en \$1,213,800 gané \$181,500. ¿Cuánto me costó la casa?
R. \$1,032,300
18. Si Pedro tuviera 12 años menos tendría 48 años, y si Juan tuviera 13 años más tendría 23 años. ¿Cuánto más joven es Juan que Pedro? **R. 50 años.**
19. A nació en 1961, B en 1983 y C en 1943. ¿En cuánto excedía en 1986 la edad de C a la diferencia de las edades de A y B? **R. 21 años.**
20. Vendí mi auto en \$165,400, ganando \$31,900. Si al vender otro auto en \$83,500 perdí \$16,400, ¿cuál me costó más y cuánto más? **R. Mi auto, \$336 más.**
21. A tiene 15 años; B, 2 años más que A; C, 5 años menos que A y B juntos, y D, 9 años menos que los tres anteriores juntos. ¿Cuál es la suma de las cuatro edades? **R. 109 años.**
22. Tenía \$305,400. Compré un auto y me quedé con \$196,500. Entonces recibí \$87,300, compré un solar y me quedaron \$73,200. ¿Cuánto me costó el auto y cuánto el solar? **R. Auto, \$108,900; solar, \$210,600**
23. El lunes deposité 500,000 bolívares en el banco, el martes retiré 256,000, el miércoles retiré otros 96,000 y el jueves deposité 84,000. Si retiré 45,000, ¿cuánto me queda en el banco?
R. 187,000 bolívares.
24. Si vendo un caballo en \$84,000, ganando \$18,000, ¿cuánto me costó? **R. \$66,000**
25. Compré una casa por \$125,000 y un automóvil por \$80,000. Vendí la casa en \$125,640 y el automóvil en \$116,760. ¿Gané o perdí, y cuánto? **R. Gané \$37,400**
26. Tenía 4,500,000 bolívares; presté 872,000, pagué una deuda y me quedaron 1,345,000. ¿Cuánto debía? **R. 2,283,000 bolívares.**
27. Un hombre deja 950,000 córdobas para repartir entre sus tres hijos y su esposa. El hijo mayor debe recibir 230,000; el segundo 50,000 menos que el mayor; el tercero tanto como los dos primeros y la esposa lo restante. ¿Cuánto recibió ésta? **R. 130,000 córdobas.**
28. Enrique compra un auto y más tarde lo vende por \$54,000, perdiendo \$8,500. Si entonces gana en un negocio \$23,000, ¿cuánto más tiene ahora que antes de comprar el auto? **R. \$14,500**
29. Si la diferencia de dos números es 14,560 y el doble del mayor 60,000, ¿en cuánto excede el número 76,543 a la diferencia de los dos números? **R. En 61,103**
30. Un comerciante pide 3,000 kg de mercancías. Primero le mandan 854 kg, más tarde 123 kg menos que la primera vez y después 156 kg más que la primera vez. ¿Cuánto falta por enviarle?
R. 405 kg
31. Si me sacara 2,500,000 colones en la lotería tendría 5,634,000. Si mi hermano tiene 936,000 menos que yo, y mi prima 893,000 menos que mi hermano y yo juntos, ¿cuánto tenemos entre los tres? **R. 9,771,000 colones.**

109 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA RESTA

Ejemplo

Representar gráficamente la diferencia $7 - 4$.

Figura 22



Se representa el minuendo (Fig. 22) por un segmento $AB = 7$ y el sustraendo por un segmento $CD = 4$. Se transporta el segmento sustraendo CD sobre el segmento minuendo AB de modo que coincidan dos de sus extremos; en la figura se ha hecho coincidir D con B . El segmento $CA = 3$ representa la diferencia $7 - 4$.

29

Efectuar gráficamente:

Ejercicio

1. $3 - 1$

2. $4 - 3$

3. $5 - 2$

4. $6 - 4$

5. $8 - 3$

6. $9 - 2$

7. $10 - 3$

8. $18 - 7$

9. $9 - 9$

110 LEYES DE LA RESTA

Las leyes de la resta son dos: la ley de la uniformidad y la ley de monotonía.

111 I. LEY DE UNIFORMIDAD

Esta ley puede enunciarse de dos modos que son equivalentes:

1) **La diferencia de dos números tiene un valor único o siempre es igual.** Así, la diferencia $7 - 2$ tiene un valor único $7 - 2 = 5$, porque 5 es el único número que sumado con 2 da 7.

$11 - 3 = 8$ únicamente porque 8 es el único número que sumado con 3 da 11.

2) Puesto que dos números iguales son el mismo número, se tiene que: **restando miembro a miembro dos igualdades, resulta otra igualdad.**

Así, siendo

$$\begin{array}{r} a = 3 \\ 5 = b \\ \hline \text{resulta } a - 5 = 3 - b \end{array}$$

RESTA DE IGUALDADES Y DESIGUALDADES

II. LEY DE MONOTONÍA

112

Esta ley consta de tres partes:

- 1) Si de una desigualdad (minuendo) se resta una igualdad (sustraendo), siempre que la resta se pueda efectuar, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.

$$\begin{array}{r} 8 > 5 \\ 2 = 2 \\ \hline 8 - 2 > 5 - 2 \\ 6 > 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 < 7 \\ 4 = 4 \\ \hline 6 - 4 < 7 - 4 \\ 2 < 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a > b \\ c = d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$$

Ejemplos

- 2) Si de una igualdad (minuendo) se resta una desigualdad (sustraendo), siempre que la resta se pueda efectuar, resulta una desigualdad de sentido contrario que la desigualdad sustraendo.

$$\begin{array}{r} 9 = 9 \\ 5 > 3 \\ \hline 9 - 5 < 9 - 3 \\ 4 < 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 = 8 \\ 2 < 7 \\ \hline 8 - 2 > 8 - 7 \\ 6 > 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$$

Ejemplos

- 3) Si de una desigualdad se resta otra desigualdad de sentido contrario, siempre que la resta sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.

$$\begin{array}{r} 7 > 4 \\ 2 < 3 \\ \hline 7 - 2 > 4 - 3 \\ 5 > 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 < 8 \\ 2 > 1 \\ \hline 3 - 2 < 8 - 1 \\ 1 < 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a < b \\ c > d \\ \hline a - c < b - d \end{array}$$

Ejemplos

Nota

Si se restan miembro a miembro dos desigualdades del **mismo sentido**, el resultado no puede anticiparse, pues puede ser una desigualdad del mismo sentido que las dadas o de sentido contrario o una igualdad.

$$\begin{array}{r} 9 > 4 \\ 7 > 3 \\ \hline 9 - 7 > 4 - 3 \\ 2 > 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 > 5 \\ 7 > 2 \\ \hline 8 - 7 < 5 - 2 \\ 1 < 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 < 8 \\ 4 < 7 \\ \hline 5 - 4 = 8 - 7 \\ 1 = 1 \end{array}$$

Ejemplos

30

Ejercicio

1. Si $a - m = p$ y $b = a$ y $c = m$, ¿qué se verifica, según la ley de uniformidad? **R. $b - c = p$**
2. Siendo $m = n$ y $p = q$, ¿qué se puede escribir según la ley de uniformidad? **R. $m - p = n - q$**
3. Aplicar la ley de uniformidad en:

$$a) \begin{cases} a = b \\ 3 = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5 = 5 \\ m = n \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = y \\ p = q \end{cases}$$

R. a) $a - 3 = b - 3$ b) $5 - m = 5 - n$ c) $x - p = y - q$

4. Si en el aula Martí hay el mismo número de alumnos que en el aula Juárez y de cada una se retiran 10 alumnos, ¿qué sucederá y por cuál ley?

R. Quedará igual número de alumnos en ambas, por la ley de uniformidad.

5. Escribir lo que resulta restando c de ambos miembros de $a + b = d + f$.

R. $a + b - c = d + f - c$

6. Restar m de ambos miembros de $a + m = b + m$ **R. $a = b$**

7. Aplicar la ley de monotonía en:

$$a) \begin{cases} 7 > 5 \\ a = b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a > b \\ 5 = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} m < n \\ c = d \end{cases}$$

R. a) $7 - a > 5 - b$ b) $a - 5 > b - 5$ c) $m - c < n - d$

8. Aplicar la ley de monotonía en:

$$a) \begin{cases} a = b \\ 3 > 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} m = n \\ 6 < 9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = y \\ b > d \end{cases}$$

R. a) $a - 3 < b - 2$ b) $m - 6 > n - 9$ c) $x - b < y - d$

9. Aplicar la ley de monotonía en:

$$a) \begin{cases} 8 > 5 \\ 2 < 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a < b \\ 4 > 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} m < n \\ x > y \end{cases}$$

R. a) $6 > 2$ b) $a - 4 < b - 2$ c) $m - x < n - y$

10. ¿Qué se obtiene restando $c < d$ de $a < b$ y $m > n$ de $b > c$? **R. No se puede saber.**
11. Pedro es hoy dos años mayor que su hermano. Hace 5 años, ¿quién era el mayor? ¿Qué ley se aplica? **R. Pedro; la ley de monotonía.**
12. María y Rosa tienen la misma edad. La edad que tenía María hace 5 años, ¿era mayor o menor que la que tenía Rosa hace 7 años? ¿Por qué? **R. Mayor; por la ley de monotonía.**
13. A y B tienen el mismo dinero. Si A perdiera \$8 y B \$7, ¿quién se quedaría con más dinero? ¿Por qué? **R. B; por la ley de monotonía.**
14. A es más joven que B. ¿Quién era mayor, A hace 10 años o B hace 7 años? ¿Qué ley se aplica? **R. B; por la ley de monotonía.**

15. El pastor Carlos tiene más ovejas que el pastor Enrique. Si a Enrique se le mueren más ovejas que a Carlos, ¿quién se queda con más ovejas? ¿Qué ley se aplica? **R. Carlos; ley de monotonía.**
16. A tiene más dinero que B. Si A gastara más que B, ¿quién se quedaría con más dinero? **R. No se sabe.**
17. Carlos es el hermano menor de Roberto. ¿Quién era mayor, Carlos hace 4 años o Roberto hace 9 años? **R. No se sabe.**

ALTERACIONES DEL MINUENDO Y EL SUSTRANDO

113

- 1) Si el minuendo aumenta o disminuye un número cualquiera y el sustraendo no varía, la diferencia queda aumentada o disminuida en el mismo número.**

En efecto: sabemos que el minuendo es la suma de dos sumandos que son el sustraendo y la diferencia. Si el minuendo, que es la suma, aumenta o disminuye un número cualquiera, y uno de los sumandos, el sustraendo, no varía, el otro sumando, la diferencia, necesariamente tiene que aumentar o disminuir el mismo número, porque si no el minuendo no sería la suma del sustraendo y la diferencia.

$$\begin{aligned}9 - 7 &= 2 \\(9 + 3) - 7 &= 2 + 3 \\12 - 7 &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8 - 5 &= 3 \\(8 - 2) - 5 &= 3 - 2 \\6 - 5 &= 1\end{aligned}$$

Ejemplos

- 2) Si el sustraendo aumenta o disminuye un número cualquiera y el minuendo no varía, la diferencia disminuye en el primer caso y aumenta en el segundo el mismo número.**

En efecto: si el sustraendo, que es uno de los sumandos, aumenta o disminuye un número cualquiera y el minuendo, que es la suma, no varía, el otro sumando, la diferencia, tiene que disminuir en el primer caso y aumentar en el segundo el mismo número, porque si no la suma o minuendo variaría.

$$\begin{aligned}10 - 3 &= 7 \\10 - (3 + 5) &= 7 - 5 \\10 - 8 &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}15 - 9 &= 6 \\15 - (9 - 4) &= 6 + 4 \\15 - 5 &= 10\end{aligned}$$

Ejemplos

- 3) Si el minuendo y el sustraendo aumentan o disminuyen a la vez un mismo número, la diferencia no varía.**

En efecto: al aumentar el minuendo cualquier número de unidades la diferencia aumenta el mismo número, pero al aumentar el sustraendo el mismo número, la diferencia disminuye el mismo número, luego no varía.

Del propio modo, al disminuir el minuendo un número cualquiera de unidades, la diferencia disminuye en el mismo número, pero al disminuir el sustraendo el mismo número de unidades, la diferencia aumenta el mismo número, luego no varía.

Ejemplos

$$15 - 6 = 9$$

$$(15 + 2) - (6 + 2) = 9$$

$$17 - 8 = 9$$

$$17 - 11 = 6$$

$$(17 - 3) - (11 - 3) = 6$$

$$14 - 8 = 6$$

31

Ejercicio

- ¿Qué alteración sufre una resta si el minuendo aumenta 8 unidades; si disminuye 14 unidades?
R. Aumenta 8 unidades; disminuye 14 unidades.
- ¿Qué alteración sufre una resta si el sustraendo aumenta 4 unidades; si disminuye 5?
R. Disminuye 4 unidades; aumenta 5 unidades.
- ¿Qué alteración sufre una resta si el minuendo aumenta 8 unidades y el sustraendo aumenta otras 8 unidades? **R. Ninguna.**
- ¿Qué alteración sufre una resta si el minuendo disminuye 40 unidades y el sustraendo aumenta 23?
R. Disminuye 63 unidades.
- ¿Qué alteración sufre la resta si el minuendo aumenta 8 unidades y el sustraendo aumenta 14?
R. Disminuye 6 unidades.
- Si el minuendo y el sustraendo se aumentan en 10 unidades, ¿qué le sucede a la resta? ¿Y si disminuyen 7 unidades cada uno? **R. No varía; no varía.**
- Siendo $a - b = 17$, escribir la diferencia en cada uno de los casos siguientes:

a) $(a + 5) - b = \dots$	c) $(a - 4) - b = \dots$	e) $(a + 2) - (b + 2) = \dots$
b) $a - (b + 3) = \dots$	d) $a - (b - 1) = \dots$	f) $(a - 2) - (b - 2) = \dots$

R. a) 22 b) 14 c) 13 d) 18 e) 17 f) 17
- Siendo $m - n = 35$, escribir la diferencia en cada uno de los casos siguientes:

a) $(m + 5) - (n + 3) = \dots$	c) $(m - 3) - (n - 8) = \dots$
b) $(m - 7) - (n + 4) = \dots$	d) $(m + 6) - (n - 2) = \dots$

R. a) 37 b) 24 c) 40 d) 43
- Siendo $79 - b = 50$, reemplazar en los casos siguientes la palabra **minuendo** por un número:

minuendo - $b = 54$
minuendo - $b = 42$

R. a) 83 b) 71
- Siendo $x - 35 = 90$, reemplazar la palabra **sustraendo** por un número:

$x - \text{sustraendo} = 81$
$x - \text{sustraendo} = 106$

R. a) 44 b) 19
- Siendo $a - b = 11$, decir cuatro alteraciones que puedan realizarse en a , en b o en ambos a la vez, para que la diferencia sea 13. **R. Pueden hacerse muchas combinaciones.**
- Siendo $m - n = 15$, decir cuatro alteraciones que podrían realizarse en a , en b o en ambos a la vez para que la diferencia fuera 13. **R. Pueden hacerse muchas combinaciones.**



El espíritu práctico que animaba a los romanos no les permitió hacer grandes progresos en los problemas teóricos de las ciencias matemáticas. Esto se comprende mejor aún, si se piensa en las deficiencias de su sistema de numeración, que

crearon siguiendo la huella de los griegos. Los indios llegaron a cuestiones más abstractas, tal como se puede apreciar en el manuscrito **Bakhshali** que data del siglo VII (d. C.).

Capítulo **VIII**

OPERACIONES INDICADAS DE SUMA Y RESTA

Haremos el estudio de las operaciones indicadas de suma y resta primero desde un punto de vista **práctico**, y luego bajo un aspecto **teórico**.

I. PRÁCTICA

OPERACIONES INDICADAS DE SUMA Y RESTA EN QUE NO HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Estas operaciones se efectúan **en el orden que se hallan**.

1) Efectuar $5 + 4 - 3 + 2$.

Diremos: $5 + 4 = 9$; $9 - 3 = 6$; $6 + 2 = 8$, luego:
 $5 + 4 - 3 + 2 = 8$ R.

2) Efectuar $8 - 3 + 4 - 1 + 9 - 7$.

Diremos: $8 - 3 = 5$; $5 + 4 = 9$; $9 - 1 = 8$; $8 + 9 = 17$; $17 - 7 = 10$, luego:
 $8 - 3 + 4 - 1 + 9 - 7 = 10$ R.

32

Efectuar:

Ejercicio

- | | |
|--|----------|
| 1. $3 + 2 - 4 - 1$ | R. 0 |
| 2. $7 - 3 + 6 - 2 + 8$ | R. 16 |
| 3. $11 - 4 + 13 - 2 - 6 + 3$ | R. 15 |
| 4. $19 + 15 - 18 - 10 + 4 - 7 + 9$ | R. 12 |
| 5. $32 - 19 + 43 - 18 + 35 - 53$ | R. 20 |
| 6. $59 - 42 + 108 - 104 + 315 - 136 - 48$ | R. 152 |
| 7. $300 - 41 - 63 - 56 - 31 + 89 - 114 + 1,056$ | R. 1,140 |
| 8. $915 + 316 - 518 - 654 + 673 - 185 + 114 + 2,396$ | R. 3,057 |

115

OPERACIONES INDICADAS EN QUE HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Deben efectuarse en este orden: **primero**, las operaciones encerradas dentro de los paréntesis, hasta convertirlas en un solo número y luego efectuar las operaciones que queden indicadas, como en los casos anteriores.

Ejemplos

- 1) Efectuar
- $(7 - 2) + (5 + 4) - (3 - 2)$
- .

Efectuamos primero las operaciones encerradas entre los paréntesis:

$$7 - 2 = 5, 5 + 4 = 9, 3 - 2 = 1 \text{ y tendremos:}$$

$$(7 - 2) + (5 + 4) - (3 - 2) = 5 + 9 - 1 = 13 \quad \text{R.}$$

- 2) Efectuar
- $350 - (7 - 2 + 5) - (6 + 3) + (9 + 8 - 2)$
- .

Tendremos:

$$350 - (7 - 2 + 5) - (6 + 3) + (9 + 8 - 2) = 350 - 10 - 9 + 15 = 346 \quad \text{R.}$$

33

Efectuar:

Ejercicio

- | | | | |
|---------------------------------|--------|-------------------------------------|--------|
| 1. $(4 + 5 + 3) + 8$ | R. 20 | 12. $(43 - 15) - 19$ | R. 9 |
| 2. $60 - (8 + 7 + 5)$ | R. 40 | 13. $(9 + 4 + 5) - (7 + 3 + 2)$ | R. 6 |
| 3. $150 - (14 - 6)$ | R. 142 | 14. $(11 - 5) - (9 - 3)$ | R. 0 |
| 4. $(8 + 4 + 3) + (6 + 5 + 11)$ | R. 37 | 15. $(7 + 6) - (9 - 8)$ | R. 12 |
| 5. $(9 - 6) + 4$ | R. 7 | 16. $(11 - 5) - 4$ | R. 2 |
| 6. $(5 + 6) + (7 + 8)$ | R. 26 | 17. $(9 - 4) + (3 + 2 + 5)$ | R. 15 |
| 7. $(8 - 6) + (7 - 4)$ | R. 5 | 18. $(9 - 4) + (8 - 3)$ | R. 10 |
| 8. $(9 + 5) + (7 - 2)$ | R. 19 | 19. $(85 - 40) - (95 - 80)$ | R. 30 |
| 9. $56 - (3 + 5 + 11)$ | R. 37 | 20. $(14 + 6 - 4) - (9 - 7 - 2)$ | R. 16 |
| 10. $(8 + 7 + 4) - 16$ | R. 3 | 21. $450 - (14 - 6 + 5 - 4)$ | R. 441 |
| 11. $89 - (56 - 41)$ | R. 74 | 22. $(9 - 6 + 3) - 2 - (8 - 7 + 1)$ | R. 2 |

- | | |
|---|--------|
| 23. $(14 + 5) - (6 - 4 + 3) + (6 - 4 + 2)$ | R. 18 |
| 24. $250 - (6 - 4 + 5) - 8 - (9 - 5 + 3)$ | R. 228 |
| 25. $300 - (5 - 2) - (9 - 3) + (5 - 4)$ | R. 292 |
| 26. $(7 - 5) + (13 - 4) - (17 + 3) + (18 - 9)$ | R. 0 |
| 27. $(15 - 7) + (6 - 1) - (9 - 6) + (19 + 8) - (3 - 1) + (4 + 5)$ | R. 44 |
| 28. $(13 - 5 + 6) - (21 + 2 - 18) + (7 - 5) - (8 - 2 + 1)$ | R. 4 |
| 29. $350 - 2 - 125 + 4 - (31 - 30) - (7 - 1) - (5 - 4 + 1)$ | R. 218 |
| 30. $(8 - 1) - (16 - 9) + 4 - 1 + 9 - 6 + (11 - 6) - (9 - 4)$ | R. 6 |

3) Efectuar $30 + [84 - (7 - 2)]$.

Cuando hay un signo de agrupación encerrado dentro de otro, debe efectuarse primero la operación encerrada en el *más interior*. Así, en este caso efectuamos primero la operación $(7 - 2) = 5$, y tendremos:

$$30 + [84 - (7 - 2)] = 30 + [84 - 5] = 30 + 79 = 109 \quad \text{R.}$$

4) Efectuar $800 - [45 + \{(8 - 4) + (7 - 2)\}]$.

Efectuamos primero $8 - 4 = 4$ y $7 - 2 = 5$ y tendremos:

$$\begin{aligned} 800 - [45 + \{(8 - 4) + (7 - 2)\}] &= 800 - [45 + \{4 + 5\}] \\ &= 800 - [45 + 9] = 800 - 54 = 746 \quad \text{R.} \end{aligned}$$

Ejemplos

Efectuar:

- | | |
|--|--------|
| 1. $40 + [25 - (3 + 2)]$ | R. 60 |
| 2. $60 + [(4 + 2) - 5]$ | R. 61 |
| 3. $150 - [(5 - 1) - (4 - 3)]$ | R. 147 |
| 4. $250 + [(7 - 2) + (4 - 1) + (3 - 2)]$ | R. 259 |
| 5. $450 - [6 + \{4 - (3 - 1)\}]$ | R. 442 |
| 6. $520 + [8 - 3 + \{9 - (4 + 2 - 1)\}]$ | R. 529 |
| 7. $(150 - 5) - \{14 + (9 - 6 + 3)\}$ | R. 125 |
| 8. $500 - \{6 + [(14 - 6) - (7 - 2) + (4 - 1)]\}$ | R. 488 |
| 9. $500 - \{14 - [7 - (6 - 5 + 4)]\}$ | R. 488 |
| 10. $856 + \{19 - 3 - [6 + (5 - 3) - (2 + 1) + (5 - 3)]\}$ | R. 865 |
| 11. $[8 + (4 - 2)] + [9 - (3 + 1)]$ | R. 15 |
| 12. $[(6 - 4) - (3 - 2)] - [(9 - 7) - (6 - 5)]$ | R. 0 |
| 13. $8 + [9 - \{6 - (5 - 4)\}] + 14 - \{11 - [7 - (3 - 2)]\}$ | R. 21 |
| 14. $250 - [(6 + 4) - (3 - 1) + 2] + \{16 - [(8 + 3) - (12 - 10)]\}$ | R. 247 |

34

Ejercicio

II. TEORÍA

Estudiaremos ahora el método de efectuar las operaciones indicadas de suma y resta, fundado en las **propiedades** de la suma y la resta. Es necesario conocer este método porque si las cantidades están representadas por letras no podemos efectuar las operaciones encerradas en los paréntesis y por tanto no se puede aplicar el método explicado anteriormente.

SUMA

116

SUMA DE UN NÚMERO Y UNA SUMA INDICADA

Para sumar un número con una suma indicada se suma el número con uno cualquiera de los sumandos de la suma.

Sea la operación $(2 + 3 + 4) + 5$, decimos que:

$$(2 + 3 + 4) + 5 = 2 + (3 + 5) + 4 = 14$$

En efecto: al sumar el número 5 con el sumando 3, la suma $(2 + 3 + 4)$ queda aumentada en 5 unidades porque **(105)** si un sumando se aumenta en un número cualquiera la suma queda aumentada en dicho número.

En general:

$$(a + b + c) + d = a + (b + d) + c$$

117

SUMA DE DOS SUMAS INDICADAS

Para sumar dos sumas indicadas se suman todos los sumandos que la forman.

Sea la operación $(5 + 6) + (7 + 8)$, decimos que:

$$(5 + 6) + (7 + 8) = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

En efecto: al añadir la suma $7 + 8$ al sumando 6 de la primera suma, esta suma queda aumentada en $7 + 8$ unidades por la misma razón del caso anterior.

En general:

$$(a + b) + (c + d + e) = a + b + c + d + e$$

118

SUMA DE UN NÚMERO Y UNA DIFERENCIA INDICADA

Para sumar un número con una diferencia indicada, se suma el número con el minuendo y de esta suma se resta el sustraendo.

Sea la operación $(7 - 5) + 4$, decimos que:

$$(7 - 5) + 4 = (7 + 4) - 5 = 11 - 5 = 6$$

En efecto: al sumar el número 4 al minuendo, la diferencia $7 - 5$ queda aumentada en 4 porque **(113)** hemos visto que si el minuendo se aumenta en un número cualquiera, la diferencia queda aumentada en ese número.

En general:

$$(a - b) + c = (a + c) - b$$

SUMA DE DIFERENCIAS INDICADAS

119

Para sumar dos o más diferencias indicadas, se suman los minuendos y de esta suma se resta la suma de los sustraendos.

Sea la operación $(8 - 5) + (6 - 4)$, decimos que:

$$(8 - 5) + (6 - 4) = (8 + 6) - (5 + 4) = 14 - 9 = 5$$

En efecto: al sumar al minuendo 8 el minuendo 6, la diferencia $(8 - 5)$ queda aumentada en 6 unidades, pero al sumar al sustraendo 5 el sustraendo 4, la diferencia $(8 - 5)$ queda disminuida en 4, luego si $(8 - 5)$ aumenta 6 y disminuye 4, queda aumentada en 2 unidades, que es la diferencia $6 - 4$.

En general:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

SUMA DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA INDICADA

120

Para sumar una suma con una diferencia indicada, se suma el minuendo con uno de los sumandos de la suma y de esta suma se resta el sustraendo.

Sea la operación $(4 + 5) + (8 - 6)$, decimos que:

$$(4 + 5) + (8 - 6) = (4 + 5 + 8) - 6 = 17 - 6 = 11$$

En efecto: al añadir el minuendo 8 al sumando 5, la suma $4 + 5$ queda aumentada en 8 unidades, pero al restar el sustraendo 6 queda disminuida en 6 unidades, luego si la suma $(4 + 5)$ aumenta 8 y disminuye 6, aumenta 2, que es la diferencia $8 - 6$.

En general:

$$(a + b) + (c - d) = (a + b + c) - d$$

RESTA**RESTA DE UN NÚMERO Y UNA SUMA INDICADA**

121

Para restar de un número una suma indicada, se restan del número, uno a uno, todos los sumandos de la suma.

Sea la operación $25 - (2 + 3 + 4)$, decimos que:

$$25 - (2 + 3 + 4) = 25 - 2 - 3 - 4 = 16$$

En efecto: si 25 se disminuye primero en 2, después en 3 y luego en 4, queda disminuido en 9 unidades que es la suma $2 + 3 + 4$.

En general:

$$a - (b + c + d) = a - b - c - d$$

RESTA DE UNA SUMA INDICADA Y UN NÚMERO

122

Para restar de una suma indicada un número, se resta el número de cualquier sumando de la suma.

Sea la operación $(4 + 5 + 6) - 3$, probar que:

$$(4 + 5 + 6) - 3 = (4 - 3) + 5 + 6 = 12$$

En efecto: al restar el 3 de uno de los sumandos de la suma, ésta queda disminuida en 3 unidades (**105**).

En general:

$$(a + b + c) - d = (a - d) + b + c$$

123

RESTA DE UN NÚMERO Y UNA DIFERENCIA INDICADA

Para restar de un número una diferencia indicada, se suma el sustraendo con el número y de esta suma se resta el minuendo.

Sea la operación $50 - (8 - 5)$, decimos que:

$$50 - (8 - 5) = (50 + 5) - 8 = 47$$

En efecto: sabemos (**113**) que si al minuendo y al sustraendo de una diferencia se suma un mismo número, la diferencia no varía. Añadiendo 5 al minuendo y al sustraendo de la diferencia $50 - (8 - 5)$, tenemos:

$$50 - (8 - 5) = (50 + 5) - (8 - 5 + 5) = (50 + 5) - 8$$

porque si a 8 le restamos 5 y le sumamos 5; queda 8.

En general:

$$a - (b - c) = (a + c) - b$$

124

RESTA DE UNA DIFERENCIA INDICADA Y UN NÚMERO

Para restar de una diferencia indicada un número, se resta del minuendo la suma del sustraendo y el número.

Sea la operación $(15 - 7) - 6$, decimos que:

$$(15 - 7) - 6 = 15 - (7 + 6) = 15 - 13 = 2$$

En efecto: al sumar 6 con el sustraendo 7, la diferencia $15 - 7$ queda disminuida en 6 unidades porque (**113**) si al sustraendo se suma un número cualquiera, la diferencia queda disminuida en este número.

En general:

$$(a - b) - c = a - (b + c)$$

125

RESTA DE DOS SUMAS INDICADAS

Para restar dos sumas indicadas se restan de la primera suma, uno a uno, todos los sumandos de la segunda suma.

Sea la operación $(4 + 5) - (2 + 3)$, decimos que:

$$(4 + 5) - (2 + 3) = 4 + 5 - 2 - 3 = 4$$

En efecto: si de la suma $(4 + 5)$ restamos primero 2 y después 3, esta suma queda disminuida en 5 unidades que es la suma $2 + 3$.

En general:

$$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$$

RESTA DE DOS DIFERENCIAS INDICADAS

126

Para restar dos diferencias indicadas, se suma el minuendo de la primera con el sustraendo de la segunda y de esta suma se resta la suma del sustraendo de la primera con el minuendo de la segunda.

Sea la operación $(8 - 1) - (5 - 3)$, decimos que:

$$(8 - 1) - (5 - 3) = (8 + 3) - (5 + 1) = 11 - 6 = 5$$

En efecto: al sumar el sustraendo 3 con el minuendo 8 la diferencia $(8 - 1)$ queda aumentada en 3 unidades, pero al sumar el minuendo 5 con el sustraendo 1 la diferencia $(8 - 1)$ queda disminuida en 5 unidades; luego si $(8 - 1)$ aumenta 3 y disminuye 5, en definitiva disminuye 2, que es la diferencia $5 - 3$.

En general:

$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$$

RESTA DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA INDICADA

127

Para restar de una suma una diferencia indicada, se suma el sustraendo con la suma indicada y de esta suma se resta el minuendo.

Sea la operación $(8 + 4) - (3 - 2)$, probar que:

$$(8 + 4) - (3 - 2) = (8 + 4 + 2) - 3 = 14 - 3 = 11$$

En efecto: al sumar el sustraendo 2 con la suma $(8 + 4)$ esta suma queda aumentada en 2 unidades, pero al restar el minuendo 3 disminuye 3 unidades, luego si aumenta 2 y disminuye 3, disminuye 1 unidad que es la diferencia $(3 - 2)$.

En general:

$$(a + b) - (c - d) = (a + b + d) - c$$

Efectuar, aplicando las reglas estudiadas:

- | | | | |
|----------------------------------|--------------------|-----------------------------|--------------------|
| 1. $(7 + 8) + 9$ | R. 24 | 16. $(m + n + p) - x$ | R. $m + n + p - x$ |
| 2. $(m + n) + p$ | R. $m + n + p$ | 17. $53 - (23 - 15)$ | R. 45 |
| 3. $(7 + 6) + (4 + 5 + 1)$ | R. 23 | 18. $x - (m - n)$ | R. $x - m + n$ |
| 4. $(x + y) + (2 + a)$ | R. $x + y + 2 + a$ | 19. $(7 - 6) - 1$ | R. 0 |
| 5. $(9 - 3) + 4$ | R. 10 | 20. $(11 - 2) - 6$ | R. 3 |
| 6. $(a - m) + n$ | R. $a - m + n$ | 21. $(a - x) - y$ | R. $a - x - y$ |
| 7. $(8 - x) + 4$ | R. $12 - x$ | 22. $(6 + 5) - (7 + 3)$ | R. 1 |
| 8. $(4 - 3) + (5 - 2)$ | R. 4 | 23. $(c + d) - (m + n)$ | R. $c + d - m - n$ |
| 9. $(9 - 5) + (7 - 2) + (4 - 1)$ | R. 12 | 24. $(9 - 3) - (8 - 2)$ | R. 0 |
| 10. $(a - x) + (m - n)$ | R. $a - x + m - n$ | 25. $(11 - 2) - (7 - 5)$ | R. 7 |
| 11. $(7 + 5) + (6 - 3)$ | R. 15 | 26. $(a - x) - (m - n)$ | R. $a - x - m + n$ |
| 12. $(b + c) + (m - n)$ | R. $b + c + m - n$ | 27. $(9 + 8) + (5 - 3)$ | R. 19 |
| 13. $19 - (4 + 5 + 1)$ | R. 9 | 28. $(4 + 3 + 9) - (3 - 2)$ | R. 15 |
| 14. $a - (b + 7)$ | R. $a - b - 7$ | 29. $(a + x) - (x - 2)$ | R. $a + 2$ |
| 15. $(9 + 8 + 7) - 14$ | R. 10 | 30. $(8 - 3) - (5 - 4)$ | R. 4 |

35

Ejercicio

CASOS PARTICULARES

128

LA SUMA DE DOS NÚMEROS MÁS SU DIFERENCIA ES IGUAL AL DOBLE DEL MAYOR

Sean los números 8 y 5, decimos que:

$$(8 + 5) + (8 - 5) = 2 \times 8 = 16$$

En efecto: sabemos (118) que para sumar una suma con una diferencia, se suma el minuendo de la diferencia con uno de los sumandos de la suma y de esta suma se resta el sustraendo, luego:

$$(8 + 5) + (8 - 5) = 8 + 5 + 8 - 5 = 8 + 8 + 5 - 5 = 8 + 8 = 2 \times 8$$

En general:

$$(a + b) + (a - b) = 2a$$

129

LA SUMA DE DOS NÚMEROS MENOS SU DIFERENCIA ES IGUAL AL DOBLE DEL MENOR

Sean los números 8 y 5, decimos que:

$$(8 + 5) - (8 - 5) = 2 \times 5 = 10$$

En efecto: sabemos (127) que para restar de una suma una diferencia se suma el sustraendo con la suma y de esta suma se resta el minuendo, luego:

$$(8 + 5) - (8 - 5) = 8 + 5 + 5 - 8 = 5 + 5 + 8 - 8 = 5 + 5 = 2 \times 5$$

En general:

$$(a + b) - (a - b) = 2b$$

36

Hallar, por simple inspección, el resultado de:

Ejercicio

1. $(7 + 2) + (7 - 2)$

R. 14

8. $(a + x) + (a - x)$

R. $2a$

2. $(8 + 3) + (8 - 3)$

R. 16

9. $(n - m) + (n + m)$

R. $2n$

3. $(9 + 4) - (9 - 4)$

R. 8

10. $(a + 5) + (5 - a)$

R. 10

4. $(7 + 1) - (7 - 1)$

R. 2

11. $(3 + a) + (a - 3)$

R. $2a$

5. $(6 - 5) + (6 + 5)$

R. 12

12. $(m - 8) + (8 + m)$

R. $2m$

6. $(4 + 7) + (7 - 4)$

R. 14

13. $(10 + 30) - (30 - 10)$

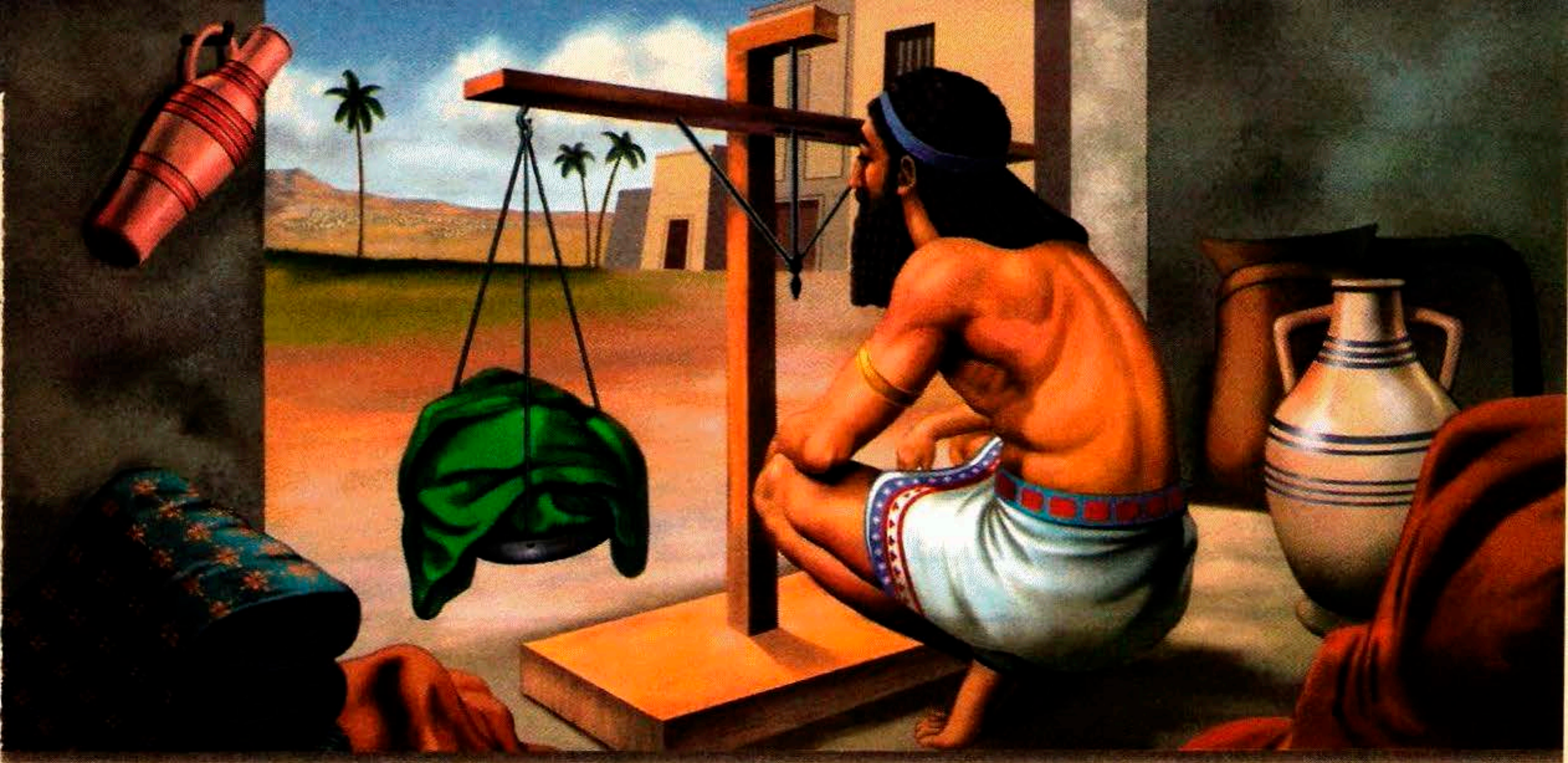
R. 20

7. $(9 - 4) - (9 + 4)$

R. -8

14. $(q + p) - (p - q)$

R. $2q$



El complemento aritmético, que es una consecuencia del carácter decimal de nuestro sistema de numeración, ha sido empleado como procedimiento auxiliar para la resolución de

las operaciones de sumar y restar, y también para resolver las operaciones combinadas de suma y resta. Tiene poco uso.

Capítulo **IX**

COMPLEMENTO ARITMÉTICO

EL COMPLEMENTO ARITMÉTICO de un número es la diferencia entre dicho número y una unidad de orden superior, a su cifra de mayor orden.

130

- 1) El complemento aritmético de 98 es $100 - 98 = 2$.
- 2) El complemento aritmético de 356 es $1,000 - 356 = 644$.
- 3) El complemento aritmético de 1,250 es $10,000 - 1,250 = 8,750$.
- 4) El complemento aritmético de 14,200 es $100,000 - 14,200 = 85,800$.

Ejemplos

REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL COMPLEMENTO DE UN NÚMERO

Se restan de 9 todas la cifras del número, empezando por la izquierda, menos la última cifra significativa, que se resta de 10. Si el número termina en ceros, a la derecha de la última resta se escriben estos ceros.

131

Ejemplos

- 1) Hallar el complemento aritmético de 346.

Diremos: de 3 a 9, 6; de 4 a 9, 5; de 6 a 10, 4, luego el complemento aritmético de 346 es **654** R.

- 2) Hallar el complemento aritmético de 578,900.

Diremos: de 5 a 9, 4; de 7 a 9, 2; de 8 a 9, 1; de 9 a 10, 1, luego el complemento aritmético es **421,100** R.

37

Hallar el complemento aritmético de:

Ejercicio

- | | | | |
|--------|----------|------------|----------------|
| 1. 10 | 4. 453 | 7. 32,987 | 10. 421,594 |
| 2. 72 | 5. 560 | 8. 500,700 | 11. 239,000 |
| 3. 300 | 6. 1,920 | 9. 89,116 | 12. 78,996,000 |

132

APLICACIÓN DEL COMPLEMENTO ARITMÉTICO PARA EFECTUAR LA RESTA

Para efectuar la resta por medio del complemento aritmético **se suma el minuendo con el complemento aritmético del sustraendo, poniéndole a éste delante una unidad con signo menos, que se tendrá en cuenta al efectuar la suma.**

Ejemplos

- 1) Efectuar $1,034 - 615$ por medio del complemento aritmético.

El complemento aritmético de 615 es 385. Ahora *sumamos* el minuendo 1,034 con 1,385, que es el complemento aritmético con una unidad con signo menos delante, y tendremos:

$$\begin{array}{r} 1,034 \\ + \overline{1},385 \\ \hline 0,419 \end{array}$$

La diferencia entre 1,034 y 615 es **419** R. que se puede comprobar efectuando la resta:

$$\begin{array}{r} 1,034 \\ - 615 \\ \hline 0,419 \end{array}$$

- 2) Efectuar por el complemento aritmético $7,289 - 5,400$.

El complemento aritmético de 5,400 es 4,600. Ahora sumamos 7,289 con $\overline{14},600$ y tendremos:

$$\begin{array}{r} 7,289 \\ + \overline{14},600 \\ \hline 01,889 \text{ R.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Prueba: } 7,289 \\ - 5,400 \\ \hline 1,889 \end{array}$$

Efectuar por el complemento aritmético:

1. $73 - 54$

2. $198 - 115$

3. $954 - 930$

4. $1,215 - 843$

5. $7,700 - 3,000$

6. $18,564 - 5,610$

7. $99,900 - 10,000$

8. $143,765 - 20,000$

9. $123,456 - 54,000$

10. $53,789,543 - 56,470$

38

Ejercicio

APLICACIÓN DEL COMPLEMENTO ARITMÉTICO PARA EFECTUAR VARIAS SUMAS Y RESTAS COMBINADAS

133

Para efectuar sumas y restas combinadas por medio del complemento aritmético se suman todos los sumandos con los complementos aritméticos de los sustraendos, poniendo delante de cada complemento una unidad con signo menos, que se tomará en cuenta al efectuar la suma.

1) Efectuar por los complementos $56 - 41 + 83 - 12$.

Comp. aritmético de 41...

Comp. aritmético de 12...

$$\begin{array}{r}
 56 \\
 \overline{159} \\
 + \quad 83 \\
 \overline{188} \\
 \hline
 086 \quad \text{R.}
 \end{array}$$

2) Efectuar por los complementos $14,208 - 3,104 + 8,132 - 1,245 - 723 + 2,140$.

Comp. aritmético de 3,104...

Comp. aritmético de 1,245...

Comp. aritmético de 723...

$$\begin{array}{r}
 14,208 \\
 \overline{16,896} \\
 + \quad 8,132 \\
 \overline{18,755} \\
 \overline{1,277} \\
 2,140 \\
 \hline
 19,408 \quad \text{R.}
 \end{array}$$

Ejemplos

Efectuar por los complementos:

1. $19 - 8 + 6$

R. 17

2. $35 - 22 - 6 + 4$

R. 11

3. $123 - 96 + 154 - 76$

R. 105

4. $810 - 700 + 560 - 90$

R. 580

5. $14 - 9 - 20 + 42 - 80 + 300 - 23$

R. 224

6. $1,274 - 863 - 14 - 10 + 3,340 - 19$

R. 3,708

7. $20,180 + 14,208 - 45,209 + 29,314 - 8,164$

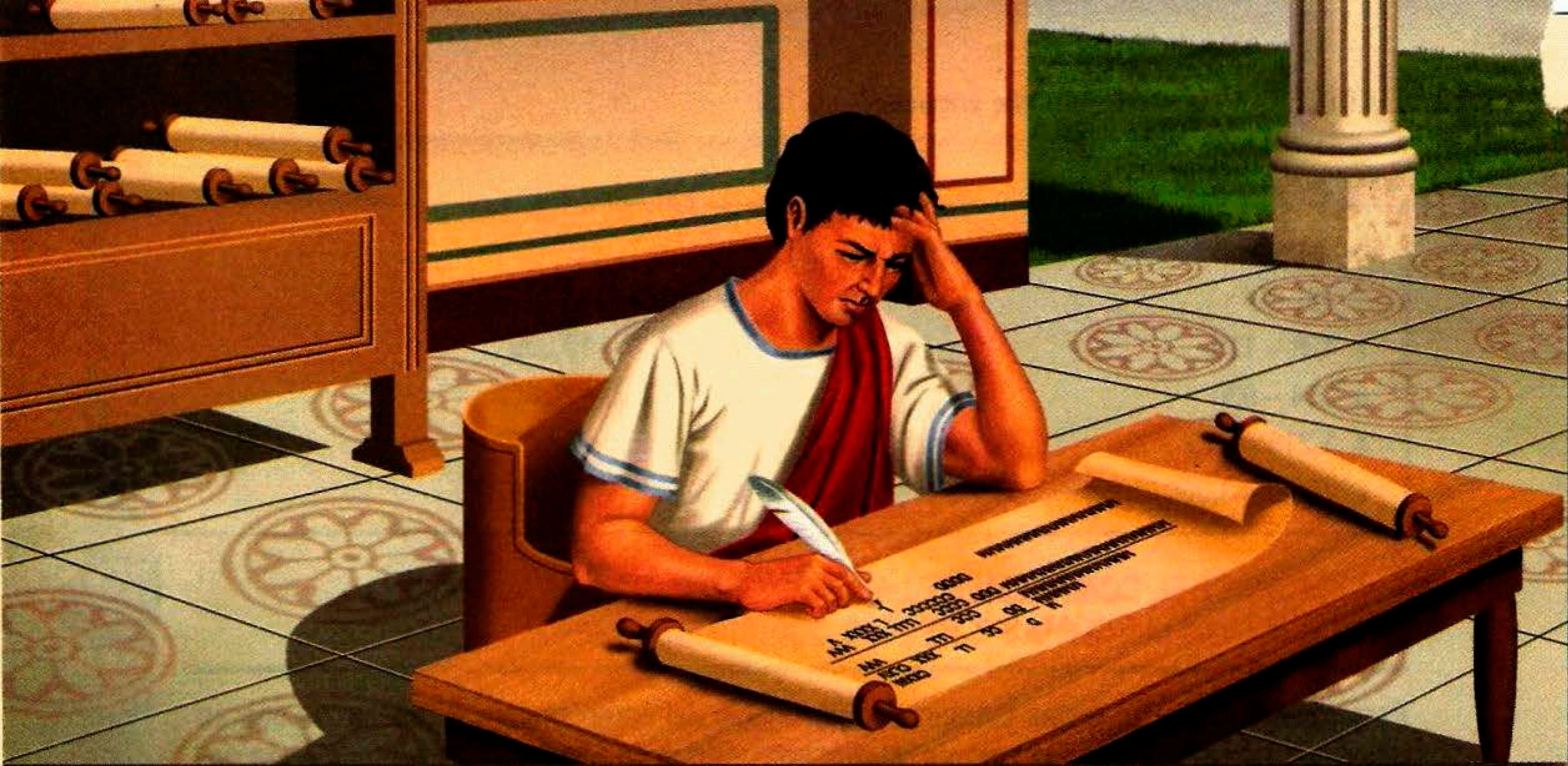
R. 10,329

8. $54,209 - 1,349 - 10,000 - 4,000 - 6,250$

R. 32,610

39

Ejercicio



La operación de multiplicar resultaba muy compleja para los antiguos. Los griegos se auxiliaban con la tabla pitagórica, que ya conocían antes de nacer **Pitágoras**. Los babilonios empleaban tablas de cuadrados. Entre los romanos, la opera-

ción era lenta y trabajosa, como se observa en la ilustración, debido a su notación numeral. El signo de multiplicar, cruz de San Andrés, se atribuye a **W. Oughtred**, hacia **1647**.

Capítulo **X**

MULTIPLICACIÓN

134

MULTIPLICACIÓN. SU OBJETO

La multiplicación es una operación de composición que tiene por objeto, dados números llamados **multiplicando** y **multiplicador**, hallar un número llamado **producto** que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

Así, multiplicar 4 (multiplicando) por 3 (multiplicador) es hallar un número que sea respecto de 4 lo que 3 es respecto de 1, pero 3 es tres veces 1, luego el producto será tres veces 4, o sea 12. Igualmente, multiplicar 8 por 5 es hallar un número que sea respecto de 8 lo que 5 es respecto de 1, pero 5 es cinco veces 1, luego el producto será 5 veces 8, o sea 40.

En general, multiplicar a por b es hallar un número que sea respecto de a lo que b es respecto de 1.

Notación

El producto de dos números se indica con el signo \times o con punto colocado entre los **factores**, que es el nombre que se da al multiplicando y multiplicador.

Así, el producto de 6 por 5 se indica 6×5 o $6 \cdot 5$.

Cuando los factores son literales o un número y una letra, se suele omitir el signo de multiplicación entre los factores.

Así, el producto de a por b se indica $a \times b$, $a \cdot b$ o simplemente ab . El producto de 7 por n se indica $7 \times n$, $7 \cdot n$ o mejor $7n$.

RELACIÓN ENTRE EL PRODUCTO Y EL MULTIPLICANDO

135

Consideraremos 4 casos:

- 1) **Si el multiplicador es cero, el producto es cero.** Así, $5 \times 0 = 0$, porque el multiplicador 0 indica la ausencia de la unidad, luego el producto tiene que indicar la ausencia del multiplicando.
- 2) **Si el multiplicador es 1, el producto es igual al multiplicando.** Así, $4 \times 1 = 4$, porque siendo el multiplicador igual a la unidad, el producto tiene que ser igual al multiplicando.
El número 1 es el único número que multiplicado por otro da un producto igual a este último y por esto se dice que 1 es el **módulo** de la multiplicación.
- 3) **Si el multiplicador es > 1 , el producto es $>$ el multiplicando.** Así $7 \times 6 = 42 > 7$, porque siendo $6 > 1$, el producto tiene que ser $>$ el multiplicando.
- 4) **Si el multiplicador es < 1 , el producto es $<$ el multiplicando.** Así, $8 \times 0.5 = 4$, porque siendo 0.5 la mitad de la unidad, el producto tiene que ser la mitad del multiplicando.
De lo anterior se deduce que **multiplicar no es siempre aumentar**.

DEFINICIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN CUANDO EL MULTIPLICADOR ES UN NÚMERO NATURAL

136

Cuando el multiplicador es un número natural, la multiplicación es **una suma abreviada que consta de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades tenga el multiplicador**.

$$\begin{aligned}
 &\bullet \quad 4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12 \\
 &\quad 5 \times 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30 \\
 &\quad ac = \underbrace{a + a + a + a \dots}_{c \text{ veces}}
 \end{aligned}$$

Ejemplos

MULTIPLICACIÓN POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS

137

Para multiplicar un entero por la unidad seguida de ceros se añaden al entero tantos ceros como ceros acompañen a la unidad.

- 1) $54 \times 100 = 5,400$, porque el valor relativo de cada cifra se ha hecho 100 veces mayor.
(63)
- 2) $1,789 \times 1,000 = 1,789,000$ porque el valor relativo de cada cifra se ha hecho 1,000 veces mayor.

Ejemplos

138

MULTIPLICACIÓN DE DOS NÚMEROS TERMINADOS EN CEROS

Se multiplican los números como si no tuvieran ceros y a la derecha de este producto se añaden tantos ceros como haya en el multiplicando y multiplicador.

Ejemplo

$$4,300 \times 25,000 = 107,500,000 \quad \text{R.}$$

139

NÚMERO DE CIFRAS DEL PRODUCTO

En el producto hay siempre tantas cifras como haya en el multiplicando y multiplicador juntos o una menos.

Así, el producto 345×23 ha de tener cuatro cifras o cinco.

En efecto: $345 \times 23 > 345 \times 10$, y como este último producto $345 \times 10 = 3,450$ tiene cuatro cifras, el producto 345×23 , que es mayor que él, no puede tener menos de cuatro cifras.

Por otra parte, $345 \times 23 < 345 \times 100$, pero este producto $345 \times 100 = 34,500$ tiene cinco cifras, luego el producto 345×23 , que es menor que este último producto, no puede tener más de cinco cifras.

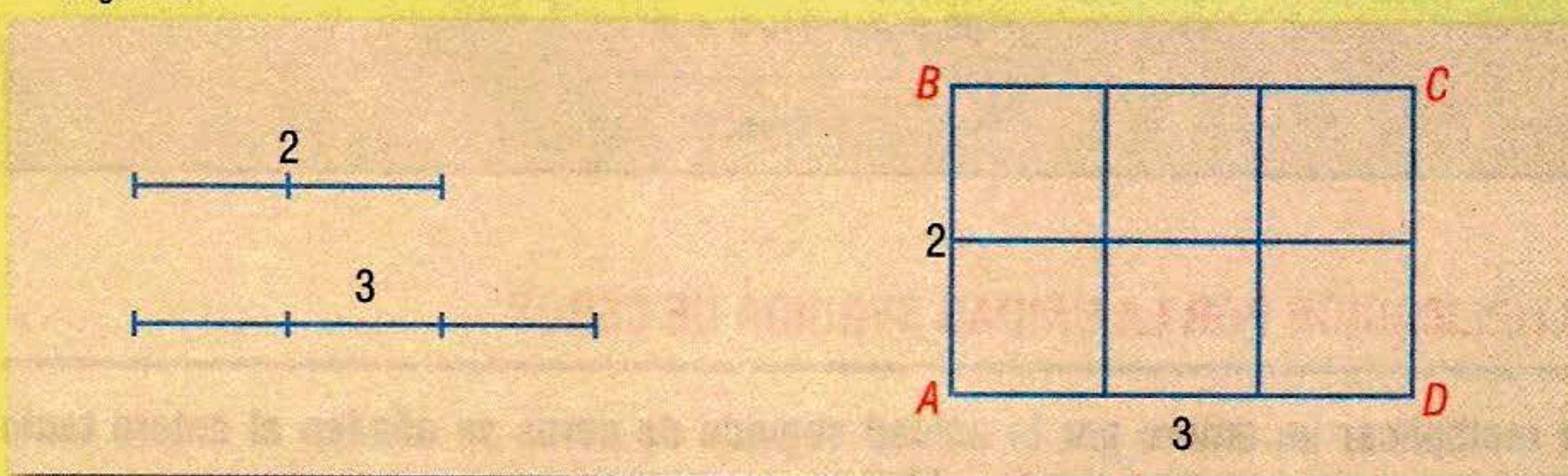
140

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO

Ejemplos

1) Representar gráficamente 3×2 .

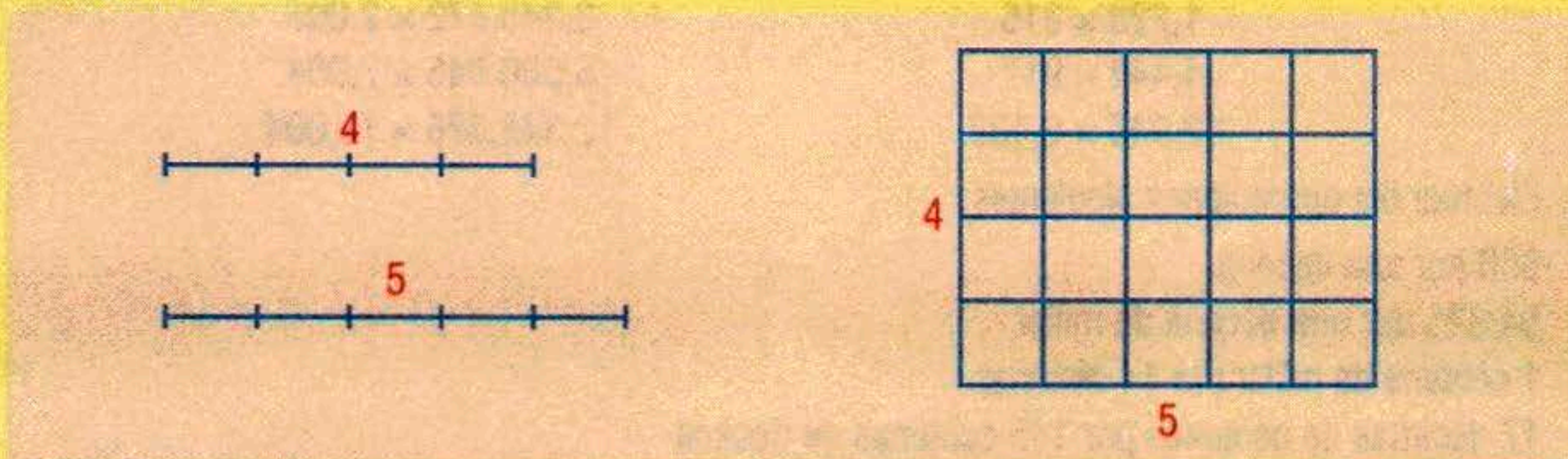
Figura 23



Se representan gráficamente (Fig. 23) el multiplicando 3 y el multiplicador 2 por medio de segmentos, según se vio en el núm. 76, y se construye un rectángulo cuya *base* sea el segmento que representa el 3 y cuya *altura* sea el segmento que representa el 2. El rectángulo $ABCD$ que consta de dos filas horizontales de 3 cuadrados cada una es la representación gráfica del producto $3 \times 2 = 6$ porque el desarrollo de este producto es $3 \times 2 = 3 + 3 = 6$.

2) Representar gráficamente 4×5 .

Figura 24



El rectángulo de la figura 24 formado por 4 filas horizontales de 5 cuadrados cada una o sea de $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ cuadrados es la representación gráfica del producto 5×4 porque el desarrollo de este producto es:

$$5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

PRODUCTO CONTINUADO

141

Para hallar el producto de más de dos números como $2 \times 3 \times 4 \times 5$ se halla primero el producto de dos de ellos; luego se multiplica este producto por el tercer factor; luego este segundo producto por el factor siguiente y así hasta el último factor.

Así, en este caso, tendremos: $2 \times 3 = 6$; $6 \times 4 = 24$; $24 \times 5 = 120$
 luego $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ R.

PRUEBAS DE LA MULTIPLICACIÓN

142

La prueba de la multiplicación puede realizarse de tres modos: 1) cambiando el orden de los factores, lo cual debe darnos el mismo producto, si la operación está correcta, según la ley conmutativa de la multiplicación que veremos pronto, 2) dividiendo el producto entre uno de los factores, lo cual debe darnos el otro factor, y 3) por la prueba del 9 que se estudia en el número 277.

1. ¿Cuál es el módulo de la multiplicación? ¿Por qué?
2. Siendo el multiplicando 48, ¿cuál debe ser el multiplicador para que el producto sea 48; el doble de 48; su tercera parte; 5 veces mayor que 48; cero?
3. Si el multiplicando es 6, ¿cuál será el multiplicador si el producto es 18; si es 3; si es cero?
4. Siendo $ab = 3a$, ¿qué número es b ?
5. Siendo $mn = m$, ¿qué número es n ?
6. Siendo $a \cdot 5 = b$, ¿qué valor tiene b en relación con a ?
7. Siendo $5a = 20$, ¿qué número es a ? ¿Por qué?
8. Expresar en forma de suma los productos 3×4 ; 5×7 ; 6×8 .
9. Expresar en forma de suma los productos $a \cdot 4$, $b \cdot 5$, $c \cdot 9$.
10. Expresar en forma de suma los productos ab , mn , cd .

40

Ejercicio

11. Efectuar

$$\begin{array}{l} 234 \times 56 \\ 1,228 \times 315 \\ 4,444 \times 917 \\ 12,345 \times 6,432 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100,001 \times 1,001 \\ 3,245,672 \times 2,003 \\ 5,000,045 \times 7,004 \\ 12,345,678 \times 12,004 \end{array}$$

12. Efectuar las operaciones siguientes:

- 856 por una decena
 54,325 por una decena de millar
 1 centena de millar por 14 decenas
 17 décimas de centenas por 145 centenas de decena
 8 centenas por 19 centenas de millar

13. Efectuar:

$$\begin{array}{l} 324 \times 100 \\ 1,215 \times 1,000 \\ 198,654 \times 100,000 \\ 766,534 \times 10,000,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 \times 30 \\ 400 \times 40 \\ 12,000 \times 3,400 \\ 70,000 \times 42,000 \end{array}$$

14. ¿Cuántas cifras tendrán los productos: 13×4 ; 45×32 ; 176×543 ; $1,987 \times 515$?

15. Representar gráficamente los productos:

$$\begin{array}{l} 4 \times 2 \\ 3 \times 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 \times 5 \\ 6 \times 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7 \times 8 \\ 11 \times 14 \end{array}$$

16. Hallar el resultado de:

- a) $3 \times 4 \times 5$ b) $2 \times 2 \times 3 \times 4$ c) $8 \times 7 \times 6 \times 3$ d) $5 \times 11 \times 13 \times 7$

41

Ejercicio

1. A \$6 cada lápiz, ¿cuánto importarán 7 docenas? **R. \$504**
2. Enrique vende un terreno de 14 áreas a \$50,000 el área y recibe en pago otro terreno de 800 m² a razón de \$300 el m². ¿Cuánto se le adeuda? **R. \$460,000**
3. Se compran 8 libros a \$20 cada uno, 5 lapiceros a \$10 cada uno y 4 plumas a \$30 cada una. Si se vende todo en \$180, ¿cuánto se pierde? **R. \$150**
4. Se compran 216 docenas de lapiceros a \$50 la docena. Si se venden a razón de \$10 cada 2 lapiceros, ¿cuál es el beneficio obtenido? **R. \$2,160**
5. Se compran 84 m² de terreno a \$30 el m², y se vende a \$600 la docena de m². ¿Cuánto se gana? **R. \$1,680**
6. Se compran 40 lápices por \$20. ¿Cuánto se ganará si se venden todos a \$7.20 la docena? **R. \$4**
7. Un auto sale de la Ciudad de México hacia Monterrey a 60 km/h y otro sale de la Ciudad de México hacia Acapulco a 70 km/h. Si salen ambos a las 10 de la mañana, ¿a qué distancia se hallarán a la 1 de la tarde? **R. 390 km**
8. Dos autos salen de dos ciudades distantes entre sí 720 km uno hacia el otro. El primero anda 40 km/h y el segundo 30 km/h. Si salen ambos a las 8 a. m., ¿a qué distancia se encontrarán a las 11 a. m.? **R. 510 km**
9. Compré 14 trajes a \$3,000; 22 sombreros a \$200 y 8 bastones a \$500. Vendiendo los trajes por \$56,000, cada sombrero a \$100 y cada bastón a \$300, ¿gano o pierdo, y cuánto? **R. Gano \$10,200**

10. Compré 115 caballos a \$7,000 cada uno; 15 se murieron y el resto lo vendí a \$8,000 cada caballo. ¿Gané o perdí y cuánto? **R. Perdí \$5,000**
11. Un albañil que hace 6 m^2 de pared en un día ha empleado 8 días en hacer un trabajo. Si le pagan a \$60 cada m^2 de pared, ¿cuánto debe recibir? **R. \$2,880**
12. Juan gana \$60 por día de trabajo y trabaja 5 días a la semana. Si gasta \$210 a la semana, ¿cuánto puede ahorrar en 8 semanas? **R. \$720**
13. Se han vendido 14 barriles de harina a \$180 cada uno con una pérdida de \$20 por cada barril; 20 sacos de arroz a \$40 cada uno con una ganancia de \$10 por saco y 7 sacos de frijoles a \$150 cada uno con una pérdida de \$30 por saco. ¿Cuál fue el costo de toda la mercancía que vendí? **R. \$4,660**
14. Pedro tiene \$65, Patricio el doble de lo que tiene Pedro menos \$16 y Juan tanto como los dos anteriores juntos más \$18. Si entre todos gastan \$124, ¿cuál es el capital común que queda? **R. \$252**
15. Un ganadero compró 80 cabezas de ganado a \$4,000 cada una. Vendió 30 a \$4,500 y 25 a \$4,800. ¿Cuánto debe obtener de las que quedan para que la ganancia total sea de \$40,000? **R. \$105,000**

LEYES DE LA MULTIPLICACIÓN

143

Las leyes de la multiplicación son 6: ley de uniformidad, ley conmutativa, ley asociativa, ley disociativa, ley de monotonía y ley distributiva.

I. LEY DE UNIFORMIDAD

144

Esta ley puede enunciarse de tres modos que son equivalentes:

- 1) El producto de dos números tiene un valor único o siempre igual.

$$5 \text{ sillas} \times 2 = 10 \text{ sillas}$$

$$5 \text{ mesas} \times 2 = 10 \text{ mesas}$$

$$5 \text{ días} \times 2 = 10 \text{ días}$$

Vemos pues, que el producto 5×2 , cualquiera que sea la naturaleza de los conjuntos que estos números representen, siempre es 10, luego podemos escribir:

$$5 \times 2 = 10, \text{ siempre}$$

Ejemplo

- 2) Los productos de números respectivamente iguales son iguales.

Si en un aula cada asiento está ocupado por un alumno de modo que no quedan asientos vacíos ni alumnos de pie, ambos conjuntos están coordinados, luego el número de alumnos a es igual al número de sillas b . Es evidente que para sentar al triple número de alumnos, $a \times 3$ alumnos, haría falta triple número de sillas, $b \times 3$ sillas, y tendríamos $a \times 3 = b \times 3$.

Ejemplo

- 3) Producto de dos igualdades. Multiplicando miembro a miembro varias igualdades resulta otra igualdad.**

Ejemplos

1) Siendo

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline \text{resulta } ac = bd \end{array}$$

2) Siendo

$$\begin{array}{r} 6 = 2 \cdot 3 \\ a = c \\ mn = p \\ \hline \text{resulta } 6amn = 6cp \end{array}$$

145

II. LEY CONMUTATIVA

El orden de los factores no altera el producto.

Se pueden considerar dos casos: 1) que se trate de dos factores, 2) que se trate de más de dos factores.

1) Que se trate de dos factores.

Sea el producto 6×4 , vamos a demostrar que $6 \times 4 = 4 \times 6$. En efecto:

$$\begin{array}{l} 6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24 \\ 4 \times 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24 \end{array}$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

$$6 \times 4 = 4 \times 6$$

En general:

$$ab = ba$$

2) Que se trate de más de dos factores.

Sea el producto $5 \times 4 \times 3 \times 2$. Vamos a demostrar que invirtiendo el orden de los factores no se altera el producto.

En efecto: el producto $5 \times 4 \times 3 \times 2$ se puede considerar descompuesto en estos dos factores: $5 \cdot 4$ y $3 \cdot 2$, y como para dos factores ya está demostrado que el orden de los mismos no altera el producto, tendremos:

$$5 \cdot 4 \times 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \times 5 \cdot 4$$

El mismo producto $5 \times 4 \times 3 \times 2$ se puede considerar descompuesto en otros dos factores: $5 \cdot 4 \cdot 3$ y 2 y como el orden de los mismos no altera el producto, tendremos:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \times 2 = 2 \times 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Por medio de estas descomposiciones podemos hacer todas las combinaciones posibles de factores y en cada caso se demuestra que el orden de los mismos no altera el producto; luego queda demostrado lo que nos proponíamos.

En general:

$$abcd = bacd = cadb, \text{ etcétera.}$$

III. LEY ASOCIATIVA

146

El producto de varios números no varía sustituyendo dos o más factores por su producto.

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$\underbrace{(2 \times 3)}_6 \times 4 \times 5 = 120$$

$$(2 \times 3) \times \underbrace{(4 \times 5)}_{20} = 120$$

$$\underbrace{(2 \times 3)}_6 \times \underbrace{(4 \times 5)}_{20} = 120$$

En general: $abcd = (ab)cd = a(bcd)$

El *paréntesis* indica que primero deben efectuarse los productos encerrados dentro de ellos y luego las otras operaciones indicadas.

Ejemplo

IV. LEY DISOCIATIVA

147

El producto de varios números no varía descomponiendo uno o más factores en dos o más factores.

1) Sea el producto 8×5 ; puesto que $8 = 4 \times 2$, tendremos:

$$8 \times 5 = 4 \times 2 \times 5$$

2) Sea el producto 10×12 ; puesto que $10 = 5 \times 2$ y $12 = 3 \times 4$, tendremos:

$$10 \times 12 = 5 \times 2 \times 3 \times 4$$

Ejemplos

PRODUCTO DE IGUALDADES Y DESIGUALDADES

V. LEY DE MONOTONÍA

148

Consta de dos partes:

1) Multiplicando miembro a miembro desigualdades del mismo sentido e igualdades, resulta una desigualdad del mismo sentido que las dadas.

1) Siendo $8 > 3$
 $4 = 4$
resulta $8 \times 4 > 3 \times 4$
 $32 > 12$

2) Siendo $5 = 5$
 $3 < 6$
 $2 < 4$
resulta $5 \times 3 \times 2 < 5 \times 6 \times 4$
 $30 < 120$

3) Siendo $a > b$
 $c = d$
 $e > f$
 $g = h$
resulta $aceg > bdfh$

Ejemplos

2) Multiplicando miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido resulta una desigualdad del mismo sentido que las dadas.

Ejemplos

1) Siendo
$$\begin{array}{r} 5 > 3 \\ 6 > 4 \end{array}$$

resulta
$$\begin{array}{r} 5 \times 6 > 3 \times 4 \\ 30 > 12 \end{array}$$

2) Siendo
$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \\ e < f \end{array}$$

resulta
$$ace < bdf$$

Nota

Si se multiplican miembro a miembro desigualdades de **sentido contrario**, el resultado no puede anticiparse, pues puede ser una desigualdad de cualquier sentido o una igualdad.

Ejemplos

1) Multiplicando

$$\begin{array}{r} 6 > 3 \\ 4 < 15 \end{array}$$

resulta
$$\begin{array}{r} 6 \times 4 < 3 \times 15 \\ 24 < 45, \text{ desigualdad} \end{array}$$

2) Multiplicando

$$\begin{array}{r} 3 < 4 \\ 8 > 6 \end{array}$$

resulta
$$\begin{array}{r} 3 \times 8 = 4 \times 6 \\ 24 = 24, \text{ igualdad} \end{array}$$

149

VI. LEY DISTRIBUTIVA

Véase el número 153.

42

Ejercicio

1. Multiplicar las igualdades:

a)
$$\begin{cases} 5 = 5 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a = b \\ x = y \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ 4 = c \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 8 = 4 \times 2 \\ 5 \times 3 = 15 \\ 7 \times 4 = 14 \times 2 \end{cases}$$

R. a) $20 = 20$ b) $ax = by$ c) $4ab = 15c$ d) $3,360 = 3,360$

2. Aplicar la ley de uniformidad a las igualdades:

a)
$$\begin{cases} a = bc \\ mn = h \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5 = a \\ xy = 6 \\ 4 = 2 \times 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5 \times 6 = 30 \\ ac = bd \\ 6 \times 3 = 18 \end{cases}$$

R. a) $amn = bch$ b) $20xy = 24a$ c) $540ac = 540bd$

3. Siendo $abc = 30$, $bac = \dots$, $cba = \dots$ ¿Por qué? **R. $bac = 30$; $cba = 30$ por la ley conmutativa.**
4. ¿Dónde habrá más lápices, en 8 cajas de 10 lápices cada una o en 10 cajas de 8 lápices cada una? ¿Qué ley aplica? **R. Igual en las dos; la ley conmutativa.**
5. ¿Cuál es el mayor de los productos $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ y $7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8$? **R. Son iguales.**
6. Escribir el producto $2 \cdot 3 \cdot 4$ de 6 modos distintos aplicando la ley conmutativa.
R. $2 \cdot 3 \cdot 4$, $2 \cdot 4 \cdot 3$, $3 \cdot 2 \cdot 4$, $3 \cdot 4 \cdot 2$, $4 \cdot 2 \cdot 3$
7. El producto $abcd$ se puede escribir de 24 modos distintos aplicando la ley conmutativa. Escribir de nueve modos distintos. **R. Por ejemplo: $abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$, $bacd$, $badc$, $bcad$.**
8. $3 \cdot 5 \cdot 6 = 15 \cdot 6$ por ley ... **R. Asociativa.**
9. Siendo $3ab = 90$ y $a = 5$, ¿qué se puede escribir aplicando la ley asociativa? **R. $15b = 90$**
10. Escribir el producto de 6×9 de tres modos distintos aplicando la ley disociativa.
R. $2 \times 3 \times 9$, $6 \times 3 \times 3$, $2 \times 3 \times 3 \times 3$
11. Puesto que $20 = 5 \times 4$ tendremos, por la ley disociativa que $20 \times 3 = \dots$ **R. $20 \times 3 = 5 \times 4 \times 3$**
12. Transformar el producto 8×6 en un producto equivalente de 4 factores. ¿Qué ley aplica?
R. $1 \times 2 \times 3 \times 2$. Ley disociativa.
13. Aplicar la ley disociativa al producto $10 \times 18 \times 12$ transformándolo en un producto equivalente de 8 factores. **R. $2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3$**
14. Multiplicar las desigualdades:

$$a) \begin{cases} 9 > 2 \\ 5 > 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 1 < 2 \\ 3 < 5 \\ 6 < 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a > b \\ c > d \\ e > f \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 5 < 6 \\ m < n \\ a < p \\ 3 < 4 \end{cases}$$

R. a) $45 > 8$ b) $18 < 80$ c) $ace > bdf$ d) $15am < 24np$

15. Aplicar la ley de monotonía en:

$$a) \begin{cases} a = b \\ c > d \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5 > 3 \\ m = n \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 8 > 6 \\ a = b \\ c = d \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3 < 5 \\ 4 = 4 \\ p < q \\ a < b \end{cases}$$

R. a) $ac > bd$ b) $5m > 3n$ c) $8ac > 6bd$ d) $12ap < 20bp$

16. Hallar el resultado de multiplicar miembro a miembro en los casos siguientes:

$$a) \begin{cases} 5 > 4 \\ a < b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} m < p \\ n > q \end{cases}$$

R. a) No se sabe. b) No se sabe.

ALTERACIONES DE LOS FACTORES

I. Si el multiplicando se multiplica o divide entre un número el producto queda multiplicado por o dividido entre el mismo número.

1) Que el multiplicando se multiplique por un número.

Sea el producto 57×6 , por definición sabemos que:

$$57 \times 6 = 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57$$

Multipliquemos el multiplicando 57 por un número, 2 por ejemplo, y tendremos:

$$(57 \times 2)6 = 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2$$

Ahora bien, esta segunda suma contiene el mismo número de sumandos que la primera, pero cada sumando de la segunda es el doble de cada sumando de la primera, luego la segunda suma, o sea, el segundo producto, será el doble de la primera suma o primer producto; luego al multiplicar el multiplicando por 2, el producto queda multiplicado por 2.

2) Que el multiplicando se divida entre un número.

Sea el producto 57×6 . Por definición, sabemos que:

$$57 \times 6 = 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57$$

Dividiendo el multiplicando entre un número, 3 por ejemplo, tendremos:

$$(57 \div 3) \times 6 = 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3$$

Ahora bien, esta segunda suma contiene el mismo número de sumandos que la anterior, pero cada sumando de ésta es la tercera parte de cada sumando de la anterior, luego la segunda suma, o sea, el segundo producto será la tercera parte de la suma primera o producto anterior; luego al dividir el multiplicando entre 3 el producto ha quedado dividido entre 3.

II. Si el multiplicador se multiplica por, o divide entre un número, el producto queda multiplicado por, o dividido entre dicho número.

Sea el producto 57×6 . Multipliquemos o dividamos el multiplicador entre un número, 2 por ejemplo, y tendremos:

$$57 \times (6 \div 2)$$

y como el orden de factores no altera el producto, resulta:

$$57 \times (6 \div 2) = (6 \div 2) \times 57$$

con lo cual este caso queda comprendido en el anterior.

III. Si el multiplicando se multiplica por un número y el multiplicador se divide entre el mismo número o viceversa, el producto no varía.

En efecto: al multiplicar uno de los factores por un número, el producto queda multiplicado por dicho número, pero al dividir el otro factor entre el mismo número, el producto queda dividido entre el mismo número, luego no varía.

1. ¿Qué alteración sufre el producto de 88×5 si el 88 se multiplica por 4; si se divide entre 11? **R. Queda multiplicado por 4; queda dividido entre 11**
2. ¿Qué alteración sufre el producto de 16×8 si el 8 lo multiplicamos por 3; si lo dividimos entre 4? **R. Queda multiplicado por 3; queda dividido entre 4**
3. ¿Qué alteración sufre el producto de 6×5 si el 6 lo multiplicamos por 4 y el 5 lo multiplicamos por 5? **R. Queda multiplicado por 20**
4. ¿Qué alteración sufre el producto de 24×14 si el 24 lo dividimos entre 6 y el 14 lo multiplicamos por 2? **R. Queda dividido entre 3**
5. 72 es el producto de dos factores. ¿Qué variación experimentará este producto si el multiplicando lo multiplicamos por 3 y el multiplicador por 4? **R. Se convierte en 864**
6. 84 es el producto de dos factores. ¿Cuál sería este producto si el multiplicando lo multiplicamos por 5 y el multiplicador también lo multiplicamos por 5? **R. 2,100**
7. ¿Qué alteración sufrirá el producto de 150×21 si el 150 lo multiplicamos por 3 y el 21 lo dividimos entre 3? **R. Ninguna.**
8. Siendo $ab = 60$, escribir los productos:

a) $(3a)b = \dots$	d) $(a \div 5)b = \dots$
b) $a(2b) = \dots$	e) $a(b \div 5) = \dots$
c) $(2a)(4b) = \dots$	f) $(a \div 2)(b \div 2) = \dots$

R. a) 180 b) 120 c) 480 d) 12 e) 12 f) 15
9. $8a = b$. Escribir los productos:

a) $24a = \dots$	d) $16(2a) = \dots$
b) $4a = \dots$	e) $2(5a) = \dots$
c) $8(2a) = \dots$	f) $2(4a) = \dots$

R. a) $3b$ b) $\frac{b}{2}$ c) $2b$ d) $4b$ e) $\frac{5}{4}b$ f) b
10. $ab = 60$. Escribir los productos:

a) $(4a)(b \div 2) = \dots$	c) $(6a)(b \div 3) = \dots$
b) $(2a)(b \div 4) = \dots$	d) $(a \div 2)(b \div 10) = \dots$

R. a) 120 b) 30 c) 120 d) 3



Poco se conoce del desarrollo de la aritmética china antes de la era cristiana, pero es seguro que no ignoraban muchos de los problemas que preocuparon a los indios y egipcios. Antes del uso del ábaco (suanpan), representaban los números utili-

zando varillas de bambú llamadas *sangji*. La obra más antigua que se conoce sobre matemáticas chinas es **Chiu-Chang**, del siglo I (a. C.), copiada de una obra anterior.

Capítulo **XI**

OPERACIONES INDICADAS DE MULTIPLICACIÓN

I. PRÁCTICA

151

OPERACIONES INDICADAS DE MULTIPLICACIÓN EN QUE NO HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Deben efectuarse en este orden: **primero**, los productos indicados y luego las sumas o restas.

Ejemplos

1) Efectuar $5 + 3 \times 4 - 2 \times 7$.

Efectuamos primero los productos $3 \times 4 = 12$ y $2 \times 7 = 14$, y tendremos:

$$5 + 3 \times 4 - 2 \times 7 = 5 + 12 - 14 = 3 \quad \text{R.}$$

2) Efectuar $8 - 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 \times 3$.

$$8 - \underline{2 \times 3} + \underline{4 \times 5} - \underline{6 \times 3} = 8 - 6 + 20 - 18 = 4 \quad \text{R.}$$

44

Ejercicio

1. $9 + 2 \times 3$

R. 15

2. $5 \times 4 - 2$

R. 18

3. $30 - 7 \times 3$

R. 9

4. $3 \times 4 + 5 \times 6$

R. 42

5. $9 \times 3 - 4 \times 2$

R. 19

6. $15 - 5 \times 3 + 4$

R. 4

7. $9 + 6 \times 4 - 5$	R. 28	14. $50 + 5 \times 6 - 4 - 7 \times 2 + 4$	R. 66
8. $5 \times 7 - 3 + 8 \times 2$	R. 48	15. $18 \times 3 \times 2 - 1 - 5 \times 2 \times 3 - 9$	R. 68
9. $75 - 3 \times 4 + 6 - 5 \times 3$	R. 54	16. $5 \times 4 + 3 \times 2 - 4 \times 3 + 8 \times 6$	R. 62
10. $3 \times 2 + 7 \times 4 - 21$	R. 13	17. $300 - 5 \times 7 - 8 \times 3 - 2 \times 6$	R. 229
11. $5 \times 1 + 6 \times 2 + 7 \times 3$	R. 38	18. $3 \times 9 + 4 \times 8 - 5 \times 3 + 6 - 4 \times 2$	R. 42
12. $24 \times 2 - 3 \times 5 - 4 \times 6$	R. 9	19. $2 \times 7 - 5 \times 4 + 3 \times 6 - 2 \times 11 + 13$	R. 3
13. $49 - 3 \times 2 \times 5 + 8 - 4 \times 2$	R. 19	20. $8 - 2 \times 2 + 6 + 7 \times 3 - 3 \times 4 + 16$	R. 35

OPERACIONES INDICADAS DE MULTIPLICACIÓN EN QUE HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN

152

Deben efectuarse en este **orden**: primero, las operaciones encerradas en los paréntesis y luego las operaciones que queden indicadas.

1) Efectuar $(5 + 3)2 + 3(6 - 1)$.

En la práctica se suele suprimir el signo \times entre un número y un paréntesis o entre dos paréntesis. Así, en este ejemplo, $(5 + 3)2$ equivale a $(5 + 3) \times 2$ y $3(6 - 1)$ equivale a $3 \times (6 - 1)$.

Efectuamos primero los paréntesis: $(5 + 3) = 8$ y $(6 - 1) = 5$, y tendremos:

$$(5 + 3)2 + 3(6 - 1) = 8 \times 2 + 3 \times 5 = 16 + 15 = 31 \quad \text{R.}$$

2) Efectuar $(8 - 2)5 - 3(6 - 4) + 3(7 - 2)(5 + 4)$.

Efectuando primero los paréntesis, tendremos:

$$\begin{aligned} &(8 - 2)5 - 3(6 - 4) + 3(7 - 2)(5 + 4) \\ &= 6 \times 5 - 3 \times 2 + 3 \times 5 \times 9 = 30 - 6 + 135 = 159 \quad \text{R.} \end{aligned}$$

Ejemplos

Efectuar:

1. $(6 + 5 + 4)3$	R. 45	6. $(8 + 6 + 4)2$	R. 36
2. $(3 + 2)(4 + 5)$	R. 45	7. $(20 - 15 + 30 - 10)5$	R. 125
3. $(20 - 14)(8 - 6)$	R. 12	8. $(50 \times 6 \times 42 \times 18)9$	R. 2,041,200
4. $(8 + 5 + 3)(6 - 4)$	R. 32	9. $(5 - 2)3 + 6(4 - 1)$	R. 27
5. $(20 - 5 + 2)(16 - 3 + 2 - 1)$	R. 238	10. $3(8 - 1) + 4(3 + 2) - 3(5 - 4)$	R. 38
11. $(7 - 5)4 + 3(4 - 2) + (8 - 2)5 - 2(11 - 10)$	R. 42		
12. $(11 - 4)5 - 4(6 + 2) + 4(5 - 3) - 2(8 - 6)$	R. 7		
13. $(3 + 2)(5 - 1) + (8 - 1)3 - 4(6 - 2)$	R. 25		
14. $(5 - 1)(4 - 2) + (7 - 3)(4 - 1)$	R. 20		
15. $(3 - 2)(4 - 1) + 6(8 - 4) + (7 - 2)(9 - 7)$	R. 37		
16. $3(9 - 2) + 2(5 - 1)(4 + 3) + 3(6 - 4)(8 - 7)$	R. 83		
17. $(8 - 2)3 - 2(5 + 4) + 3(6 - 1)$	R. 15		
18. $300 - 3(5 - 2) + (6 + 1)(9 - 3) + 4(8 + 1)$	R. 369		
19. $500 + 6(3 + 1) + (8 - 5)3 - 2(5 + 4)$	R. 515		

45

Ejercicio

- | | |
|---|----------|
| 20. $6[3 + (5 - 1)2]$ | R. 66 |
| 21. $8[(5 - 3)(4 + 2)]$ | R. 96 |
| 22. $9[(10 - 4)2 + (30 - 20)2]$ | R. 288 |
| 23. $[(5 + 2)3 + (6 - 1)5][(8 + 6)3 - (4 - 1)2]$ | R. 1,656 |
| 24. $\{15 + (9 - 5)2\}\{(6 \times 4)3 + (5 - 4)(4 - 3)\}$ | R. 1,679 |
| 25. $800 + \{20 - 3 \times 4 + 5[18 - (6 - 1)3 + (5 - 2)4]\}$ | R. 883 |

II. TEORÍA

Estudiaremos ahora el modo de efectuar las operaciones indicadas de multiplicación sin efectuar lo encerrado dentro de los paréntesis, método indispensable cuando las cantidades están representadas por letras.

LEY DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN

153

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UN NÚMERO

Para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada sumando por este número y se suman los productos parciales.

Ejemplos

- 1) Efectuar $(5 + 4)2$. Decimos que:

$$(5 + 4)2 = 5 \times 2 + 4 \times 2 = 10 + 8 = 18 \quad \text{R.}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} (5 + 4)2 &= (5 + 4) + (5 + 4) = 5 + 4 + 5 + 4 = 5 + 5 + 4 + 4 \\ &= (5 + 5) + (4 + 4) = 5 \times 2 + 4 \times 2. \end{aligned}$$

- 2) Efectuar $(3 + 6 + 9)5$.

$$(3 + 6 + 9)5 = 3 \times 5 + 6 \times 5 + 9 \times 5 = 15 + 30 + 45 = 90 \quad \text{R.}$$

En general:

$$(a + b + c)n = an + bn + cn$$

La propiedad aplicada en los tres ejemplos anteriores constituye la *ley distributiva de la multiplicación respecto de la suma*.

154

PRODUCTO DE UNA RESTA POR UN NÚMERO

Para multiplicar una resta indicada por un número se multiplican el minuendo y el sustraendo por este número y se restan los productos parciales.

Ejemplos

- 1) Efectuar $(8 - 5)3$. Decimos que:

$$(8 - 5)3 = 8 \times 3 - 5 \times 3 = 24 - 15 = 9 \quad \text{R.}$$

En efecto: multiplicar $(8 - 5)3$ equivale a tomar $(8 - 5)$ como sumando tres veces, o sea:

$$\begin{aligned}(8 - 5)3 &= (8 - 5) + (8 - 5) + (8 - 5) \\ &= (8 + 8 + 8) - (5 + 5 + 5) = 8 \times 3 - 5 \times 3\end{aligned}$$

2) Efectuar $(15 - 9)6$.

$$(15 - 9)6 = 15 \times 6 - 9 \times 6 = 90 - 54 = 36 \quad \text{R.}$$

En general:

$$(a - b)n = an - bn$$

La propiedad aplicada en los dos ejemplos anteriores constituye la *ley distributiva de la multiplicación con relación a la resta*.

SUMA ALGEBRAICA

155

Una expresión como $7 - 2 + 9 - 3$ que contiene varios signos $+$ o $-$ es una **suma algebraica**.

En esta suma algebraica, 7, 2, 9 y 3 son los **términos** de la suma. Los términos que van precedidos del signo $+$ o que no llevan signo delante son **positivos**. Así, en este caso, 7 y 9 son positivos. Los términos que van precedidos del signo $-$ son **negativos**. Así, en este caso, -2 y -3 son negativos.

En la suma algebraica $a + b - c - d + e$, los términos positivos son a , b y e , y los negativos, $-c$ y $-d$.

PRODUCTO DE UNA SUMA ALGEBRAICA POR UN NÚMERO

156

Como hemos probado que la multiplicación es distributiva con relación a la suma y a la resta, tenemos que:

Para multiplicar una suma algebraica por un número se multiplica cada término de la suma por dicho número, poniendo delante de cada producto parcial el signo $+$ si el término que se multiplica es positivo y el signo $-$ si es negativo.

1) Efectuar $(8 - 2 + 6 - 3)5$.

$$\begin{aligned}(8 - 2 + 6 - 3)5 &= 8 \times 5 - 2 \times 5 + 6 \times 5 - 3 \times 5 \\ &= 40 - 10 + 30 - 15 = 45 \quad \text{R.}\end{aligned}$$

En general:

$$(a - b + c - d)n = an - bn + cn - dn$$

Ejemplo

FACTOR COMÚN

157

En la suma algebraica $2 \times 5 + 3 \times 2 - 4 \times 2$ los términos son los productos 2×5 , 3×2 y 4×2 . En cada uno de estos productos aparece el factor 2; 2 es un **factor común**.

Igualmente en la suma algebraica $9 \times 3 - 3 \times 5 - 3 \times 2 + 8 \times 3$ el 3 es un factor común; en la suma $ab + bc - bd$ el factor común es b ; en la suma $5ay + 5ax - 5an$ el factor común es $5a$.

158

LA OPERACIÓN DE SACAR FACTOR COMÚN

Ejemplos

- 1) Sabemos, por la ley distributiva, que:

$$(8 + 6)5 = 8 \times 5 + 6 \times 5$$

Invirtiendo los miembros de esta igualdad, tenemos:

$$8 \times 5 + 6 \times 5 = 5(8 + 6)$$

Aquí vemos que en el primer miembro tenemos el factor común 5 y en el segundo miembro aparece el factor común 5 *multiplicando* a un paréntesis dentro del cual hemos escrito $8 + 6$ que es *lo que queda* en el primer miembro dividiendo cada término entre 5. Hemos *sacado* el factor común 5.

- 2) Sabemos, por la ley distributiva, que

$$(9 - 7)2 = 9 \times 2 - 7 \times 2$$

Invirtiendo tenemos:

$$9 \times 2 - 7 \times 2 = 2(9 - 7)$$

En el primer miembro tenemos el factor común 2 y en el segundo miembro aparece el 2 *multiplicando* a un paréntesis dentro del cual hemos puesto lo que queda en el primer miembro dividiendo cada término entre el factor común 2. Hemos *sacado* el factor común 2.

- 3) Sacar el factor común en
- $9 \times 8 + 8 \times 3 - 8$
- .

$$9 \times 8 + 8 \times 3 - 8 = 8(9 + 3 - 1) \quad \text{R.}$$

- 4) Sacar el factor común en
- $ab - ac + a - am$
- .

$$ab - ac + a - am = a(b - c + 1 - m) \quad \text{R.}$$

- 5) Sacar el factor común en
- $7ax - 7ab + 7am$
- .

$$7ax - 7ab + 7am = 7a(x - b + m) \quad \text{R.}$$

- 6) Sacar el factor común en
- $4ab + 2ac - 8an$
- .

$$4ab + 2ac - 8an = 2a(2b + c - 4n) \quad \text{R.}$$

46

Efectuar, aplicando la ley distributiva:

Ejercicio

1. $(8 + 3)2$

R. 22

9. $3(2 - 1 + 5)$

R. 18

2. $(7 - 5)3$

R. 6

10. $5(a + b + c)$

R. $5a + 5b + 5c$

3. $(9 + 6 - 2)5$

R. 65

11. $a(5 - 3 + 2)$

R. $4a$

4. $(b + c)a$

R. $ab + ac$

12. $(a - b + c - d)x$

R. $ax - bx + cx - dx$

5. $(x - y)m$

R. $mx - my$

13. $(11 + 9 + 7 + 6)8$

R. 264

6. $(a + m - x)n$

R. $an + mn - nx$

14. $(m - n)3$

R. $3m - 3n$

7. $9(15 + 8 + 4)$

R. 243

15. $2a(b + c - d)$

R. $2ab + 2ac - 2ad$

8. $7(25 - 18)$

R. 49

16. $8x(11 - 3)$

R. $64x$

- | | | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| 17. $(2a - 3b + 5c)4$ | R. $8a - 12b + 20c$ | 24. $ab - ac + a$ | R. $a(b - c + 1)$ |
| 18. $3(11 - 6 + 9 - 7 + 1)$ | R. 24 | 25. $5x - xy$ | R. $x(5 - y)$ |
| 19. $3 \times 2 + 5 \times 2$ | R. $2(3 + 5)$ | 26. $8a - 4b$ | R. $4(2a - b)$ |
| 20. $ab + ac$ | R. $a(b + c)$ | 27. $2 \times 9 - 9 + 3 \times 9$ | R. $9(2 - 1 + 3)$ |
| 21. $5 \times 8 - 7 \times 5$ | R. $5(8 - 7)$ | 28. $5xy - 5xz$ | R. $5x(y - z)$ |
| 22. $9 \times 3 + 3 \times 4 + 5 \times 3$ | R. $3(9 + 4 + 5)$ | 29. $7ab + 6ac$ | R. $a(7b + 6c)$ |
| 23. $6 \times 5 - 7 \times 6 + 6$ | R. $6(5 - 7 + 1)$ | 30. $x^2y - x^2z - x^2$ | R. $x^2(y - z - 1)$ |
| 31. $3 \times 5 + 5 \times 6 - 5 + 5 \times 9$ | R. $5(3 + 6 - 1 + 9)$ | | |
| 32. $ax - am + an - a$ | R. $a(x - m + n - 1)$ | | |
| 33. $9 \times 5 - 12 \times 7 + 6 \times 11$ | R. $3(15 - 28 + 22)$ | | |
| 34. $3b + 6ab - 9b + 12b$ | R. $3b(1 + 2a - 3 + 4)$ | | |
| 35. $9 \times 7 \times 2 + 5 \times 3 \times 9 - 2 \times 4 \times 9$ | R. $9(14 + 15 - 8)$ | | |
| 36. $5ab - 10ac + 20an - 5a$ | R. $5a(b - 2c + 4n - 1)$ | | |
| 37. $ax^2y - 9ay + ay - 3ay$ | R. $ay(x^2 - 9 + 1 - 3)$ | | |
| 38. $15a^2bx + 3ax - 9anx - 6amx$ | R. $3ax(5ab + 1 - 3n - 2m)$ | | |

PRODUCTO DE SUMAS Y DIFERENCIAS

PRODUCTO DE DOS SUMAS

159

Para multiplicar dos sumas indicadas se multiplican todos los términos de la primera por cada uno de los términos de la segunda y se suman los productos parciales.

1) Efectuar $(6 + 5)(3 + 2)$. Decimos que:

$$\begin{aligned}(6 + 5)(3 + 2) &= 6 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 2 \\ &= 18 + 15 + 12 + 10 = 55\end{aligned}$$

En efecto: el producto $(6 + 5)(3 + 2)$ se compondrá de tres veces $(6 + 5)$ más dos veces $(6 + 5)$, luego:

$$\begin{aligned}(6 + 5)(3 + 2) &= (6 + 5)3 + (6 + 5)2 \\ &= 6 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 2\end{aligned}$$

2) Efectuar $(9 + 7)(5 + 4)$.

$$\begin{aligned}(9 + 7)(5 + 4) &= 9 \times 5 + 7 \times 5 + 9 \times 4 + 7 \times 4 \\ &= 45 + 35 + 36 + 28 = 144 \quad \text{R.}\end{aligned}$$

En general:

$$(a + b + c)(m + n) = am + bm + cm + an + bn + cn$$

Ejemplos

160 PRODUCTO DE SUMA POR DIFERENCIA

Para multiplicar una suma por una diferencia se suman los productos de cada término de la suma por el minuendo y de esta suma se restan los productos de cada término de la suma por el sustraendo.

Ejemplo

1) Efectuar $(9 + 7)(5 - 4)$. Decimos que:

$$(9 + 7)(5 - 4) = 9 \times 5 + 7 \times 5 - 9 \times 4 - 7 \times 4 \\ = 45 + 35 - 36 - 28 = \mathbf{16} \quad \text{R.}$$

En efecto: el producto $(9 + 7)(5 - 4)$ se compondrá de cinco veces $(9 + 7)$ menos cuatro veces $(9 + 7)$, luego:

$$(9 + 7)(5 - 4) = (9 + 7)5 - (9 + 7)4 \\ = (9 \times 5 + 7 \times 5) - (9 \times 4 + 7 \times 4) = 9 \times 5 + 7 \times 5 - 9 \times 4 - 7 \times 4 \quad (125)$$

En general:

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$$

161 CASO PARTICULAR. PRODUCTO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS POR SU DIFERENCIA

El producto de la suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de los dos números.

Ejemplos

1) Efectuar $(6 + 5)(6 - 5)$. Decimos que:

$$(6 + 5)(6 - 5) = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 9$$

En efecto: aplicando la regla explicada en el número anterior, tenemos:

$$(6 + 5)(6 - 5) = 6 \times 6 + 5 \times 6 - 6 \times 5 - 5 \times 5 \\ = 6 \times 6 - 5 \times 5 = 6^2 - 5^2$$

2) Efectuar $(9 - 3)(9 + 3)$.

$$(9 - 3)(9 + 3) = 9^2 - 3^2 = 81 - 9 = \mathbf{72} \quad \text{R.}$$

En general:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

162 PRODUCTO DE DOS DIFERENCIAS

Para multiplicar dos diferencias indicadas se suma el producto de los minuendos con el producto de los sustraendos y de esta suma se restan los productos de cada minuendo por el otro sustraendo.

1) Efectuar $(7 - 4)(3 - 2)$. Decimos que:

$$\begin{aligned}(7 - 4)(3 - 2) &= 7 \times 3 + 4 \times 2 - 7 \times 2 - 4 \times 3 \\ &= 21 + 8 - 14 - 12 = 3\end{aligned}$$

En efecto: el producto $(7 - 4)(3 - 2)$ se compondrá de tres veces $(7 - 4)$ menos dos veces $(7 - 4)$, luego:

$$\begin{aligned}(7 - 4)(3 - 2) &= (7 - 4)3 - (7 - 4)2 \\ &= (7 \times 3 - 4 \times 3) - (7 \times 2 - 4 \times 2) \\ &= (7 \times 3 + 4 \times 2) - (7 \times 2 + 4 \times 3) \quad (126) \\ &= 7 \times 3 + 4 \times 2 - 7 \times 2 - 4 \times 3 \quad (125) \quad \text{R.}\end{aligned}$$

2) Efectuar $(5 - 3)(8 - 6)$.

$$\begin{aligned}(5 - 3)(8 - 6) &= 5 \times 8 + 3 \times 6 - 5 \times 6 - 3 \times 8 \\ &= 40 + 18 - 30 - 24 = 4 \quad \text{R.}\end{aligned}$$

En general:

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - ad - bc$$

Efectuar, aplicando las reglas estudiadas:

- | | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| 1. $(7 + 2)(5 + 4)$ | R. 81 |
| 2. $(a + b)(m + n)$ | R. $am + bm + an + bn$ |
| 3. $(5 + 3)(4 - 2)$ | R. 16 |
| 4. $(8 - 5)(6 + 9)$ | R. 45 |
| 5. $(a + b)(m - n)$ | R. $am + bm - an - bn$ |
| 6. $(9 - 3)(7 - 2)$ | R. 30 |
| 7. $(a - b)(m - n)$ | R. $am + bn - an - bm$ |
| 8. $(8 + 3 + 2)(5 + 7)$ | R. 156 |
| 9. $(a - b)(4 + 3)$ | R. $4a - 4b + 3a - 3b = 7a - 7b$ |
| 10. $(m + n)(5 - 2)$ | R. $5m + 5n - 2m - 2n = 3m + 3n$ |
| 11. $(8 - 2)(11 + 9 + 6)$ | R. 156 |
| 12. $(15 - 7)(9 - 4)$ | R. 40 |
| 13. $(25 + 3)(x - y)$ | R. $25x + 3x - 25y - 3y = 28x - 28y$ |
| 14. $(a + 3)(b + 6)$ | R. $ab + 3b + 6a + 18$ |

Hallar, por simple inspección, el resultado de:

- | | | | |
|----------------------|----------------|------------------------|----------------|
| 15. $(3 + 2)(3 - 2)$ | R. 5 | 19. $(5 - b)(b + 5)$ | R. $25 - b^2$ |
| 16. $(8 - 5)(8 + 5)$ | R. 39 | 20. $(2a - 7)(7 + 2a)$ | R. $4a^2 - 49$ |
| 17. $(m + n)(m - n)$ | R. $m^2 - n^2$ | 21. $(4 + 7)(7 - 4)$ | R. 33 |
| 18. $(a - 3)(a + 3)$ | R. $a^2 - 9$ | 22. $(b - a)(a + b)$ | R. $b^2 - a^2$ |
| 23. $(9 + b)(9 - b)$ | R. $81 - b^2$ | | |

REGLA GENERAL PARA MULTIPLICAR SUMAS ALGEBRAICAS

De acuerdo con las reglas aplicadas en los números anteriores, tenemos que:

$$(a + b)(c + d) = ab + bc + ad + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

Observando estos resultados, vemos que lo que hemos hecho ha sido multiplicar **cada término del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis** poniendo **delante** de cada producto el signo + cuando los dos factores que se multiplican tienen **signos iguales** (los dos + o los dos -) y el signo - cuando tienen **signos distintos**. El primer término de cada producto, que no lleva ningún signo delante, se entenderá que es positivo.

Podemos, por tanto, enunciar la siguiente:

REGLA GENERAL

Para multiplicar dos sumas algebraicas se multiplica cada término de la primera suma por cada término de la segunda suma, poniendo delante de cada producto el signo + cuando los dos términos que se multiplican tienen signos iguales, y el signo - cuando tienen signos distintos.

Esta regla general es de gran utilidad porque para el alumno es muy difícil retener cada una de las reglas anteriores.

Vamos a resolver varios casos aplicando esta regla general.

Ejemplos

- 1)** Efectuar $(8 - 6)(5 + 4)$ por la regla general.

$$\begin{aligned}(8 - 6)(5 + 4) &= 8 \times 5 - 6 \times 5 + 8 \times 4 - 6 \times 4 \\ &= 40 - 30 + 32 - 24 = \mathbf{18} \quad \mathbf{R.}\end{aligned}$$

Hemos multiplicado 8 por 5 y como 8 y 5 tienen signos iguales (al no llevar signo delante llevan +) delante del producto 8×5 va un + (que no se escribe por ser el primer término, pero va sobreentendido). Después multiplicamos - 6 por 5 poniendo delante de este producto el signo - porque 6 y 5 tienen signos distintos; luego 8 por 4, poniendo + delante del producto porque 8 y 4 tienen signos iguales y por último - 6 por 4 poniendo delante del producto - porque tienen signos distintos.

- 2)** Efectuar $(9 - 3)(8 - 5)$ por la regla general.

$$\begin{aligned}(9 - 3)(8 - 5) &= 9 \times 8 - 3 \times 8 - 9 \times 5 + 3 \times 5 \\ &= 72 - 24 - 45 + 15 = \mathbf{18} \quad \mathbf{R.}\end{aligned}$$

Hemos multiplicado 9 por 8 poniendo delante + (que se sobreentiende) porque 8 y 9 tienen signo + ; - 3 por 8, este producto lleva delante signo - porque tienen signos distintos; 9 por - 5, este producto lleva - delante porque son signos distintos y - 3 por - 5, este producto lleva delante + porque son signos iguales.

3) Efectuar $(7 - 4 + 2)(6 - 5)$.

$$(7 - 4 + 2)(6 - 5) = 7 \times 6 - 4 \times 6 + 2 \times 6 - 7 \times 5 + 4 \times 5 - 2 \times 5 \\ = 42 - 24 + 12 - 35 + 20 - 10 = 5 \quad \text{R.}$$

4) Efectuar $(a - b - c)(m - x)$.

$$(a - b - c)(m - x) = am - bm - cm - ax + bx + cx \quad \text{R.}$$

Efectuar, aplicando la regla general:

1. $(8 + 3)(5 + 2)$ R. 77

2. $(4 - 1)(5 + 3)$ R. 24

3. $(9 - 7)(6 - 3)$ R. 6

4. $(8 + 6)(5 - 2)$ R. 42

5. $(15 - 6)(9 - 4)$ R. 45

6. $(11 + 3)(8 - 5)$ R. 42

7. $(9 + 7)(4 + 8)$ R. 192

8. $(a - b)(m - n)$ R. $am - bm - an + bn$

9. $(8 - 7)(x - y)$ R. $8x - 7x - 8y + 7y = x - y$

10. $(9 - 7 + 2)(5 + 6)$ R. 44

11. $(4 - 3)(6 + 5 - 2)$ R. 9

12. $(a - b)(c + d)$ R. $ac - bc + ad - bd$

13. $(m + n)(x - y)$ R. $mx + nx - my - ny$

14. $(p - q)(m - n)$ R. $mp - mq - np + nq$

15. $(a + b - c)(r - s)$ R. $ar + br - cr - as - bs + cs$

16. $(b - 4)(5 - 2 + 3)$ R. $5b - 20 - 2b + 8 + 3b - 12 = 6b - 24$

17. $(a - b - c)(m + n - p)$ R. $am - bm - cm + an - bn - cn - ap + bp + cp$

18. $(7 - 4 + 3)(5 - 2 - 1)$ R. 12

19. $(a - b + c - d)(m - n)$ R. $am - bm + cm - dm - an + bn - cn + dn$

20. $(5 + 3)(4 - 2 + 5 - 3)$ R. 32

48

Ejercicio

PRODUCTO DE UN PRODUCTO INDICADO POR UN NÚMERO

164

Para multiplicar un producto indicado por un número se multiplica uno de los factores del producto por dicho número.

Vamos a multiplicar el producto 4×5 por 6.

Decimos que basta multiplicar uno solo de los factores, bien el 4 o el 5, por el multiplicador 6.

Multiplicando el factor 5, tenemos:

$$(4 \times 5)6 = 4(5 \times 6) = 4(30) = 120 \quad \text{R.}$$

Multiplicando el factor 4, tenemos:

$$(4 \times 5)6 = (4 \times 6)5 = 24 \times 5 = 120 \quad \text{R.}$$

En efecto: al multiplicar uno de los factores del producto 4×5 por el multiplicador 6, el producto 4×5 queda multiplicado por 6 porque hemos visto (150) que si el multiplicando o multiplicador se multiplican por un número, el producto queda multiplicado por dicho número.

Si se trata de un producto de más de dos factores, se procederá del mismo modo, multiplicando **uno solo** de los factores por el multiplicador. Así:

$$(2 \times 3 \times 4)5 = 2(3 \times 5)4 = 2 \times 15 \times 4 = \mathbf{120} \quad \text{R.}$$

En este caso la regla se justifica considerando el producto $2 \times 3 \times 4$ descompuesto en dos factores, de este modo: $2 \times (3 \times 4)$ y aplicándole la regla dada para el caso de dos factores.

165

PRODUCTO DE DOS PRODUCTOS INDICADOS

Para multiplicar dos productos indicados se forma un solo producto con todos los factores.

Vamos a multiplicar el producto 2×3 por el producto $4 \times 5 \times 6$. Decimos que:

$$(2 \times 3)(4 \times 5 \times 6) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = \mathbf{720} \quad \text{R.}$$

En efecto: al multiplicar el factor 3 del producto 2×3 por el producto $4 \times 5 \times 6$, el producto 2×3 queda multiplicado por el producto $4 \times 5 \times 6$, según el caso anterior.

49

Efectuar, aplicando las reglas anteriores:

Ejercicio

1. $(4 \times 5)3$

R. 60

2. $5(3 \times 7)$

R. 105

3. $(3a)a$

R. $3a^2$

4. $(7a^2b)a$

R. $7a^3b$

5. $(5 \times 6 \times 7)2$

R. 420

6. $(7 \times 3)2 - (4 \times 5)2$

R. 2

7. $(6 \times 5)9 + (3 \times 4)3$

R. 306

8. $(5 \times 7)(3 \times 8)$

R. 840

9. $(abc)(ab^2c^2)$

R. $a^2b^3c^3$

10. $(4 \times 3 \times 5)(2 \times 4 \times 6)$

R. 2,880



Babilonios e indios fueron los primeros en conocer la división. Los métodos actuales para resolver la división se derivan de los indios, que disponían en una mesa de arena los elementos de la operación: dividendo, divisor, cociente y residuo. Estos

conocimientos fueron transmitidos a Europa por los árabes. **Leonardo de Pisa** los expuso en 1202. **Oughtred**, en 1647, propuso el signo (:) para indicar la división.

Capítulo **XII**

DIVISIÓN

DIVISIÓN. SU OBJETO

166

La división es una operación inversa de la multiplicación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).

Notación

El signo de la división es \div o una rayita horizontal o inclinada colocada entre el dividendo y el divisor.

Así, la división de D (dividendo) entre d (divisor) y siendo c el cociente, se indica de los tres modos siguientes:

$$D \div d = c \quad \frac{D}{d} = c \quad D/d = c$$

De acuerdo con la definición, podemos decir que **dividir un número (dividendo) entre otro (divisor) es hallar un número (cociente) que multiplicado por el divisor dé el dividendo.**

Así, dividir 20 entre 4 es hallar el número que multiplicado por 4 dé 20. Este número es 5, luego $20 \div 4 = 5$.

Del propio modo:

$$8 \div 4 = 2 \text{ porque } 2 \times 4 = 8,$$

$$\frac{15}{5} = 3 \text{ porque } 3 \times 5 = 15,$$

y en general,
si $D \div d = c$ es
porque $cd = D$.

Ya que el dividendo es el producto del divisor por el cociente, es evidente que **el dividendo dividido entre el cociente tiene que dar el divisor**:

Así: $14 \div 2 = 7$ y $14 \div 7 = 2$
 $18 \div 6 = 3$ y $18 \div 3 = 6$

En general si $D \div d = c$ se verifica que $D \div c = d$.

167

COCIENTE

Etimológicamente la palabra **cociente** significa **cuántas veces**. El cociente indica las veces que el dividendo contiene al divisor. Así, en $10 \div 5 = 2$, el cociente 2 indica que el dividendo 10 contiene dos veces al divisor 5.

168

DIVISIÓN EXACTA

La división es **exacta** cuando existe un número entero que multiplicado por el divisor da el dividendo, o sea, cuando el dividendo es múltiplo del divisor.

Así, la división $24 \div 3 = 8$ es exacta, porque $8 \times 3 = 24$. El número entero 8 es el **cociente exacto** de 24 entre 3 e indica que 24 contiene a 3, ocho veces exactamente.

La división $\frac{36}{9} = 4$ es exacta porque $4 \times 9 = 36$. El número entero 4 es el cociente exacto de 36 entre 9 e indica que 36 contiene a 9 cuatro veces exactamente.

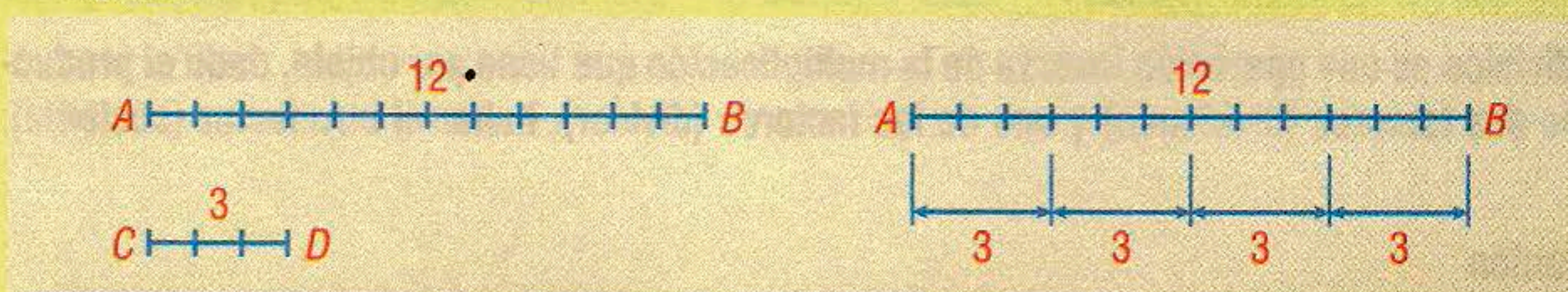
169

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIÓN EXACTA

Ejemplo

Representar gráficamente la división $12 \div 3$.

Figura 25



Primero (Fig. 25) representamos gráficamente, por medio de segmentos, el dividendo 12 y el divisor 3. El segmento $AB = 12$ representa el dividendo y el segmento $CD = 3$ representa el divisor. Se transporta el segmento divisor sobre el segmento dividendo consecutivamente, a partir del extremo A, y vemos que el segmento divisor está contenido 4 veces exactamente en el segmento dividendo. Este número de veces, 4, que el dividendo contiene al divisor, representa el cociente exacto de 12 entre 3.

50

Ejercicio

- Siendo $3a = 18$, se tendrá que $18 \div a = \dots$ y $a = \dots$ **R. 3, 6**
- Si $85 = 5x$, ¿qué número es x ? **R. 17**
- Siendo $ab = m$, se tendrá que $m \div a = \dots$ y $m \div b = \dots$ **R. b, a**

4. Si $a \div b = c$, se tendrá que $a \div c = \dots$ y $bc = \dots$ **R. b, a**
5. Siendo $\frac{12}{3} = n$ se tendrá que $3n = \dots$ y $\frac{12}{n} = \dots$ **R. $12, 3$**
6. Siendo $\frac{a}{5} = 32$ ¿qué número es a ? **R. 160**
7. Si $\frac{x}{y} = 6$, se tendrá que $\frac{x}{6} = \dots$ y que $6y = \dots$ **R. y, x**
8. Si en una división exacta el dividendo es 2,940 y el cociente 210, ¿cuál es el divisor? **R. 14**
9. Si el cociente exacto es 851 y el divisor 93, ¿cuál es el dividendo? **R. $79,143$**
10. Si al dividir x entre 109 el cociente es el doble del divisor, ¿qué número es x ? **R. $23,762$**
11. Se reparten \$731 entre varias personas, por partes iguales, y a cada una tocan \$43. ¿Cuántas eran las personas? **R. 17**
12. Uno de los factores del producto 840 es 12. ¿Cuál es el otro factor? **R. 70**
13. ¿Por cuál número hay que dividir a 15,480 para que el cociente sea 15? **R. $1,032$**
14. Representar gráficamente las divisiones:

a) $9 \div 3$	c) $16 \div 4$	e) $36 \div 4$
b) $10 \div 2$	d) $21 \div 7$	f) $20 \div 5$

DIVISIÓN ENTERA O INEXACTA

170

Cuando no existe ningún número entero que multiplicado por el divisor dé el dividendo, o sea, cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, la división es **entera** o **inexacta**.

Así, la división $23 \div 6$ es entera o inexacta porque no hay ningún número entero que multiplicado por 6 nos dé 23, o sea, que 23 no es múltiplo de 6.

DIVISIÓN ENTERA POR DEFECTO Y POR EXCESO

171

La división $23 \div 6$ no es exacta porque 23 no es múltiplo de 6, pero se tiene que:

$$3 \times 6 = 18 < 23 \quad \text{y} \quad 4 \times 6 = 24 > 23$$

lo que indica que el cociente exacto de $23 \div 6$ es mayor que 3 y menor que 4. En este caso, 3 es el **cociente por defecto** y 4 el **cociente por exceso**.

En la división entera $40 \div 7$ se tiene que

$$5 \times 7 = 35 < 40 \quad \text{y} \quad 6 \times 7 = 42 > 40$$

lo que nos dice que el cociente exacto sería mayor que 5 y menor que 6. 5 es el cociente por defecto y 6 el cociente por exceso.

En general, si D no es múltiplo de d , el cociente $D \div d$ está comprendido entre dos números consecutivos. Si llamamos c al menor, el mayor será $c + 1$, y tendremos:

$$cd < D \quad \text{y} \quad (c + 1)d > D$$

El cociente exacto de la división $D \div d$ será mayor que c y menor que $c + 1$. Entonces, c es el cociente por defecto y $c + 1$ el cociente por exceso.

172

RESIDUO POR DEFECTO

En la división $23 \div 4$ el cociente por defecto es 5. Si del dividendo 23 restamos el producto 4×5 , la diferencia $23 - 4 \times 5 = 3$ es el **residuo por defecto**.

En la división $42 \div 9$ el cociente por defecto es 4 y la diferencia $42 - 9 \times 4 = 6$ es el residuo por defecto.

En general, si llamamos c al cociente por defecto de $D \div d$, el residuo por defecto r vendrá dado por la fórmula:

$$r = D - dc \quad (1)$$

Residuo por defecto de una división entera es la **diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente por defecto**.

En la diferencia de la igualdad (1) anterior, como en toda diferencia, el minuendo D tiene que ser la suma del sustraendo dc y la diferencia r , luego:

$$D = dc + r$$

y en la misma igualdad (1) por ser la resta del minuendo y la diferencia igual al sustraendo, tendremos:

$$D - r = dc$$

173

RESIDUO POR EXCESO

En la división $23 \div 4$ el cociente por exceso es 6. Si del producto 6×4 restamos el dividendo 23, la diferencia $4 \times 6 - 23 = 1$ es el **residuo por exceso**.

En la división $42 \div 9$ el cociente por exceso es 5 y la diferencia $9 \times 5 - 42 = 3$ es el residuo por exceso.

En general, siendo c el cociente por defecto de $D \div d$, el cociente por exceso será $c + 1$ y el residuo por exceso r' vendrá dado por la fórmula:

$$r' = d(c + 1) - D \quad (2)$$

Residuo por exceso es la **diferencia entre el producto del divisor por el cociente por exceso y el dividendo**.

En la diferencia (2) anterior el minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia, luego

$$D + r' = d(c + 1)$$

y como el minuendo menos la diferencia da el sustraendo, se tendrá:

$$d(c + 1) - r' = D$$

SUMA DE LOS DOS RESIDUOS

174

1) Consideremos la división entera $26 \div 7$.

El cociente por defecto es 3 y el residuo por defecto $26 - 7 \times 3 = 5$.

El cociente por exceso es 4 y el residuo por exceso es $7 \times 4 - 26 = 2$.

Sumando los dos residuos tenemos: $5 + 2 = 7$, **que es el divisor**.

2) Consideremos la división $84 \div 11$.

El cociente por defecto es 7 y el residuo por exceso $84 - 7 \times 11 = 7$.

El cociente por exceso es 8 y el residuo por exceso $11 \times 8 - 84 = 4$.

La suma de los dos residuos $7 + 4 = 11$, **es el divisor**.

La suma de los restos por defecto y por exceso es igual al divisor.

Demostración general

Hemos establecido antes (172 y 173) que el residuo por defecto r y el residuo por exceso r' vienen dados por las fórmulas:

$$r = D - dc \quad (1)$$

$$r' = d(c + 1) - D$$

Efectuando el producto $d(c + 1)$ en esta última igualdad, se tiene:

$$r' = dc + d - D \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$r + r' = D - dc + dc + d - D$$

y simplificando D y $-D$, $-dc$ y $+dc$, queda:

$$r + r' = d$$

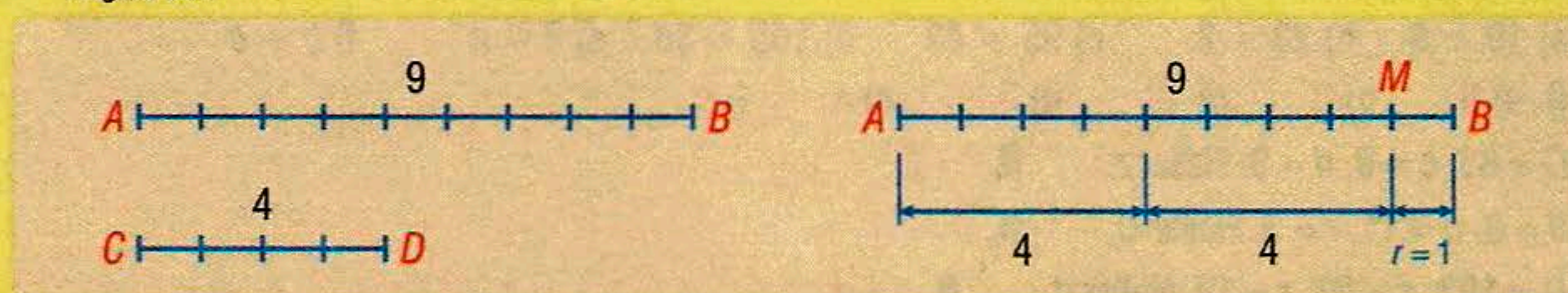
que era lo que queríamos demostrar.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIÓN ENTERA POR DEFECTO

175

Representar gráficamente la división $9 \div 4$, por defecto.

Figura 26



El segmento $AB = 9$ (Fig. 26) representa el dividendo y el segmento $CD = 4$ el divisor. Se transporta el segmento divisor sobre el segmento dividendo, consecutivamente, a partir del extremo A y vemos que el divisor está contenido en el dividendo 2 veces (cociente 2) y que sobra el segmento $MB = 1$, que representa el residuo por defecto.

Ejemplo

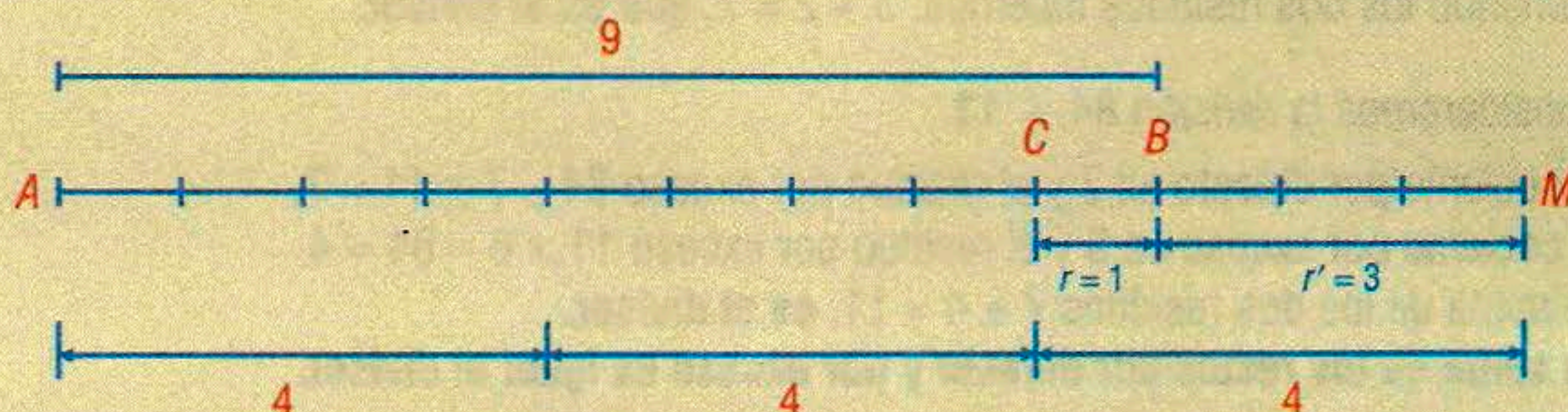
176

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIÓN ENTERA POR EXCESO

Ejemplo

Representar gráficamente la división $9 \div 4$ por exceso.

Figura 27



En la figura 27 está representada gráficamente la división por exceso $9 \div 4$. El cociente por exceso es 3 (las veces que se ha llevado el divisor 4 sobre el dividendo 9) y el residuo por exceso es el segmento $BM = 3$. En la figura está representado también, gráficamente, que la suma del residuo por exceso que es el segmento $BM = 3$ y el residuo por defecto $CB = 1$ es igual al segmento $CM = 4$, que es el divisor.

177

LA DIVISIÓN COMO RESTA ABREVIADA

La representación gráfica de la división exacta y la división entera nos hacen ver que la división no es más que una **resta abreviada** en la cual el divisor se resta todas las veces que se pueda del dividendo y el cociente indica el número de restas.

51

Ejercicio

1. Hallar el cociente por defecto y por exceso en:

- a) $18 \div 5$ b) $27 \div 8$ c) $31 \div 6$ d) $42 \div 15$ e) $80 \div 15$ f) $60 \div 13$

R. a) 3, 4 b) 3, 4 c) 5, 6 d) 2, 3 e) 5, 6 f) 4, 5

2. Hallar los restos por defecto y por exceso en:

- a) $9 \div 2$ b) $11 \div 4$ c) $19 \div 5$ d) $27 \div 8$ e) $54 \div 16$ f) $87 \div 24$

R. a) 1, 1 b) 3, 1 c) 4, 1 d) 3, 5 e) 6, 10 f) 15, 9

3. Sin hacer operación alguna, decir cuál será la suma de ambos restos en:

- a) $19 \div 9$ b) $23 \div 8$ c) $95 \div 43$ d) $105 \div 36$ e) $8 \div a$ f) $b \div c$

R. a) 9 b) 8 c) 43 d) 36 e) a f) c

4. $D = 83$, $c = 9$, $d = 9$. Hallar r . R. $r = 2$

5. $d = 8$, $c = 11$, $r = 3$. Hallar D . R. $D = 91$

6. $D = 102$, $c = 23$, $r = 10$. Hallar d . R. $d = 4$

7. $d = 1,563$, $c = 17$, $r = 16$. Hallar D . R. $D = 26,587$

8. $d = 80$, $D = 8,754$, $r = 34$. Hallar c . R. $c = 109$

9. Se repartió cierto número de manzanas entre 19 personas y después de dar 6 manzanas a cada persona sobraron 8 manzanas. ¿Cuántas manzanas había? R. 122

10. Si \$163 se reparten entre cierto número de personas, a cada una tocarían \$9 y sobrarían \$10. ¿Cuál es el número de personas? **R. 17**
11. Repartí 243 lápices entre 54 personas y sobraron 27 lápices. ¿Cuántos lápices di a cada una? **R. 4**
12. $D = 93$, $d = 12$, cociente por exceso = 8. Hallar r' . **R. $r' = 3$**
13. $d = 11$, cociente por exceso = 6 y $r' = 4$. Hallar D . **R. $D = 62$**
14. $D = 89$, $r' = 1$, $d = 9$. Hallar el cociente por exceso. **R. $c' = 10$**
15. Si el divisor es 11 y el resto por defecto es 6, ¿cuál es el resto por exceso? **R. $r' = 5$**
16. Si el divisor es 31 y el resto por exceso 29, ¿cuál es el resto por defecto? **R. $r = 2$**
17. El cociente por defecto es 7, $r = 2$, $r' = 2$, ¿cuál es el dividendo? **R. $D = 30$**
18. El cociente por defecto es 4, $r = 6$ y $r' = 5$. Hallar D . **R. $D = 50$**
19. El cociente por defecto es 8, el divisor 6 y el residuo 4. Hallar el dividendo. **R. $D = 52$**
20. ¿Cuál es el menor número que debe restarse del dividendo, en una división inexacta, para que se haga exacta? **R. r**
21. ¿Qué número hay que restar de 520 para que la división $520 \div 9$ sea exacta? **R. 7**
22. ¿Cuál es el menor número que debe añadirse al dividendo, en una división inexacta, para que se haga exacta? **R. r'**
23. ¿Qué número debe añadirse a 324 para que la división $324 \div 11$ sea exacta? **R. 6**
24. Si el dividendo es 86, el cociente por defecto 4 y el residuo por defecto 6, ¿cuál es el divisor? **R. 20**
25. Si el dividendo es 102, el divisor 9 y el residuo por defecto 3, ¿cuál es el cociente por defecto? **R. 11**
26. Si en una división el dividendo se aumenta en un número igual al divisor, ¿qué variación sufre el cociente? ¿Y el residuo? **R. Aumenta 1; no varía.**
27. El dividendo es 42 y el divisor 6. ¿Qué relación tiene el cociente de la división $(42 + 6) \div 6$ con el cociente de la división anterior? **R. Vale 1 más.**
28. Si en una división se disminuye el dividendo en un número igual al divisor, ¿qué le sucede al cociente? ¿Y al residuo? **R. Disminuye en 1; no varía.**
29. ¿Qué relación guarda el cociente de la división $96 \div 8$ con el cociente de la división $(96 - 8) \div 8$? **R. Vale 1 más.**

DIVISIÓN ENTRE LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS

178

Para dividir un entero entre la unidad seguida de ceros, se separan de su derecha, con un punto decimal, tantas cifras como ceros acompañen a la unidad, porque con ello el valor relativo de cada cifra se hace tantas veces menor como indica el divisor.

1) $567 \div 10 = 56.7$ **R.**

3) $985,678 \div 1,000 = 985.678$ **R.**

2) $1,254 \div 100 = 12.54$ **R.**

4) $400 \div 100 = 4$ **R.**

5) $76,000 \div 1,000 = 76$ **R.**

Ejemplos

NÚMERO DE CIFRAS DEL COCIENTE

179

El cociente tiene siempre una cifra más que las cifras que quedan a la derecha del primer dividendo parcial.

Así, al dividir 54,678 entre 78 separamos en el dividendo, para empezar la operación, las tres primeras cifras de la izquierda, quedando dos a la derecha, luego el cociente tendrá una cifra más que estas dos que quedan a la derecha, o sea, tres cifras.

180

PRUEBAS DE LA DIVISIÓN

Puede verificarse de tres modos:

- 1) Multiplicando el divisor por el cociente y sumándole el residuo por defecto, tiene que darnos el dividendo si la operación está correcta.
- 2) Si la división es exacta, dividiendo el dividendo entre el cociente, tiene que darnos el divisor. Si no es exacta, se resta el residuo del dividendo, y esta diferencia, dividida entre el cociente, tiene que dar el divisor.
- 3) Por la prueba del 9 (véase el número 280) y del 11 (véase el número 281).

52

Ejercicio

1. Efectuar las divisiones siguientes:

$824 \div 14$	$14 \div 10$	$5,600 \div 100$
$7,245 \div 26$	$456 \div 100$	$4,000 \div 1,000$
$12,345 \div 987$	$1,234 \div 1,000$	$870,000 \div 10,000$
$875,993 \div 4,356$	$645,378 \div 100,000$	$5,676,000 \div 1,000,000$
$10,987,654 \div 8,756$	$180 \div 10$	$98,730,000 \div 10,000,000$

2. Si 14 libros cuestan \$840, ¿cuánto costarían 9 libros? **R. \$540**
3. Si 25 trajes cuestan \$25,000, ¿cuánto costarían 63 trajes? **R. \$63,000**
4. Si 19 sombreros cuestan \$570, ¿cuántos sombreros compraría con \$1,080? **R. 36**
5. Cambio un terreno de 12 caballerías a \$5,000 una, por otro que vale a \$15,000 la caballería. ¿Cuántas caballerías tiene éste? **R. 4 caballerías**
6. Tenía \$2,576. Compré víveres por valor de \$854 y con el resto frijoles a \$6 la bolsa. ¿Cuántas bolsas de frijoles compré? **R. 287**
7. Se reparten 84 libras de víveres entre 3 familias compuestas de 7 personas cada una. ¿Cuántas libras recibe cada persona? **R. 4 libras**
8. ¿Cuántos días se necesitarán para hacer 360 metros de una obra si se trabajan 8 horas al día y se hacen 5 metros en una hora? **R. 9 días.**
9. Se compran 42 libros por \$1,260 y se vende cierto número por \$950 a \$50 cada uno. ¿Cuántos libros me quedan y cuánto gané en cada uno de los que vendí? **R. 23; \$20**
10. Patricio compra cierto número de caballos por \$212,000 a \$4,000 cada uno. Vendió 40 caballos por \$168,000. ¿Cuántos caballos le quedan y cuánto ganó en cada uno de los que vendió? **R. 13; \$200**
11. Un muchacho compra el mismo número de lápices que de plumas por \$84. Cada lápiz vale \$5 y cada pluma \$7. ¿Cuántos lápices y cuántas plumas ha comprado? **R. 7**
12. Compró cierto número de bolsas de azúcar por \$675 y luego las vendo por \$1,080, ganando así \$3 por bolsa. ¿Cuántas bolsas compré? **R. 135**
13. ¿Cuántos bultos tendrá una partida de víveres que compré por \$1,440 si al revender 12 de esos bultos por \$720 gano \$20 en cada uno? **R. 36**

LEYES DE LA DIVISIÓN

181

Las leyes de la división exacta son tres: ley de uniformidad, ley de monotonía y ley distributiva.

I. LEY DE UNIFORMIDAD

182

Esta ley puede enunciarse de dos modos:

- 1) **El cociente de dos números tiene un valor único o siempre es igual.** Así, el cociente $20 \div 5$ tiene un valor único, 4, porque 4 es el único número que multiplicado por 5 da 20.
 $36 \div 12 = 3$ únicamente, porque 3 es el único número que multiplicado por 12 da 36.
- 2) Puesto que dos números iguales son el mismo número, se tiene que: **dividiendo miembro a miembro dos igualdades, resulta otra igualdad.**

$$\text{Así, siendo } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \text{ resulta } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

II. LEY DE MONOTONÍA

183

Esta ley consta de tres partes:

- 1) **Si una desigualdad (dividendo) se divide entre una igualdad (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo.**

$$\begin{array}{r} 8 > 6 \\ 2 = 2 \\ \hline 8 \div 2 > 6 \div 2 \\ 4 > 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 < 15 \\ 3 = 3 \\ \hline 12 \div 3 < 15 \div 3 \\ 4 < 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a > b \\ c = d \\ \hline a \div c > b \div d \end{array}$$

Ejemplos

- 2) **Si una igualdad (dividendo) se divide entre una desigualdad (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad de sentido contrario que la desigualdad divisor.**

$$\begin{array}{r} 8 = 8 \\ 4 > 2 \\ \hline 8 \div 4 < 8 \div 2 \\ 2 < 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 = 30 \\ 5 < 6 \\ \hline 30 \div 5 > 30 \div 6 \\ 6 > 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a > b \\ c < d \\ \hline a \div c > b \div d \end{array}$$

Ejemplos

- 3) **Si una desigualdad (dividendo) se divide entre otra desigualdad de sentido contrario (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo.**

$$\begin{array}{r} 12 > 8 \\ 2 < 4 \\ \hline 12 \div 2 > 8 \div 4 \\ 6 > 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 < 30 \\ 5 > 3 \\ \hline 15 \div 5 < 30 \div 3 \\ 3 < 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a > b \\ c < d \\ \hline a \div c > b \div d \end{array}$$

Ejemplos

Nota

Si se dividen miembro a miembro dos desigualdades del **mismo sentido**, el resultado no puede anticiparse, pues puede ser una desigualdad de ese mismo sentido o de sentido contrario o una igualdad.

Ejemplos

$$\begin{array}{r} 20 > 6 \\ 4 > 2 \\ \hline 20 \div 4 > 6 \div 2 \\ 5 > 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 > 10 \\ 4 > 2 \\ \hline 12 \div 4 < 10 \div 2 \\ 3 < 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 < 20 \\ 3 < 4 \\ \hline 15 \div 3 = 20 \div 4 \\ 5 = 5 \end{array}$$

184

III. LEY DISTRIBUTIVA

Véase el número 191.

53

Ejercicio

1. ¿Cuántos valores puede tener el cociente $15 \div 5$? ¿Por qué?

R. 3 es el valor único, por la ley de uniformidad.

2. Aplicar la ley de uniformidad a las desigualdades siguientes:

a) $\begin{cases} a = b \\ 3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 = 5 \\ x = y \end{cases}$

c) $\begin{cases} c = d \\ m = n \end{cases}$

R. a) $\frac{a}{3} = \frac{b}{3}$ b) $\frac{5}{x} = \frac{5}{y}$ c) $\frac{c}{m} = \frac{d}{n}$

3. Siendo $a = b$ y $p = q$, ¿qué se verifica según la ley de uniformidad?

R. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

4. En un aula hay igual número de alumnos que en otra. Si el número de alumnos de cada aula se reduce a la mitad, ¿qué sucederá y por cuál ley?

R. Queda igual número de alumnos en las dos, por la ley de uniformidad.

5. Escribir lo que resulta dividiendo entre 4 los dos miembros de $a + b = c + d$.

R. $\frac{a+b}{4} = \frac{c+d}{4}$

6. Aplicar la ley de monotonía de la división en:

a) $\begin{cases} 8 > 5 \\ a = b \end{cases}$

b) $\begin{cases} x < y \\ 3 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} m < n \\ a = b \end{cases}$

R. a) $\frac{8}{a} > \frac{5}{b}$ b) $\frac{x}{3} < \frac{y}{3}$ c) $\frac{m}{a} < \frac{n}{b}$

7. Aplicar la ley de monotonía de la división en:

a) $\begin{cases} a = b \\ 5 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} m = n \\ 3 < 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} c = d \\ m > n \end{cases}$

R. a) $\frac{a}{5} < \frac{b}{2}$ b) $\frac{m}{3} > \frac{n}{7}$ c) $\frac{c}{m} < \frac{d}{n}$

8. Aplicar la ley de monotonía de la división en:

a) $\begin{cases} 20 > 15 \\ 4 < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a < b \\ 3 > 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x > y \\ m < n \end{cases}$

R. a) $5 > 3$ b) $\frac{a}{3} < \frac{b}{2}$ c) $\frac{x}{m} > \frac{y}{n}$

9. ¿Puede decir lo que resulta dividiendo $a > b$ entre $c > d$? ¿Y $m < n$ entre $3 < 5$? **R. No.**

10. Juan tiene doble edad que Pedro. La edad de María es la mitad de la de Pedro y la de Rosa la mitad de la de Juan. ¿Quién es mayor, María o Rosa y por cuál ley? **R. Rosa, por la ley de monotonía.**

11. A y B tienen igual dinero. ¿Qué es más, la tercera parte de lo que tiene A o la mitad de lo que tiene B? ¿Qué ley se aplica? **R. La mitad de lo que tiene B. Ley de monotonía.**

12. A tiene más dinero que B. ¿Qué es más, la tercera parte de lo que tiene A o la cuarta parte de lo que tiene B? ¿Qué ley se aplica? **R. La tercera parte de lo que tiene A. Ley de monotonía.**

13. A tiene la quinta parte de lo que tiene B. C tiene la décima parte de lo que tiene A y D la quinta parte de lo que tiene B. ¿Quién tiene más, C o D? ¿Qué ley se aplica? **R. D, por la ley de monotonía.**

14. María es mayor que Rosa. ¿Qué es más, la quinta parte de la edad de Rosa o la mitad de la edad de María? **R. La mitad de la edad de María.**

15. La edad de María es mayor que la de Rosa. ¿Qué es más, la cuarta parte de la edad de María o la mitad de la edad de Rosa? **R. No se sabe.**

16. Jesús es más joven que yo. La edad de Ernesto es la mitad de la edad de Jesús y la de Carlos la tercera parte de la mía. ¿Quién es mayor, Ernesto o Carlos? **R. No se sabe.**

SUPRESIÓN DE FACTORES Y DIVISORES

185

Estudiaremos dos casos:

1) Si un número se divide entre otro y el cociente se multiplica por el divisor, se obtiene el mismo número.

Vamos a probar que $(a \div b) b = a$.

En efecto: llamando c al cociente de dividir a entre b , tenemos:

$$a \div b = c \quad (1)$$

y como el cociente multiplicado por el divisor tiene que dar el dividendo, tendremos:

$$cb = a$$

y como $c = a \div b$, según se ve en (1), sustituyendo este valor de c en la igualdad anterior, queda:

$$(a \div b) b = a$$

2) Si un número se multiplica por otro y el producto se divide entre este último, se obtiene el mismo número.

Vamos a probar que $(a \cdot b) \div b = a$.

En efecto: en la igualdad anterior está expresada una división en la que el dividendo es $(a \cdot b)$, el divisor b y el cociente a . Si la división es legítima, es necesario que el cociente

multiplicado por el divisor dé el dividendo y en efecto: $a \cdot b = a \cdot b$, luego queda demostrado lo que nos proponíamos.

- 186** Lo demostrado anteriormente nos permite decir que **siempre que un número aparezca en una expresión cualquiera como factor y divisor puede suprimirse sin que la expresión se altere.**

Ejemplos

$$1) 5 \div 6 \times 6 = 5 \quad \text{R.}$$

$$2) 8 \times 4 \div 4 = 8 \quad \text{R.}$$

$$3) \frac{9 \times 3 \times 2}{9 \times 3} = 2 \quad \text{R.}$$

$$4) \frac{abcmn}{acn} = bm \quad \text{R.}$$

54

Ejercicio

Simplificar, suprimiendo las cantidades que sean a la vez factores y divisores:

$$1. 8 \div 3 \times 3$$

$$6. 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \div 3 \cdot 6$$

$$11. \frac{3 \times 7 \times 6}{3 \times 6}$$

$$2. ac \div c$$

$$7. 7 \cdot 4 \div 4 + 5 \div 6 \cdot 6$$

$$12. \frac{4 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 7 \times 9}$$

$$3. 8 \cdot 4 \cdot 5 \div 8 \cdot 4$$

$$8. 9 \div 7 \cdot 7 - 5 \div 3 \cdot 3$$

$$13. \frac{8abm}{4ab}$$

$$4. 3ab \div 3a$$

$$9. (a + b)c \div c$$

$$14. \frac{20c \div c}{5}$$

$$5. 5bc \div 5c$$

$$10. 5(a - b) \div (a - b)$$

$$15. \frac{8(a + b)c}{4(a + b)}$$

187

ALTERACIONES DEL DIVIDENDO Y EL DIVISOR EN LA DIVISIÓN EXACTA

- 1) Si el dividendo se multiplica por un número, no variando el divisor, el cociente queda multiplicado por el mismo número.**

Sea la división $D \div d = c$. Decimos que

$$Dm \div d = cm$$

Esta división será legítima si el divisor d multiplicado por el cociente cm da el dividendo Dm y en efecto:

$$d \cdot cm = d(D \div d)m = Dm$$

(En el segundo paso se ha sustituido c por su igual $D \div d$ y en el tercer paso se ha suprimido d como factor y divisor.)

- 2) Si el dividendo se divide entre un número, no variando el divisor, el cociente queda dividido entre el mismo número.**

Sea la división $D \div d = c$. Decimos que:

$$(D \div m) \div d = c \div m$$

Esta división será legítima si el divisor d multiplicado por el cociente $c \div m$, da el dividendo $D \div m$, y en efecto:

$$d \cdot c \div m = d(D \div d) \div m = D \div m$$

(En el tercer paso se ha suprimido d como factor y divisor.)

3) Si el divisor se multiplica por un número, no variando el dividendo, el cociente queda dividido entre dicho número.

Sea la división $D \div d = c$. Decimos que

$$D \div dm = c \div m$$

Esta división será legítima si el divisor dm , multiplicado por el cociente $c \div m$, da el dividendo D , y en efecto:

$$dm \cdot c \div m = dm(D \div d) \div m = D$$

(En el tercer paso se han suprimido las d y las m que aparecen como factor y divisor.)

4) Si el divisor se divide entre un número, no variando el dividendo, el cociente queda multiplicado por el mismo número.

Sea la división $D \div d = c$. Decimos que

$$D \div (d \div m) = cm$$

Esta división será legítima si el cociente cm multiplicado por el divisor $d \div m$ da el dividendo D , y en efecto:

$$cm \cdot d \div m = (D \div d) m \cdot d \div m = D$$

(En el último paso se suprimen las d y las m que aparecen como factor y divisor.)

5) Si el dividendo y el divisor se multiplican por o dividen entre un mismo número, el cociente no varía.

En efecto: según se ha visto antes, al multiplicar el dividendo por un número, el cociente queda multiplicado por ese número, pero al multiplicar el divisor por el mismo número el cociente queda dividido entre dicho número; luego, el cociente no varía.

Del propio modo, al dividir el dividendo entre un número, el cociente queda dividido entre dicho número, pero al dividir el divisor entre el mismo número, el cociente queda multiplicado por dicho número; luego, el cociente no varía.

- 1)** Al dividir $3,500 \div 500$ podemos tachar los ceros del dividendo y los dos del divisor, y queda:

$$3,500 \div 500 = 35 \div 5 = 7$$

porque lo que hemos hecho ha sido dividir el dividendo y el divisor entre el mismo número 100, con lo cual, según se acaba de probar, el cociente no varía.

- 2) Al dividir $15 \cdot 4 \cdot 7 \div 5 \cdot 4 \cdot 7$ podemos suprimir los factores 4 y 7 comunes al dividendo y al divisor, con lo cual el cociente no varía, y tenemos:

$$15 \cdot 4 \cdot 7 \div 5 \cdot 4 \cdot 7 = 15 \div 5 = 3$$

188

ALTERACIONES DEL DIVIDENDO Y EL DIVISOR EN LA DIVISIÓN ENTERA

- 1) Si el dividendo y el divisor de una división entera se multiplican por un mismo número, el cociente no varía y el residuo queda multiplicado por dicho número.

Sea D el dividendo, d el divisor, c el cociente y r el residuo. Tendremos:

$$D = dc + r \quad (1)$$

Multiplicando el dividendo y el divisor por m , quedará Dm y dm .

Decimos que al dividir Dm entre dm el cociente será el mismo de antes c y el residuo será rm .

Esto será cierto si en esta división el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, o sea si:

$$Dm = dm \cdot c + rm$$

y esta igualdad es legítima, porque multiplicando por m los dos miembros de (1), se tiene:

$$Dm = (dc + r)m$$

o sea $Dm = dm \cdot c + rm \quad (2)$

luego, queda probado lo que nos proponíamos.

- 2) Si el dividendo y el divisor se dividen entre un mismo número divisor de ambos, el cociente no varía y el residuo queda dividido entre el mismo número.

En el número anterior, partiendo de la igualdad (1), llegamos a la igualdad (2); luego, recíprocamente, si partimos de (2), llegamos a (1), lo cual prueba lo que estamos demostrando.

55

Ejercicio

- ¿Que alteración sufre el cociente $760 \div 10$ si 760 se multiplica por 8; si se divide entre 4?
R. Queda multiplicado por 8; queda dividido entre 4.
- ¿Qué variación sufre el cociente $1,350 \div 50$ si el 50 se multiplica por 7; si se divide entre 10?
R. Queda dividido entre 7; queda multiplicado por 10.
- ¿Qué alteración sufre el cociente $4,500 \div 9$ si 4,500 se multiplica por 6 y 9 se divide entre 3; si 4,500 se divide entre 4 y 9 se multiplica por 3?
R. Queda multiplicado por 18; queda dividido entre 12.

4. ¿Qué alteración sufre el cociente $858 \div 6$ si 858 se multiplica por 2 y 6 se divide entre 2; si 858 se divide entre 6 y 6 se multiplica por sí mismo? **R. Queda multiplicado por 4; queda dividido entre 36.**
5. ¿Cuánto aumenta el cociente si se añade el divisor al dividendo, permaneciendo igual el divisor? **R. 1**
6. ¿Qué le sucede al cociente si se resta el divisor del dividendo, permaneciendo igual el divisor? **R. Disminuye 1.**
7. Si en la división $72 \div 8$ sumamos 8 con 72 y esta suma se divide entre 8, ¿qué le sucede al cociente? **R. Aumenta 1.**
8. Si en la división $216 \div 6$ restamos 6 de 216 y esta diferencia se divide entre el mismo divisor, ¿qué le sucede al cociente? **R. Disminuye 1.**
9. $60 \div 10 = 6$. Diga, sin efectuar la operación, cuál sería el cociente en los casos siguientes:
- a) $(60 \times 2) \div 10$ c) $60 \div (10 \times 2)$ e) $(60 \div 5) \div (10 \div 5)$
 b) $(60 \div 2) \div 10$ d) $60 \div (10 \div 2)$ f) $(60 \times 2) \div (10 \times 2)$
R. a) 12 b) 3 c) 3 d) 12 e) 6 f) 6
10. Decir, sin efectuar la división, si es cierto que: $20 \div 4 = 10 \div 2 = 40 \div 8 = 5 \div 1$ y por qué.
11. Explicar por qué $9 \div 3 = 27 \div 9 = 81 \div 27$.
12. $a \div b = 30$. Escribir los cocientes siguientes:
- a) $2a \div b = \dots$ d) $a \div \frac{b}{3} = \dots$
 b) $\frac{a}{2} \div b = \dots$ e) $3a \div 3b = \dots$
 c) $a \div 3b = \dots$ f) $\frac{a}{5} \div \frac{b}{5} = \dots$
R. a) 60 b) 15 c) 10 d) 90 e) 30 f) 30
13. $24 \div a = b$. Escribir los cocientes:
- a) $48 \div a = \dots$ d) $24 \div \frac{a}{5} = \dots$
 b) $8 \div a = \dots$ e) $120 \div \frac{a}{5} = \dots$
 c) $24 \div 2a = \dots$ f) $4 \div 6a = \dots$
R. a) 2b b) $\frac{b}{3}$ c) $\frac{b}{2}$ d) 5b e) 25b f) $\frac{b}{36}$
14. $\frac{a}{b} = 60$. Escribir los cocientes:
- a) $\frac{4a}{2b} = \dots$ d) $\frac{a \div 10}{b \div 5} = \dots$
 b) $\frac{3a}{6b} = \dots$ e) $\frac{5a}{b \div 4} = \dots$
 c) $\frac{a \div 3}{b \div 2} = \dots$ f) $\frac{a \div 5}{6b} = \dots$
R. a) 120 b) 30 c) 40 d) 30 e) 1,200 f) 2



Siendo la división la más compleja de las operaciones elementales de la aritmética, es lógico que los matemáticos tuvieran que pasar muchas vicisitudes desde el uso del rudimentario ábaco, hasta las más modernas representaciones de las ope-

raciones indicadas. El empleo de la raya horizontal entre los números para indicar la división, se debe a **Leonardo de Pisa (Fibonacci, hijo de Bonaci)**, que la tomó de los textos árabes.

Capítulo **XIII**

OPERACIONES INDICADAS DE DIVISIÓN

I. PRÁCTICA

189

OPERACIONES INDICADAS DE DIVISIÓN O MULTIPLICACIÓN EN QUE NO HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Deben efectuarse en este orden: **primero**, los **cocientes y productos** indicados, y luego las **sumas o restas**.

Ejemplos

1) Efectuar $6 \div 3 + 4 \div 4$.

Efectuamos *primero* los cocientes $6 \div 3 = 2$ y $4 \div 4 = 1$, y tenemos

$$6 \div 3 + 4 \div 4 = 2 + 1 = 3 \quad \text{R.}$$

2) Efectuar $5 \times 4 \div 2 + 9 \div 3 - 8 \div 2 \times 3$.

$$\begin{aligned} & 5 \times 4 \div 2 + 9 \div 3 - 8 \div 2 \times 3 \\ & = 10 + 3 - 12 = 1 \quad \text{R.} \end{aligned}$$

56

Efectuar:

1. $8 + 6 \div 3$

R. 10

5. $5 \times 6 \div 2 \times 4 \div 2 \times 7$

R. 210

2. $15 \div 5 - 2$

R. 1

6. $10 \div 2 + 8 \div 4 - 21 \div 7$

R. 4

3. $12 \div 4 \times 3 + 5$

R. 14

7. $15 + 6 \div 3 - 4 \div 2 + 4$

R. 19

4. $12 \div 3 \times 4 \div 2 \times 6$

R. 48

8. $6 \div 2 + 8 \div 4$

R. 5

Ejercicio

- | | | | |
|---|-------|--|-------|
| 9. $6 + 8 \div 2 - 3 \times 3 + 4$ | R. 5 | 12. $50 \div 5 - 16 \div 2 + 12 \div 6$ | R. 4 |
| 10. $50 - 4 \times 6 + 3 \times 5 - 9 \div 3$ | R. 38 | 13. $3 + 4 \times 5 - 5 + 4 \times 2$ | R. 26 |
| 11. $3 \times 6 \div 2 + 10 \div 5 \times 3$ | R. 15 | 14. $8 \times 5 + 4 - 3 \times 2 + 6 \div 3$ | R. 40 |
| 15. $72 \div 8 + 3 - 4 \times 2 \div 4 + 6$ | R. 16 | | |
| 16. $50 + 15 \div 5 \times 3 - 9 \div 3 \times 4 + 6 \times 4 \div 6$ | R. 51 | | |
| 17. $4 \times 5 - 3 \times 2 + 10 \div 5 - 4 \div 2$ | R. 14 | | |
| 18. $10 \div 5 + 4 - 16 \div 8 - 2 + 4 \div 4 - 1$ | R. 2 | | |
| 19. $6 \times 5 \times 4 \div 20 + 20 \div 5 \div 4$ | R. 7 | | |
| 20. $6 \times 5 + 4 - 8 \div 4 \times 2 \times 3 - 5 + 16 \div 4 - 3$ | R. 18 | | |
| 21. $9 + 5 - 4 + 3 - 8 + 5 \times 3 - 20 \div 4 \times 3$ | R. 5 | | |
| 22. $40 \div 5 \times 5 + 6 \div 2 \times 3 + 4 - 5 \times 2 \div 10$ | R. 52 | | |

OPERACIONES INDICADAS DE DIVISIÓN EN QUE HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN

190

Deben efectuarse en este orden: **primero**, las operaciones encerradas en los paréntesis y **luego** las operaciones que queden indicadas, como en el caso anterior.

- 1) Efectuar $(5 + 4) \div 3 + (8 - 4) \div 2$.

Efectuamos primero los paréntesis, y tenemos:

$$(5 + 4) \div 3 + (8 - 4) \div 2 = \underline{9 \div 3} + \underline{4 \div 2} = 3 + 2 = 5 \quad \text{R.}$$

- 2) Efectuar $(30 - 10) \div (7 - 2) + (9 - 4) \div 5 + 3$.

$$\begin{aligned} &(30 - 10) \div (7 - 2) + (9 - 4) \div 5 + 3 \\ &= 20 \div 5 + 5 \div 5 + 3 = 4 + 1 + 3 = 8 \quad \text{R.} \end{aligned}$$

Ejemplos

Efectuar:

- | | | | |
|---|--------|---------------------------------------|-------|
| 1. $(15 + 20) \div 5$ | R. 7 | 4. $(5 \times 6 \times 3) \div 15$ | R. 6 |
| 2. $(30 - 24) \div 6$ | R. 1 | 5. $(3 + 2) \div 5 + (8 + 10) \div 2$ | R. 10 |
| 3. $(9 + 7 - 2 + 4) \div 9$ | R. 2 | 6. $(5 - 2) \div 3 + (11 - 5) \div 2$ | R. 4 |
| 7. $(9 + 6 - 3) \div 4 + (8 - 2) \div 3 - (5 - 3) \div 2$ | R. 4 | | |
| 8. $(3 \times 2) \div 6 + (19 - 1) \div (5 + 4)$ | R. 3 | | |
| 9. $(6 + 2) \div (11 - 7) + 5 \div (6 - 1)$ | R. 3 | | |
| 10. $150 \div (25 \times 2) + 32 \div (8 \times 2)$ | R. 5 | | |
| 11. $200 \div (8 - 6)(5 - 3)$ | R. 200 | | |
| 12. $(9 - 6) \div 3 + (15 - 3) \div (7 - 3) + (9 \div 3)$ | R. 7 | | |
| 13. $8 \div 2 \times 5 + (9 - 1) \div 8 - 3$ | R. 18 | | |
| 14. $500 - (31 - 6) \div 5 - 3 \div (4 - 1)$ | R. 494 | | |
| 15. $(5 \times 4 \times 3) \div (15 - 3) + 18 \div (11 - 5)3$ | R. 14 | | |
| 16. $(30 - 20) \div 2 + (6 \times 5) \div 3 + (40 - 25) \div (9 - 6)$ | R. 20 | | |
| 17. $8 + 4 \div 2 \times 3 - 4 \div (2 \times 2)$ | R. 13 | | |
| 18. $(15 - 2)4 + 3(6 \div 3) - 18 \div (10 - 1)$ | R. 56 | | |

57

Ejercicio

- | | |
|---|--------|
| 19. $300 \div [(15 - 6) \div 3 + (18 - 3) \div 5]$ | R. 50 |
| 20. $9[15 \div (6 - 1) - (9 - 3) \div 2]$ | R. 0 |
| 21. $[15 + (8 - 3)5] \div [(8 - 2) \div 2 + 7]$ | R. 4 |
| 22. $(9 + 3)5 - 2 \div (3 - 2) + 8 \times 6 \div 4 \div 2 + 5$ | R. 69 |
| 23. $[(9 - 4) \div 5 + (10 - 2) \div 4] + 9 \times 6 \div 18 + 2$ | R. 8 |
| 24. $500 - \{(6 - 1)8 \div 4 \times 3 + 16 \div (10 - 2)\} - 5$ | R. 463 |

II. TEORÍA

Estudiamos a continuación el modo de efectuar las operaciones indicadas de división sin efectuar las operaciones encerradas en los paréntesis, método que es indispensable cuando las cantidades se representan por **letras**.

LEY DISTRIBUTIVA DE LA DIVISIÓN

191

COCIENTE DE UNA SUMA ENTRE UN NÚMERO

Para dividir una suma indicada entre un número, se divide cada sumando entre este número y se suman los cocientes parciales.

Ejemplos

- 1) Efectuar $(9 + 6) \div 3$.

Decimos que $(9 + 6) \div 3 = 9 \div 3 + 6 \div 3 = 3 + 2 = 5$ R.

En efecto: $9 \div 3 + 6 \div 3$ será el cociente buscado si multiplicado por el divisor 3 reproduce el dividendo $(9 + 6)$ y en efecto, por la ley distributiva de la multiplicación, tenemos:

$$(9 \div 3 + 6 \div 3)3 = (9 \div 3)3 + (6 \div 3)3 = 9 + 6$$

porque 3 como factor y divisor se suprime.

- 2) Efectuar $(15 + 20 + 30) \div 5$.

$$(15 + 20 + 30) \div 5 = 15 \div 5 + 20 \div 5 + 30 \div 5 = 3 + 4 + 6 = 13 \text{ R.}$$

En general:

$$(a + b + c) \div m = a \div m + b \div m + c \div m$$

La propiedad explicada en los ejemplos anteriores constituye la *ley distributiva de la división respecto de la suma*.

192

COCIENTE DE UNA RESTA ENTRE UN NÚMERO

Para dividir una resta indicada entre un número se dividen el minuendo y el sustraendo entre este número y se restan los cocientes parciales.

Ejemplos

- 1) Efectuar $(20 - 15) \div 5$.

$$(20 - 15) \div 5 = 20 \div 5 - 15 \div 5 = 4 - 3 = 1 \text{ R.}$$

En efecto: $20 \div 5 - 15 \div 5$ será el cociente buscado si multiplicado por el divisor 5 se reproduce el dividendo $(20 - 15)$ y en efecto, por la ley distributiva de la multiplicación, tenemos:

$$(20 \div 5 - 15 \div 5)5 = (20 \div 5)5 - (15 \div 5)5 = 20 - 15$$

porque 5 como factor y divisor se suprime.

2) Efectuar $(35 - 28) \div 7$.

$$(35 - 28) \div 7 = 35 \div 7 - 28 \div 7 = 5 - 4 = 1 \quad \text{R.}$$

En general:

$$(a - b) \div m = a \div m - b \div m$$

La propiedad explicada en los ejemplos anteriores constituye la *ley distributiva de la división respecto de la resta*.

COCIENTE DE UNA SUMA ALGEBRAICA ENTRE UN NÚMERO

193

Como se ha probado que la división es distributiva respecto de la suma y de la resta, tendremos que:

Para dividir una suma algebraica entre un número se divide cada término entre dicho número, poniendo delante de cada cociente parcial el signo + si el término que se divide es positivo y el signo - si es negativo.

1) Efectuar $(15 - 10 + 20) \div 5$.

$$(15 - 10 + 20) \div 5 = 15 \div 5 - 10 \div 5 + 20 \div 5 = 3 - 2 + 4 = 5 \quad \text{R.}$$

En general: $(a - b + c - d) \div m = a \div m - b \div m + c \div m - d \div m$

Ejemplo

Efectuar:

1. $(9 + 6) \div 3$ **R. 5**

2. $(18 - 12) \div 6$ **R. 1**

3. $(12 - 8 + 4) \div 2$ **R. 4**

4. $(18 + 15 + 30) \div 3$ **R. 21**

5. $(54 - 30) \div 4$ **R. 6**

6. $(15 - 9 + 6 - 3) \div 3$ **R. 3**

7. $(32 - 16 - 8) \div 8$ **R. 1**

8. $(16 - 12 - 2 + 10) \div 2$ **R. 6**

9. $(a + b) \div m$ **R. $a \div m + b \div m$**

10. $(c - d) \div n$ **R. $c \div n - d \div n$**

11. $(2a - 4b) \div 2$ **R. $a - 2b$**

12. $(x - y + z) \div 3$ **R. $x \div 3 - y \div 3 + z \div 3$**

13. $(5a - 10b + 15c) \div 5$ **R. $a - 2b + 3c$**

14. $(6 - a - c) \div 3$ **R. $2 - a \div 3 - c \div 3$**

58

Ejercicio

COCIENTE DE UN PRODUCTO ENTRE UN NÚMERO

194

Para dividir un producto indicado entre un número se divide uno solo de los factores del producto entre dicho número.

Ejemplos

- 1) Efectuar
- $(6 \times 5) \div 2$
- .

Dividimos solamente el factor 6 entre 2 y tenemos:

$$(6 \times 5) \div 2 = (6 \div 2)5 = 3 \times 5 = 15 \quad \text{R.}$$

En efecto: $(6 \div 2)5$ será el cociente buscado si multiplicado por el divisor 2 da el dividendo 6×5 y como (164) para multiplicar un producto indicado por un número basta multiplicar uno de sus factores por dicho número, tendremos:

$$(6 \div 2)5 \times 2 = (6 \div 2 \times 2) \times 5 = 6 \times 5$$

porque 2 como factor y divisor se suprime.

- 2) Efectuar
- $(17 \times 16 \times 5) \div 8$
- .

$$(17 \times 16 \times 5) \div 8 = 17 \times (16 \div 8) \times 5 = 17 \times 2 \times 5 = 170 \quad \text{R.}$$

En general:

$$(abc) \div m = (a \div m)bc$$

195

COCIENTE DE UN PRODUCTO ENTRE UNO DE SUS FACTORES

Para dividir un producto entre uno de sus factores basta suprimir ese factor en el producto.

Ejemplos

- 1) Efectuar
- $(7 \times 8) \div 8$
- .

$(7 \times 8) \div 8 = 7$, porque 8 como factor y divisor se suprime.

- 2) Efectuar
- $(5 \times 4 \times 3) \div 4$
- .

$$(5 \times 4 \times 3) \div 4 = 5 \times 3 = 15 \quad \text{R.}$$

En general:

$$(abc) \div b = ac \quad \text{R.}$$

$$(abcd) \div (ad) = bc \quad \text{R.}$$

59

Efectuar, aplicando las reglas anteriores:

Ejercicio

1. $(9 \times 4) \div 2$

R. 18

2. $(abc) \div 3$

R. $(a \div 3)bc$

3. $(5 \times 6) \div 5$

R. 6

4. $(mnp) \div n$

R. mp

5. $(5 \times 9 \times 8) \div 3$

R. 120

6. $(7 \times 6 \times 5) \div 6$

R. 35

7. $(4 \times 7 \times 25 \times 2) \div 25$

R. 56

8. $(3 \times 5 \times 8 \times 4) \div (3 \times 8)$

R. 20

9. $(5a \times 6b) \div 5a$

R. $6b$

10. $6xy \div 3x$

R. $2y$

11. $(5 \times 4 + 3 \times 2) \div 2$

R. 13

12. $(8 \times 3 - 5 \times 3) \div 3$

R. 3

13. $(ab + bc - bd) \div b$

R. $a + c - d$

14. $(8 \times 6 - 7 \times 4 + 5 \times 8) \div 2$

R. 30

15. $(3x - 6y - 9z) \div 3$

R. $x - 2y - 3z$

16. $(2ab + 4ac - 6ad) \div 2a$

R. $b + 2c - 3d$



A partir de los trabajos de interpretación de la escritura cuneiforme en 1929 por O. Neugebauer, se ha puesto de relieve la contribución babilónica al progreso de las matemáticas. En las tablillas y puestas en lenguas modernas, y que datan de

2000-1200 a. C., aparecen infinidad de problemas resueltos de modo ingenioso. Estos problemas tuvieron su origen en la activa vida comercial del pueblo babilónico.

Capítulo **XIV**

PROBLEMAS TIPO SOBRE NÚMEROS ENTEROS

PROBLEMA es una cuestión práctica en la que hay que determinar ciertas cantidades desconocidas llamadas **incógnitas**, conociendo sus relaciones con cantidades conocidas llamadas **datos** del problema.

196

Resolución

Resolver un problema es realizar las operaciones necesarias para hallar el valor de la incógnita o incógnitas.

Comprobación

Comprobar un problema es cerciorarse de que los valores que se han hallado para las incógnitas, al resolver el problema, satisfacen las condiciones del mismo.

La suma de dos números es 124 y su diferencia 22. Hallar los números. Hemos visto (128) que la suma de dos números más su diferencia es igual al doble del mayor, luego:

197

$$124 + 22 = 146 = \text{doble del número mayor.}$$

Entonces: $146 \div 2 = 73$ será el número mayor.

Como la suma de los dos números es 124, siendo el mayor 73, el menor será

$$124 - 73 = 51. \text{ 73 y 51 R.}$$

Comprobación

Consiste en ver si los dos números hallados, 73 y 51, cumplen las condiciones del problema, de que su suma sea 124 y su diferencia 22, y en efecto:

$$73 + 51 = 124$$

$$73 - 51 = 22$$

luego el problema está bien resuelto.

Otro modo de resolver este problema. Como (129) la suma de dos números menos su diferencia es igual al doble del menor, tendremos:

$$124 - 22 = 102 = \text{doble del número menor,}$$

$$\text{luego } 102 \div 2 = 51 = \text{número menor.}$$

$$\text{El mayor será: } 124 - 51 = 73.$$

60**Ejercicio**

1. La suma de dos números es 1,250 y su diferencia 750. Hallar los números.
R. 1,000 y 250
2. La suma de dos números es 45,678 y su diferencia 9,856. Hallar los números.
R. 27,767 y 17,911
3. El triple de la suma de dos números es 1,350 y el doble de su diferencia es 700. Hallar los números. **R. 400 y 50**
4. La mitad de la suma de dos números es 850 y el cuádruple de su diferencia 600. Hallar los números. **R. 925 y 775**
5. Un muchacho tiene 32 bolas entre las dos manos y en la derecha tiene 6 más que en la izquierda. ¿Cuántas bolas tiene en cada mano? **R. 19 en la derecha; 13 en la izquierda.**
6. Una pecera con sus peces vale 260,000 bolívares, y la pecera sola vale 20,000 bolívares más que los peces. ¿Cuánto vale la pecera y cuánto los peces?
R. Pecera, bs. 140,000; peces, bs. 120,000
7. Un hotel de dos pisos tiene 48 habitaciones, y en el segundo piso hay 6 habitaciones más que en el primero. ¿Cuántas hay en cada piso? **R. 1º, 21; 2º, 27**
8. La suma de dos números excede en 3 unidades a 97 y su diferencia excede en 7 a 53. Hallar los números. **R. 80 y 20**
9. Una botella y su tapón valen 80 ¢, y la botella vale 70 ¢ más que el tapón. ¿Cuánto vale la botella y cuánto vale el tapón? **R. Botella, 75 ¢; tapón, 5 ¢**
10. La edad de un padre y la de su hijo suman 90 años. Si el hijo nació cuando el padre tenía 36 años, ¿cuáles son las edades actuales? **R. 63 y 27**
11. 8,534 excede en 1,400 a la suma de dos números y en 8,532 a su diferencia. Hallar los dos números. **R. 3,568 y 3,566**
12. Cuando Rosa nació, María tenía 30 años. Ambas edades suman hoy 28 años más que la edad de Elsa, que tiene 50 años. ¿Qué edad tiene Matilde, que nació cuando Rosa tenía 11 años?
R. 13 años.

¿Cuál es el número que sumado con su doble da 45?

45 es el número que se busca más dos veces dicho número, o sea, el triple del número buscado; luego, el número buscado será $45 \div 3 = 15$ R.

Comprobación

Sumando 15 con su doble $15 \times 2 = 30$, tenemos:

$$15 + 30 = 45;$$

luego, se cumplen las condiciones del problema.

198

61

Ejercicio

1. ¿Cuál es el número que sumado con su doble da 261? R. 87
2. ¿Cuál es el número que sumado con su triple da 384? R. 96
3. 638 excede en 14 unidades a la suma de un número con su quintuple. ¿Cuál es ese número? R. 104
4. La edad de Claudio es el cuádruple de la de Alfredo, y si ambas edades se suman y a esta suma se añaden 17 años, el resultado es 42 años. Hallar las edades. R. Alfredo 5 años, Claudio 20.

La suma de dos números es 102, y su cociente, 5. Hallar los números. Cuando se divide la suma de dos números entre su cociente **aumentado en 1**, se obtiene el menor de los dos números, luego:

$$102 \div (5 + 1) = 102 \div 6 = 17 = \text{número menor.}$$

El mayor será: $102 - 17 = 85$. R. 85 y 17

199

Comprobación

Consiste en ver si 85 y 17 cumplen las condiciones del problema, y en efecto:

$$85 + 17 = 102$$

$$85 \div 17 = 5$$

62

Ejercicio

1. La suma de dos números es 450 y su cociente 8. Hallar los números. R. 400 y 50
2. La suma de dos números es 3,768 y su cociente 11. Hallar los números. R. 3,454 y 314
3. El doble de la suma de dos números es 100 y el cuádruple de su cociente 36. Hallar los números. R. 45 y 5
4. 800 excede en 60 unidades a la suma de dos números y en 727 a su cociente. Hallar los números. R. 730 y 10
5. La edad de A es 4 veces la de B y ambas edades suman 45 años. ¿Qué edad tiene cada uno? R. A, 36 años; B, 9 años.
6. Entre A y B tienen \$12,816, y B tiene la tercera parte de lo que tiene A. ¿Cuánto tiene cada uno? R. A, \$9,612; B, \$3,204.

200

La diferencia de dos números es 8,888, y su cociente, 9. Hallar los números.

Cuando se divide la diferencia de dos números entre su cociente **disminuido en 1**, se obtiene el número menor, luego:

$$8,888 \div (9 - 1) = 8,888 \div 8 = 1,111 = \text{número menor.}$$

El número menor es 1,111 y como la diferencia de los dos números es 8,888, el número mayor se hallará sumando el menor con la diferencia de ambos, luego:

$$1,111 + 8,888 = 9,999 = \text{número mayor.}$$

9,999 y 1,111 R.

Comprobación

Los números hallados, 9,999 y 1,111, cumplen las condiciones del problema, porque:

$$9,999 - 1,111 = 8,888$$

$$9,999 \div 1,111 = 9$$

63

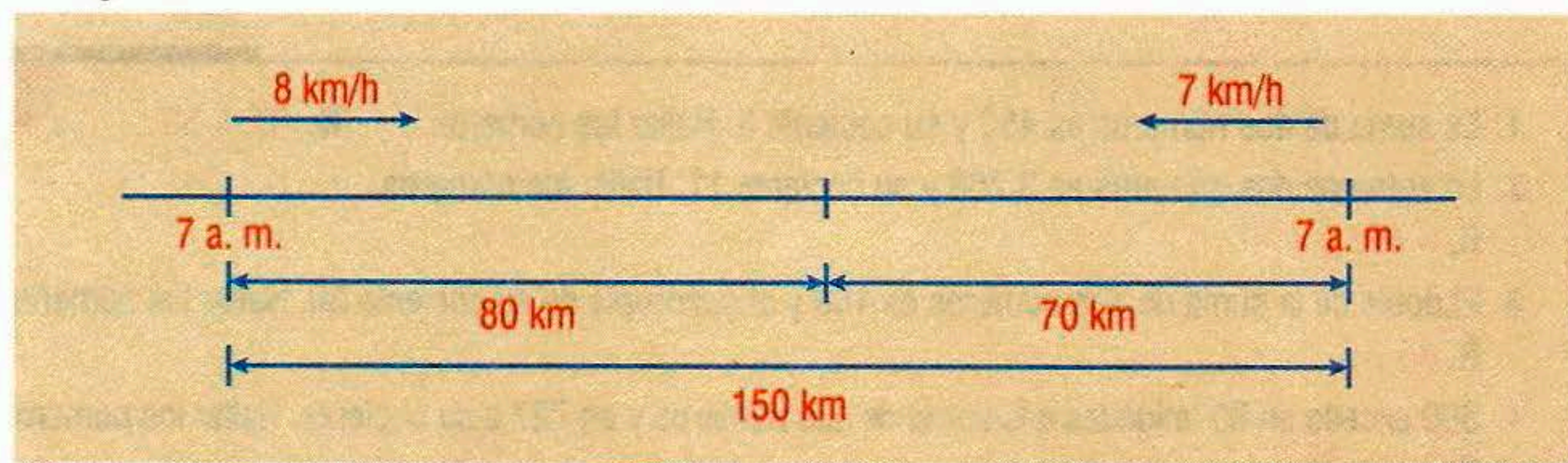
Ejercicio

1. La diferencia de dos números es 150 y su cociente 4. Hallar los números. **R. 200 y 50**
2. El cociente de dos números es 12 y su diferencia 8,965. Hallar los números. **R. 9,780 y 815**
3. La mitad de la diferencia de dos números es 60 y el doble de su cociente es 10. Hallar los números. **R. 150 y 30**
4. La diferencia de dos números excede en 15 a 125 y su cociente es tres unidades menor que 11. Hallar los números. **R. 160 y 20**
5. 2,000 excede en 788 a la diferencia de dos números y en 1,995 a su cociente. Hallar los números. **R. 1,515 y 303**
6. Hoy la edad de A es cuatro veces la de B, y cuando B nació A tenía 12 años. Hallar ambas edades actuales. **R. 16 y 4**

201

Dos correos salen de dos ciudades, A y B, distantes entre sí 150 km, a las 7 a. m., y van uno hacia el otro. El que sale de A va a 8 km/h y el que sale de B va a 7 km/h. ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de A y de B?

Figura 28



El que sale de A anda 8 km/h (Fig. 28) y el de B anda 7 km/h, luego en una hora se acercan $8 + 7 = 15$ km y como la distancia que separa A de B es de 150 km, se encontrarán al cabo de $150 \text{ km} \div 15 \text{ km} = 10$ horas.

Habiendo salido a las 7 a. m., **se encontrarán a las 5 p. m. R.**

En las 10 horas que se ha estado moviendo el móvil que salió de A ha recorrido $8 \text{ km} \times 10 = 80 \text{ km}$; luego, el punto de encuentro dista de A 80 km y de B distará $150 \text{ km} - 80 \text{ km} = 70 \text{ km}$ **R.**

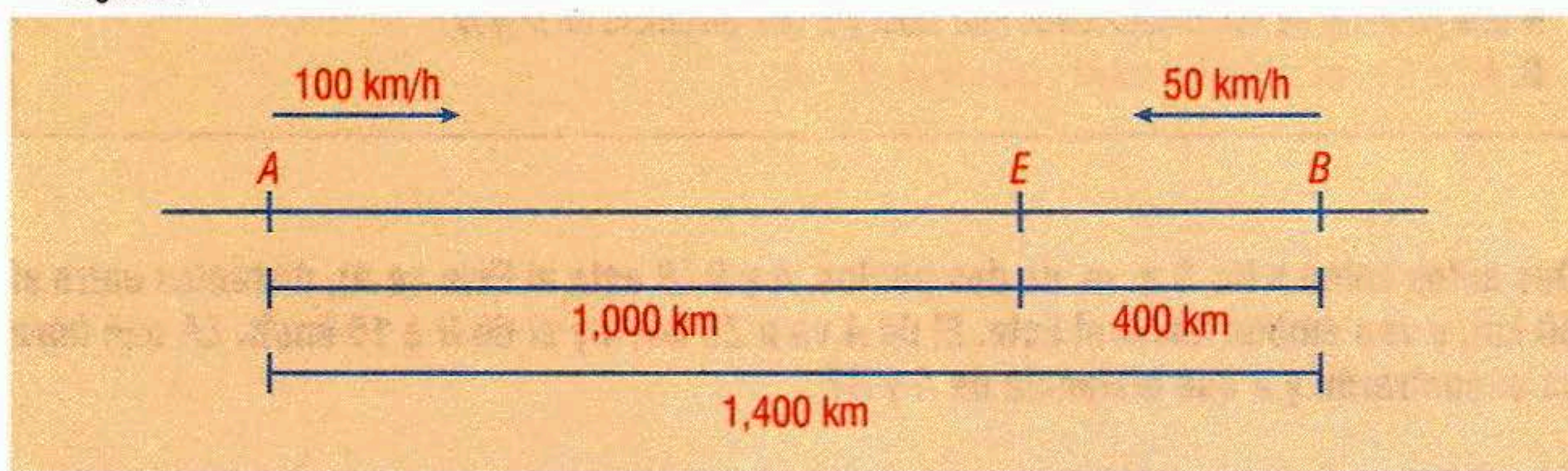
Comprobación

El que salió de B , en las 10 horas que ha estado andando para encontrar al de A , ha recorrido $10 \times 7 \text{ km} = 70 \text{ km}$, que es la distancia del punto de encuentro al punto B .

Dos autos salen de dos ciudades, A y B , situadas a $1,400 \text{ km}$ de distancia, y van uno hacia el otro. El de A sale a las 6 a. m. a 100 km/h y el de B sale a las 8 a. m. y va a 50 km/h . ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de los puntos A y B ?

202

Figura 29



El que sale de A (Fig. 29), de 6 a 8 de la mañana recorre $2 \times 100 \text{ km} = 200 \text{ km}$; luego a las 8 a. m., cuando sale el de B , la distancia que los separa es de $1,400 \text{ km} - 200 \text{ km} = 1,200 \text{ km}$.

A partir de las 8 a. m., en cada hora se acercan $100 \text{ km} + 50 \text{ km} = 150 \text{ km}$; luego, para encontrarse, necesitarán $1,200 \text{ km} \div 150 \text{ km} = 8 \text{ horas}$, a partir de las 8 a. m.; luego, **se encontrarán a las 4 p. m.** **R.**

El que salió de A ha estado andando desde las 6 a. m. hasta las 4 p. m., o sea, 10 horas, a razón de 100 km/h , para encontrar al otro; luego, ha recorrido $10 \times 100 \text{ km} = 1,000 \text{ km}$; luego, el punto de encuentro E dista $1,000 \text{ km}$ de A y $1,400 - 1,000 = 400 \text{ km}$ de B . **R.**

Comprobación

De 8 a. m. a 4 p. m., o sea en 8 horas, el que salió de B ha recorrido $8 \times 50 \text{ km} = 400 \text{ km}$, que es la distancia hallada del punto de encuentro al punto B .

1. Dos autos salen de dos ciudades A y B distantes entre sí 840 km y van al encuentro. El de A va a 50 km/h y el de B a 70 km/h . Si salieron a las 6 a. m., ¿a qué hora se encontrarán y a qué distancia de A y de B ? **R. A la 1 p. m.; a 350 km de A y 490 km de B .**
2. Dos móviles salen de dos puntos A y B que distan 236 km y van al encuentro. Si el de A sale a las 5 a. m. a 9 km/h y el de B a las 9 a. m. a 11 km/h , ¿a qué hora se encontrarán y a qué distancia de A y de B ? **R. A las 7 p. m.; a 126 km de A y 110 km de B .**
3. Un auto sale de Santa Clara hacia La Habana a las 6 a. m. a 30 km/h y otro de La Habana hacia Santa Clara a las $6\frac{1}{2}$ a. m. a 20 km/h . ¿A qué distancia se hallarán a las 9 a. m. sabiendo que entre Santa Clara y La Habana hay 300 km ? **R. A 160 km .**

64

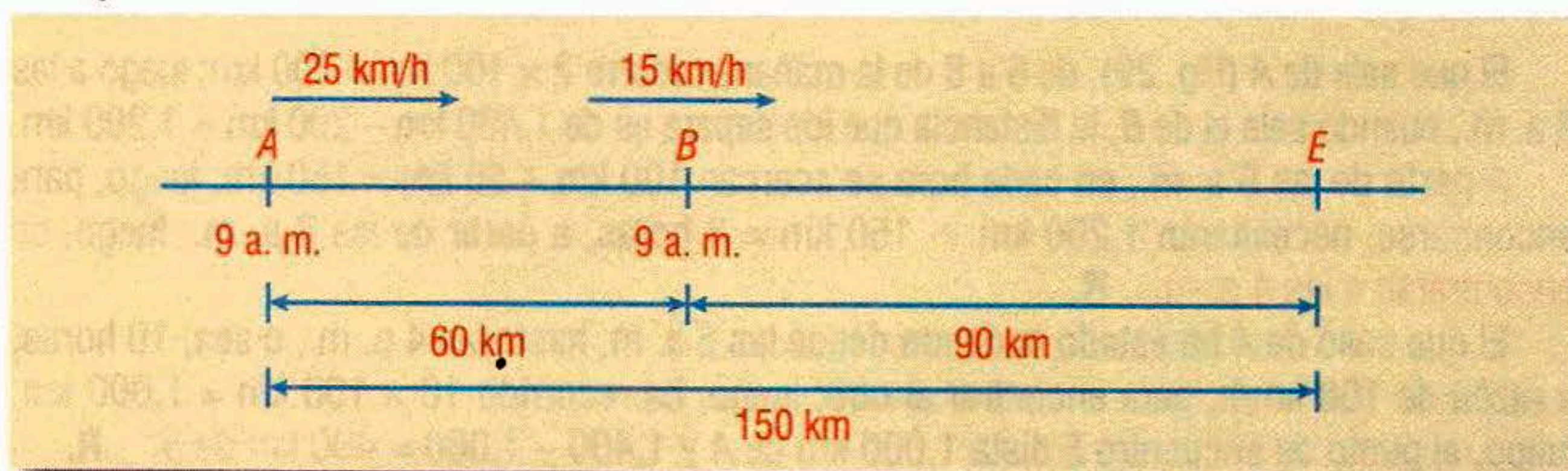
Ejercicio

4. A las 6 a. m. sale un auto de A a 60 km/h y va al encuentro de otro que sale de B a 80 km/h , a la misma hora. Sabiendo que se encuentran a las 11 a. m., ¿cuál es la distancia entre A y B ? **R. 700 km**
5. Dos autos salen de dos puntos C y D distantes entre sí 360 km a las 8 a. m. y a las 12 del día se encuentran en un punto que dista 240 km de D . Hallar las velocidades de ambos autos.
R. El de C a 30 km/h , el de D a 60 km/h
6. Dos autos salen a la misma hora de dos ciudades A y B distantes 320 km y van al encuentro. Se encuentran a la 1 p. m. en un punto que dista 120 km de A . ¿A qué hora salieron sabiendo que el de A iba a 30 km/h y el de B a 50 km/h ? **R. 9 a. m.**
7. Dos móviles parten de M y N distantes entre sí 99 km y van al encuentro. El de M sale a las 6 a. m. a 6 km/h y el de N a las 9 a. m. a 3 km/h . Sabiendo que el de M descansa de 12 a 3 p. m. y a las 3 emprende de nuevo su marcha a la misma velocidad anterior, ¿a qué hora se encontrará con el de N que no varió su velocidad desde que salió y a qué distancia de M y N ?
R. A las 8 p. m.; a 66 km de M y 33 km de N

203

Dos autos salen a las 9 a. m. de dos puntos, A y B (B está al Este de A), distantes entre sí 60 km , y van ambos hacia el Este. El de A va a 25 km/h y el de B a 15 km/h . ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de A y B ?

Figura 30



Mientras el de B (Fig. 30) recorre 15 km hacia el Este en 1 hora, el de A recorre 25 km en el mismo sentido en 1 hora; luego, el de A se acerca al de B $25 - 15 = 10 \text{ km}$ en cada hora; luego para alcanzarlo tendrá que andar durante $60 \text{ km} \div 10 \text{ km} = 6 \text{ horas}$, y como salieron a las 9 a. m. lo alcanzará a las **3 p. m.** **R.**

El de A ha andado 6 horas a razón de 25 km en cada hora para alcanzar al de B ; luego, el punto de encuentro está a $25 \text{ km} \times 6 = 150 \text{ km}$ de A y a $150 \text{ km} - 60 \text{ km} = 90 \text{ km}$ de B **R.**

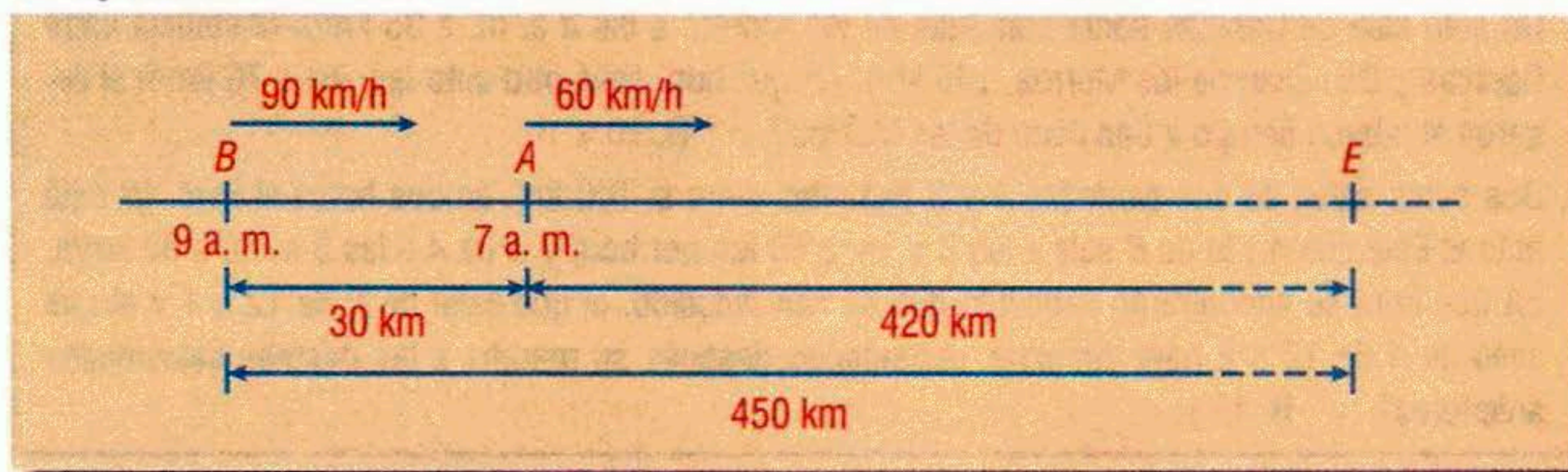
Comprobación

El que salió de B en 6 horas ha recorrido $15 \text{ km} \times 6 = 90 \text{ km}$, que es la distancia hallada del punto de encuentro al punto B .

204

Un auto sale de A a las 7 a. m., a 60 km/h , hacia el Este, y a las 9 a. m. sale de B , situado a 30 km al Oeste de A , otro auto a 90 km/h para alcanzarlo. ¿A qué hora lo alcanzará y a qué distancia de A y de B ?

Figura 31



El de A (Fig. 31) salió a las 7 a. m. a 60 km/h; luego, de 7 a 9 a. m. ha recorrido $2 \times 60 \text{ km} = 120 \text{ km}$, así que a las 9 a. m. la ventaja que le lleva al que sale de B es de $30 \text{ km} + 120 \text{ km} = 150 \text{ km}$.

A partir de las 9 a. m. el de B se acerca al de A a razón de $90 - 60 = 30 \text{ km}$ en cada hora; luego, lo alcanzará al cabo de $150 \text{ km} \div 30 \text{ km} = 5 \text{ horas}$, después de las 9 a. m., o sea, a las 2 p. m. **R.**

En 5 horas el auto que salió de B ha recorrido $5 \times 90 \text{ km} = 450 \text{ km}$; luego, el punto de encuentro E se halla a 450 km a la derecha de B y a $450 - 30 = 420 \text{ km}$ a la derecha de A. **R.**

Comprobación

De 7 a. m. a 2 p. m. hay 7 horas, y en esas 7 horas el que salió de A ha recorrido $7 \times 60 \text{ km} = 420 \text{ km}$, que es la distancia hallada antes de A al punto de encuentro.

1. Un corredor da a otro una ventaja de 10 m. Si la velocidad del que tiene ventaja es de 6 m/s y la del otro 8 m/s, ¿en cuánto tiempo alcanzará éste al primero? **R. 5 s**
2. Un auto que va a 40 km/h lleva una ventaja de 75 km a otro que va a 65 km/h. ¿En cuánto tiempo alcanzará éste al primero? **R. 3 horas.**
3. Dos correos salen de dos ciudades M y N (N está al Oeste de M) distantes entre sí 8 km y van ambos hacia el Este. El de M sale a las 6 a. m. y anda 1 km/h y el de N sale a las 8 a. m. y anda 3 km/h. ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de M y N? **R. 1 p. m.; a 7 km de M y 15 km de N.**
4. Un auto salió de Valencia hacia Maracaibo a las 9 a. m. a 40 km/h. ¿A qué hora lo alcanzará otro auto que salió de Caracas a las 12 del día a 80 km/h, sabiendo que la distancia entre Caracas y Valencia es de 160 km y a qué distancia de Caracas y Valencia? **R. A las 7 p. m. a 560 km de Caracas y a 400 km de Valencia.**
5. Un auto sale de Ibagué hacia Cali a las 4 p. m. a 50 km/h. ¿A qué hora lo alcanzará otro auto que sale de Bogotá a las 2 p. m. a 75 km/h siendo la distancia entre Bogotá e Ibagué de 225 km? **R. A las 7 p. m.**
6. Un auto sale de Imperial hacia Lima a las 5 a. m. a 50 km/h y otro de Lima hacia Trujillo a las 7 a. m. a 80 km/h. ¿A qué distancia se hallarán a las 10 a. m. sabiendo que de Imperial a Lima hay 175 km? **R. 165 km**
7. Un auto sale de A hacia la derecha a 90 km/h a las 12 del día y en el mismo instante otro sale de B hacia la derecha a 75 km/h (B está a la derecha de A). El de A alcanza al de B a las 7 p. m. ¿Cuál es la distancia entre A y B? **R. 105 km**

8. Un auto sale de Caracas hacia San Juan de los Morros a las 8 a. m. a 35 km/h (distancia entre Caracas y San Juan de los Morros, 140 km). ¿A qué hora salió otro auto que iba a 70 km/h si llegaron al mismo tiempo a San Juan de los Morros? **R. 10 a. m.**
9. Dos autos salen de dos ciudades A y B distantes entre sí 100 km, ambos hacia el Este. (B está más al Este que A .) El de B sale a las 6 a. m. a 60 km por hora y el de A a las 8 a. m. a 80 km/h. ¿A qué hora se encontrarán sabiendo que se han detenido, el que salió de B de 12 a 1 y el que salió de A de 12 a 2 para almorzar, reanudando después su marcha a las mismas velocidades anteriores? **R. 12 p. m.**

205

Un hacendado lleva al banco tres bolsas con dinero. La 1ª y la 2ª juntas tienen \$350; la 2ª y la 3ª juntas, \$300, y la 1ª y la 3ª juntas, \$250. ¿Cuánto tiene cada bolsa?

$$1^{\text{a}} \text{ bolsa} + 2^{\text{a}} \text{ bolsa} = \$350$$

$$2^{\text{a}} \text{ bolsa} + 3^{\text{a}} \text{ bolsa} = \$300$$

$$1^{\text{a}} \text{ bolsa} + 3^{\text{a}} \text{ bolsa} = \$250$$

$$\text{Suma: } \$900$$

La suma \$900 contiene dos veces lo de la primera bolsa, más dos veces lo de la segunda, más dos veces lo de la tercera, luego la mitad de la suma $\$900 \div 2 = \$450 = 1^{\text{a}} \text{ bolsa} + 2^{\text{a}} \text{ bolsa} + 3^{\text{a}} \text{ bolsa}$.

Si las tres juntas tienen \$450, y la 1ª y la 2ª, \$350, la tercera tendrá $\$450 - \$350 = \$100$.

La segunda tendrá $\$300 - \$100 = \$200$.

La primera tendrá $\$350 - \$200 = \$150$.

1ª, \$150; 2ª, \$200; 3ª, \$100. R.

Comprobación

La 1ª y la 2ª bolsa tendrán $\$150 + \$200 = \$350$.

La 2ª y la 3ª bolsa " $\$200 + \$100 = \$300$.

La 1ª y la 3ª bolsa " $\$150 + \$100 = \$250$.

Luego, los valores hallados para las incógnitas satisfacen las condiciones del problema.

66**Ejercicio**

- En un colegio hay tres aulas. La 1ª y la 2ª juntas tienen 85 alumnos; la 2ª y la 3ª, 75 alumnos; la 1ª y la 3ª, 80 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada clase? **R. 1ª, 45; 2ª, 40; 3ª, 35**
- La edad de Pedro y la de Juan suman 9 años; la de Juan y la de Enrique, 13 años y la de Pedro y la de Enrique, 12 años. Hallar las tres edades. **R. Pedro, 4 años; Juan, 5; Enrique, 8.**
- Un saco y un pantalón valen 75,000 bolívares; el pantalón y su chaleco, 51,000 bolívares y el saco y el chaleco, 66,000 bolívares. ¿Cuánto vale cada pieza? **R. Saco, bs. 45,000; pantalón, bs. 30,000; chaleco, bs. 21,000.**
- Un hacendado lleva al banco tres bolsas que contienen dinero. El doble de lo que contienen la 1ª y la 2ª bolsa es 140,000 bolívares; el triple de lo que contienen la 1ª y la 3ª es 240,000 bolívares y

la mitad de lo que contienen la 2ª y la 3ª es 45,000 bolívares. ¿Cuánto contiene cada bolsa?

R. 1ª, bs. 30,000; 2ª, bs. 40,000; 3ª, bs. 50,000

Multiplico un número por 6 y añado 15 al producto; resto 40 de esta suma y la diferencia la divido entre 25, obteniendo como cociente 71. ¿Cuál es el número?

206

Esta clase de problemas se comienza por el fin y se van haciendo operaciones inversas a las indicadas en el problema.

El resultado final es 71. Este 71 proviene de dividir entre 25, luego multiplicamos por 25:

$$71 \times 25 = 1,775$$

A este resultado, 1,775, le sumamos 40:

$$1,775 + 40 = 1,815$$

A 1,815 se le resta 15:

$$1,815 - 15 = 1,800$$

y finalmente, 1,800 se divide entre 6:

$$1,800 \div 6 = 300 \quad \text{R.}$$

Comprobación

Consiste en ver si multiplicando 300 por 6, añadiendo 15 a este producto, restando 40 de esta suma y dividiendo la diferencia entre 25, se obtiene como cociente 71, y en efecto:

$$\begin{aligned} 300 \times 6 &= 1,800 \\ 1,800 + 15 &= 1,815 \\ 1,815 - 40 &= 1,775 \\ 1,775 \div 25 &= 71 \end{aligned}$$

luego, 300 satisface las condiciones del problema.

1. Si a un número añado 23, resto 41 de esta suma y la diferencia la multiplico por 2, obtengo 132. ¿Cuál es el número? **R. 84**
2. ¿Cuál es el número que multiplicado por 5, añadiéndole 6 a este producto y dividiendo esta suma entre 2 se obtiene 23? **R. 8**
3. ¿Cuál es el número que sumado con 14, multiplicando esta suma por 11, dividiendo el producto que resulta entre 44 y restando 31 de este cociente, se obtiene 1,474? **R. 6,006**
4. Tenía cierta cantidad de dinero. Pagué una deuda de 86,000 colones; entonces recibí una cantidad igual a la que me quedaba y después presté 20,000 colones a un amigo. Si ahora tengo 232,000 colones, ¿cuánto tenía al principio? **R. 212,000 colones.**
5. El lunes perdí 40,000 colones; el martes gané 125,000 colones; el miércoles gané el doble de lo que tenía el martes, y el jueves, después de perder la mitad de lo que tenía, me quedaron 465,000 colones. ¿Cuánto tenía antes de empezar a jugar? **R. 225,000 colones.**

67

Ejercicio

- 207** Un depósito se puede llenar por dos llaves. Una vierte 150 litros en 5 minutos y la otra 180 litros en 9 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito, estando vacío y cerrado el desagüe, si se abren a un tiempo las dos llaves, sabiendo que su capacidad es de 550 litros?

La 1ª llave vierte 150 litros en 5 minutos; luego, en un minuto vierte $150 \div 5 = 30$ litros.
 La 2ª llave vierte 180 litros en 9 minutos; luego, en un minuto vierte $180 \div 9 = 20$ litros.
 Las dos llaves juntas vierten en un minuto $30 + 20 = 50$ litros.

Como la capacidad del depósito es de 550 litros, tardarán en llenarlo $550 \div 50 = 11$ minutos. **R.**

Comprobación

La 1ª llave, en 11 minutos, vierte $11 \times 30 = 330$ litros.

La 2ª llave, en 11 minutos, vierte $11 \times 20 = 220$ litros.

Las dos llaves juntas, en 11 minutos, echarán $330 + 220 = 550$ litros, que es la capacidad del depósito.

- 208** Un estanque tiene dos llaves, una de las cuales vierte 117 litros en 9 minutos y la otra 112 litros en 8 minutos, y un desagüe por el que salen 42 litros en 6 minutos. El estanque contenía 500 litros de agua y abriendo las dos llaves y el desagüe al mismo tiempo se acabó de llenar en 48 minutos. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

La 1ª llave vierte $117 \div 9 = 13$ litros por minuto.

La 2ª llave vierte $112 \div 8 = 14$ litros por minuto.

Las dos llaves juntas vierten $13 + 14 = 27$ litros por minuto.

Por el desagüe salen $42 \div 6 = 7$ litros por minuto.

Si en un minuto las dos llaves echan 27 litros y salen 7 litros por el desagüe, quedan en el estanque 20 litros en cada minuto; luego, en 48 minutos, que es el tiempo que tarda en acabar de llenarse el estanque, se han quedado $20 \times 48 = 960$ litros, y como éste tenía ya 500 litros, la capacidad del estanque es $500 + 960 = 1,460$ litros. **R.**

Comprobación

La capacidad total hallada es 1,460 litros. Quitando los 500 litros que ya había en el estanque, quedan $1,460 - 500 = 960$ litros de capacidad. Estos 960 litros se llenan en $960 \div 20 = 48$ minutos.

68

Ejercicio

1. Un estanque cuya capacidad es de 300 litros está vacío y cerrado su desagüe. ¿En cuánto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo tres llaves que vierten, la 1ª, 36 litros en 3 minutos; la 2ª, 48 litros en 6 minutos y la 3ª, 15 litros en 3 minutos? **R. 12 min**

2. Un lavabo tiene una llave que vierte 24 litros en 4 minutos y un desagüe por el que salen 32 litros en 16 minutos. Si estando vacío el lavabo y abierto el desagüe se abre la llave, ¿en cuánto tiempo se llenará el lavabo si su capacidad es de 84 litros? **R. 21 min**
3. Si a un estanque de 480 litros de capacidad que está lleno se le abre el desagüe, se vacía en 1 hora. Si estando vacío y cerrado el desagüe, se abre su llave de agua, se llena en 40 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará, si estando vacío y abierto el desagüe, se abre la llave? **R. 2 h**
4. Un estanque se puede llenar por dos llaves, una de las cuales vierte 200 litros en 5 minutos y la otra 150 litros en 6 minutos. El estanque tiene un desagüe por el que salen 8 litros en 4 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío, se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe, sabiendo que su capacidad es de 441 litros? **R. 7 min**
5. Un estanque tiene tres grifos que vierten: el 1º, 50 litros en 5 minutos; el 2º, 91 litros en 7 minutos y el 3º, 108 litros en 12 minutos, y dos desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos, respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo, necesita 40 minutos para llenarse. ¿Cuál es su capacidad? **R. 560 ℓ**
6. Un depósito cuya capacidad es de 53,227 litros tiene dos llaves que vierten, una 654 ℓ en 3 minutos y la otra 1,260 ℓ en 4 minutos y dos desagües por los que salen, respectivamente, 95 ℓ en 5 minutos y 102 ℓ en 6 minutos. Si en el estanque hay ya 45,275 litros de agua y se abren a un tiempo las dos llaves y los desagües, ¿en cuánto tiempo se acabará de llenar? **R. 16 min**
7. Un depósito tiene tres llaves que vierten: la 1ª, 68 ℓ en 4 minutos; la 2ª, 108 ℓ en 6 minutos y la 3ª, 248 ℓ en 8 minutos y un desagüe por el que salen 55 ℓ en 5 minutos. Si el desagüe está cerrado y se abren las tres llaves al mismo tiempo, el depósito se llena en 53 minutos. ¿En cuánto tiempo puede vaciarlo el desagüe estando lleno y cerradas las llaves? **R. 5 h 18 min**
8. Si estando lleno un depósito se abre su desagüe por el que salen 54 ℓ en 9 minutos, el depósito se vacía en 5 horas. Si estando vacío y abierto el desagüe se abren dos llaves que vierten juntas 21 litros por minuto, ¿en cuánto tiempo se llenará el estanque? **R. 2 h**
9. Un estanque tiene agua hasta su tercera parte, y si ahora se abrieran una llave que echa 119 ℓ en 7 minutos y un desagüe por el que salen 280 litros en 8 minutos, el depósito se vaciaría en 53 minutos. ¿Cuál es la capacidad del estanque? **R. 2,862 ℓ**
10. Si en un estanque que está vacío y cuya capacidad es de 3,600 litros, se abrieran al mismo tiempo tres llaves y un desagüe, el estanque se llenaría en 15 minutos. Por el desagüe salen 240 litros en 4 minutos. Si el estanque tiene 600 litros de agua y está cerrado el desagüe, ¿en cuánto tiempo lo acabarán de llenar las tres llaves? **R. 10 min**

Un comerciante compró 30 trajes a \$2,000 cada uno. Vendió 20 trajes a \$1,800 cada uno. ¿A cómo tiene que vender los restantes para no perder?

Costo de los 30 trajes a \$2,000 cada uno: $30 \times 2,000 = \$60,000$.

Para no perder, es necesario que de la venta saque estos \$60,000 que gastó.

De la venta de 20 trajes a \$1,800 cada uno, sacó: $20 \times \$1,800 = \$36,000$; luego, lo que tiene que sacar de los trajes restantes para no perder es $\$60,000 - \$36,000 = \$24,000$.

Habiendo vendido 20 trajes, le quedan $30 - 20 = 10$ trajes.

Si de estos 10 trajes tiene que sacar \$24,000, cada traje tendrá que venderse a $\$24,000 \div 10 = \$2,400$. **R.**

Comprobación

Al vender los 10 trajes que le quedaban a \$2,400, obtuvo $10 \times \$2,400 = \$24,000$, y de los 20 trajes que ya había vendido antes a \$1,800 obtuvo $20 \times \$1,800 = \$36,000$; luego, en total obtuvo de las ventas $\$24,000 + \$36,000 = \$60,000$, que es el costo; luego, no pierde.

210

Compré cierto número de bueyes por \$560,000. Vendí 34 bueyes por \$221,000, perdiendo en cada uno \$500. ¿A cómo hay que vender el resto para que la ganancia total sea de \$213,000?

Costo de los bueyes: \$560,000.

Para ganar en total \$213,000 hay que sacar de la venta $\$560,000 + \$213,000 = \$773,000$.

De la primera venta que hice obtuve ya \$221,000; luego, lo que tengo que sacar de los bueyes que me quedan es $\$773,000 - \$221,000 = \$552,000$.

Ahora vamos a ver cuántos bueyes quedaron.

Precio de venta de un buey: $\$221,000 \div 34 = \$6,500$. Al vender cada buey a \$6,500, perdí \$500 en cada uno; luego, el precio de compra fue de \$7,000 cada buey.

Si cada buey me costó \$7,000 y el importe total de la compra fue de \$560,000, compré $\$560,000 \div \$7,000 = 80$ bueyes.

Como ya se vendieron 34 bueyes, quedan $80 - 34 = 46$ bueyes.

De estos 46 bueyes que me quedan tengo que obtener \$552,000, luego cada buey hay que venderlo a $\$552,000 \div 46 = \$12,000$. **R.**

Comprobación

Vendiendo los 46 bueyes que le quedaban a \$12,000, obtiene $46 \times \$12,000 = \$552,000$, y como de la primera venta obtuvo \$221,000, ha obtenido en total $\$552,000 + \$221,000 = \$773,000$. Como el costo fue de \$560,000, la ganancia es $\$773,000 - \$560,000 = \$213,000$; luego, se cumplen las condiciones del problema.

69

Ejercicio

- Compré 500 sombreros a \$60 cada uno. Vendí cierto número en \$5,000, a \$50 cada uno. ¿A cómo tengo que vender el resto para no perder? **R. \$62.5 c/u**
- Un librero compró 15 libros a 120 quetzales cada uno. Habiéndose deteriorado algo 9 de ellos, tuvo que venderlos a 80 quetzales cada uno. ¿A cómo tiene que vender los restantes para no perder? **R. Q. 180 c/u**
- Un comerciante compró 11 trajes por 3,300,000 bolívares. Vendió 5 a bs. 240,000 cada uno. ¿A cómo tiene que vender los restantes para ganar bs. 900,000? **R. bs. 500,000 c/u**

4. Compré 80 libros por 5,600 nuevos soles. Vendí una parte por 5,400, a 90 cada uno. ¿Cuántos libros me quedan y cuánto gané en cada uno de los que vendí? **R. Quedan 20; gané 20 nuevos soles.**
5. Un comerciante compró 600 bolsas de frijoles a \$8 cada una. Por la venta de cierto número de ellas a \$6 cada una, recibe \$540. ¿A cómo tendrá que vender las restantes para ganar en total \$330? **R. \$9 c/u**
6. Un comerciante compró cierto número de bolsas de azúcar por 600,000 bolívares y las vendió por 840,000, ganando 2,000 en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas compró y cuánto pagó por cada una? **R. 120; 5,000 bolívares.**
7. Vendí 60 bolsas de azúcar por 480,000 bolívares, ganando 3,000 en cada una. ¿Por cuántas bolsas estaba integrado un pedido que hice al mismo precio y por el cual pagué 400,000? **R. 80 bolsas.**
8. Un hacendado compró cierto número de vacas por 2,400,000 colones. Vendió una parte por 883,200 a 27,600 cada una, perdiendo 2,400 en cada vaca. ¿A cómo tiene que vender las restantes para ganar 139,200? **R. 34,500 colones c/u.**
9. Compré cierto número de libros por 600 nuevos soles. Vendí 40 perdiendo 2 en cada uno y recibí 320. ¿A cómo tengo que vender los restantes si quiero ganar 60? **R. 17 nuevos soles c/u.**
10. Un caballista compró cierto número de caballos por \$1,000,000. Vendió una parte por \$840,000 a \$21,000 cada uno y ganó en esta operación \$40,000. ¿Cuántos caballos había comprado y cuánto ganó en cada uno de los que vendió? **R. 50; \$1,000**
11. Compré 514 libros por 4,626,000 bolívares. Vendí una parte por 3,600,000, ganando 3,000 en cada libro y otra parte por 912,000, perdiendo 1,000 en cada libro. ¿A cómo vendí los restantes si en total gané 1,186,000? **R. 13,000 bolívares c/u.**
12. Un comerciante compró cierto número de bolsas de frijoles por \$2,496, a \$8 cada una. Vendió una parte por \$720, ganando \$1 en cada bolsa, y otra parte por \$1,720, ganando \$2 en cada bolsa. ¿A cómo vendió cada una de las bolsas restantes si en total obtuvo una utilidad de \$784? **R. \$14**
13. Un hacendado compró 815 vacas por \$4,890,000. Vendió una parte en \$2,047,500, ganando \$500 en cada una, y otra parte en \$550,000, perdiendo \$500 en cada una. ¿A cómo vendió las restantes si en total perdió \$292,500? **R. \$5,000 c/u.**
14. Un comerciante compró 20 trajes. Vendió 5 a 75,000 bolívares c/u, 6 a 60,000 c/u, 7 a 45,000 c/u y el resto a 70,000 c/u, obteniendo así una utilidad de 390,000. ¿Cuál fue el costo de cada traje? **R. 40,000 bolívares.**
15. Compré cierto número de pares de zapatos por 4,824,000 bolívares, a 36,000 cada uno. Al vender una parte en 1,568,000, perdí 8,000 en cada par. Si el resto lo vendí ganando 32,000 en cada par, ¿gané o perdí en total y cuánto? **R. Gané bs. 2,048,000**
16. Compré 90 libros. Vendí 35 de ellos por \$2,800, perdiendo \$30 en cada uno, y 30 ganando \$10 en cada uno. ¿A cómo vendí los que me quedaban si en definitiva no gané ni perdí? **R. \$140 c/u.**
17. Un importador adquiere cierto número de automóviles por \$10,800,000. Vendió una parte por \$4,640,000, a \$40,000 cada uno, perdiendo \$10,000 en cada uno, y otra parte por \$3,600,000, ganando \$10,000 en cada uno. ¿A cómo vendió los restantes si en definitiva tuvo una ganancia de \$400,000? **R. \$74,000 c/u.**

211

Un capataz contrata un obrero ofreciéndole \$50 por cada día que trabaje y \$20 por cada día que, a causa de la lluvia, no pueda trabajar. Al cabo de 23 días el obrero recibe \$910. ¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó?

Si el obrero hubiera trabajado los 23 días hubiera recibido $23 \times \$50 = \$1,150$.

Como solamente ha recibido \$910, la diferencia $\$1,150 - \$910 = \$240$ proviene de los días que no pudo trabajar.

Cada día que no trabaja deja de recibir $\$50 - \$20 = \$30$, luego no trabajó $\$240 \div \$30 = 8$ días, y trabajó $23 - 8 = 15$ días. **R.**

Comprobación

En 15 días que trabajó recibió $15 \times \$50 = \750 .

En 8 días que no trabajó recibió $8 \times \$20 = \160 .

En total recibió $\$750 + \$160 = \$910$.

70

Ejercicio

- Un capataz contrata un obrero ofreciéndole 70 nuevos soles por cada día que trabaje y 40 por cada día que, sin culpa suya, no pueda trabajar. Al cabo de 35 días el obrero ha recibido 2,000. ¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó? **R. Trabajó 20 días, no trabajó 15 días.**
- Se tienen \$129 en 36 monedas de \$5 y de \$2. ¿Cuántas monedas son de \$5 y cuántas de \$2? **R. 19 de \$5, 17 de \$2.**
- En un teatro, las entradas de adulto costaban 9,000 bolívares y las de niños 3,000. Concurrieron 752 espectadores y se recaudaron bs. 5,472,000. ¿Cuántos espectadores eran adultos y cuántos niños? **R. 536 adultos y 216 niños.**
- En un ómnibus iban 40 excursionistas. Los hombres pagaban \$40 y las damas \$25. Los pasajes costaron en total \$1,345. ¿Cuántos excursionistas eran hombres y cuántas damas? **R. 23 hombres y 17 damas.**
- Un comerciante pagó 45,900 nuevos soles por 128 trajes de lana y de gabardina. Por cada traje de lana pagó 300 y por cada traje de gabardina 400. ¿Cuántos trajes de cada clase compró? **R. 53 de lana y 75 de gabardina.**
- Para tener \$1,230 en 150 monedas que son de cinco y diez pesos, ¿cuántas deben ser de cinco y cuántas de diez? **R. 54 de cinco, 96 de diez.**
- Cada día que un alumno sabe sus lecciones, el profesor le da 5 vales, y cada día que no las sabe el alumno, tiene que darle al profesor 3 vales. Al cabo de 18 días el alumno ha recibido 34 vales. ¿Cuántos días supo sus lecciones y cuántos no las supo? **R. Las supo 11 días, no las supo 7 días.**
- Un padre le plantea 9 problemas a su hijo, ofreciéndole \$5 por cada problema que resuelva, pero por cada problema que no resuelva el muchacho perderá \$2. Después de trabajar en los 9 problemas el muchacho recibe \$31. ¿Cuántos problemas resolvió y cuántos no? **R. Resolvió 7, no resolvió 2.**
- Un padre plantea 15 problemas a su hijo, ofreciéndole \$4 por cada uno que resuelva, pero a condición de que el muchacho perderá \$2 por cada uno que no resuelva. Después de trabajar en los 15 problemas, quedaron en paz. ¿Cuántos problemas resolvió el muchacho y cuántos no? **R. Resolvió 5, no resolvió 10.**

10. Un capataz contrata un obrero, ofreciéndole \$120 por cada día que trabaje pero con la condición de que, por cada día que el obrero, por su voluntad, no vaya al trabajo, tendrá que pagarle al capataz \$40. Al cabo de 18 días el obrero le debe al capataz \$240. ¿Cuántos días ha trabajado y cuántos días ha dejado el obrero de hacerlo? **R. Trabajó 3 días, dejó de ir 15 días.**

MISCELÁNEA

71

Ejercicio

1. Dos hombres ajustan una obra en \$600 y trabajan durante 5 días. Uno recibe un jornal de \$40 diarios. ¿Cuál es el jornal del otro? **R. \$80**
2. Vendo varios lápices en \$9.60, ganando 40 ¢ en cada uno. Si me habían costado \$7.20, ¿cuántos lápices he vendido? **R. 6**
3. Una persona gana \$800 a la semana y gasta \$75 diarios. ¿Cuánto podrá ahorrar en 56 días? **R. \$2,200**
4. Si me saco 1,000,000 bolívars en la lotería, compro un automóvil de 7,500,000 y me quedan 500,000. ¿Cuánto tengo? **R. 7,000,000 bolívars.**
5. Con el dinero que tengo puedo comprar 6 periódicos y me sobran \$5, pero si quisiera comprar 13 periódicos me faltarían \$30. ¿Cuánto vale cada periódico? **R. \$5**
6. Un reloj que se adelanta 4 minutos cada hora indica las 4:20. Si ha estado andando 8 horas, ¿cuál es la hora exacta? **R. Las 3:48**
7. ¿Por qué número se multiplica 815 cuando se convierte en 58,680? **R. Por 72**
8. 10,602 es el producto de tres factores. Si dos de los factores son 18 y 19, ¿cuál es el otro factor? **R. 31**
9. A tiene 16 años; a B le faltan 8 años para tener 10 años más que el doble de lo que tiene A y a C le sobran 9 años para tener la mitad de la suma de las edades de A y B. ¿En cuánto excede 70 años a la suma de las edades de B y C disminuida en la edad de A? **R. 18 años.**
10. Un hombre que tenía 750 nuevos soles compró un libro que le costó 60; un par de zapatos que le costó 20 menos que el doble del libro y un traje cuyo precio excede en 360 a la diferencia entre el precio de los zapatos y el precio del libro. ¿Cuánto le sobró? **R. 190 nuevos soles.**
11. Si A tuviera \$17 menos, tendría \$18. Si B tuviera \$15 más, tendría \$38. Si C tuviera \$5 menos, tendría \$10 más que A y B juntos. Si D tuviera \$18 menos, tendría \$9 más que la diferencia entre la suma de lo que tienen B y C y lo que tiene A. ¿Cuánto tienen los cuatro? **R. \$219**
12. Para ir de Ciudad Juárez a Toluca, un viajero recorre la primera semana 216 km; la segunda 8 km menos que el doble de lo que recorrió la primera; la tercera 83 km más que en la primera y segunda semana juntas y la cuarta 96 km menos que en las tres anteriores. Si aún le faltan 245 km para llegar a su destino, ¿cuál es la distancia entre las dos ciudades? **R. 2,875 km.**
13. ¿Cuál es la distancia recorrida por un atleta en una carrera de obstáculos si ha vencido 15 obstáculos que distan 6 metros uno de otro, y si la línea de arrancada dista 4 metros del primer obstáculo y la meta del último 8 metros? **R. 96 m.**
14. Se pierden \$150 en la venta de 50 botellas de aceite a \$60 cada una. Hallar el precio de compra. **R. \$63**
15. ¿Cuántos meses (de 30 días) ha trabajado una persona que ha ahorrado \$1,800 si su jornal diario es de \$50 y gasta \$20 diarios? **R. 2 meses.**

16. Se compran libretas a \$2,000 el millar. Si las vendo a \$5, ¿cuál es mi ganancia en 80 libretas?
R. \$240
17. Compro igual número de vacas y caballos por 12,375 balboas. ¿Cuántas vacas y caballos habré comprado si el precio de una vaca es de 600 y el de un caballo 525? **R. 11**
18. Un hacendado compra igual número de caballos, vacas, bueyes y terneros en \$573,500. Cada caballo le costó \$5,000, cada vaca \$6,000, cada buey \$7,000 y cada ternero \$500. ¿Cuántos animales de cada clase compró? **R. 31**
19. Se reparten 39,870 córdobas entre tres personas. La primera recibe 1,425 más que la tercera y la segunda 1,770 más que la tercera. ¿Cuánto recibe cada una? **R. 1ª, 13,650 córdobas; 2ª, 13,995 córdobas; 3ª, 12,225 córdobas.**
20. A tiene 9 años, B tantos como A y C, C tantos como A y D; D tiene 7 años. ¿Cuál es la edad de M, que si tuviera 15 años menos tendría igual edad que los cuatro anteriores juntos? **R. 72 años.**
21. A tiene 42 años; las edades de A, B y C suman 88 años y C tiene 24 años menos que A. ¿Cuál es la edad de B y cuál la de C? **R. B, 28 años; C, 18 años.**
22. Tengo \$67 en 20 monedas de \$5 y de \$2. ¿Cuántas monedas tengo de cada denominación?
R. 9 de \$5 y 11 de \$2
23. Un empleado que gana \$650 semanales ahorra cada semana cierta suma. Cuando tiene ahorrados \$980 ha ganado \$4,550. ¿Cuánto ahorra a la semana? **R. \$140**
24. Para poder gastar 70 nuevos soles diarios y ahorrar 6,720 al año, tendría que ganar 660 más al mes. ¿Cuál es mi sueldo mensual? (mes de 30 días). **R. 2,000 nuevos soles.**
25. Mi sueldo me permite tener los siguientes gastos anuales: \$48,000 en alquiler, \$60,000 en alimentación de mi familia y \$54,000 en otros gastos. Si además ahorro \$3,500 al mes, ¿cuál es mi sueldo mensual? **R. \$17,000**
26. ¿Entre cuál número hay que dividir a 589,245 para que el cociente sea 723? **R. Entre 815.**
27. ¿Por cuál número hay que multiplicar el exceso de 382 sobre 191 para obtener 4,202 como producto? **R. Por 22.**
28. Gano 6,920 balboas en la venta de 173 sacos de mercancías a 240 cada uno. Hallar el costo de un saco. **R. 200 balboas.**
29. Un librero adquiere cierto número de libros por 144,000 bolívares. Si hubiera comprado 11 libros más hubiera pagado 408,000. ¿Cuántos libros ha comprado y cuánto ganará si cada libro lo vende por 29,000? **R. 6; bs. 30,000**
30. Un viajero, asomado a la ventanilla de un tren que va a 36 km/h, observa que un tren estacionado en una vía adyacente pasa ante él en 12 segundos. ¿Cuál será la longitud de este tren? **R. 120 m**
31. Un viajero desde la ventanilla de un tren que va a 72 km/h, ve pasar ante él en 4 segundos, otro tren que va por una vía paralela adyacente, en sentido contrario, a 108 km/h. ¿Cuál es la longitud de este tren? **R. 200 m**
32. Un estanque de 300 litros de capacidad tiene una llave que vierte 20 litros en 2 minutos y un desagüe por el que salen 24 litros en 3 minutos. ¿En cuánto tiempo se acabará de llenar el estanque si teniendo ya 200 litros de agua abrimos al mismo tiempo la llave y el desagüe? **R. 50 min**
33. ¿Entre cuántas personas se reparten 185 naranjas si a cada persona tocaron 10 y sobraron 15 naranjas? **R. Entre 17**

34. Tengo 17 billetes de \$500. Si vendo 6 vacas a \$750 cada una y un caballo por \$9,500, ¿cuántos trajes de \$450 podré comprar con el total de ese dinero? **R. 50 trajes.**
35. El producto de dos números es 7,533, y uno de los números es 81. ¿En cuánto excede el doble de la suma de los dos números a la mitad de su diferencia? **R. En 342**
36. Compré 120 libros a 8,000 colones cada uno; vendí 80 perdiendo 2,000 en cada uno, y 20 más al costo. ¿A cómo vendí los restantes si en definitiva no gané ni perdí? **R. A 16,000 colones c/u.**
37. Un empleado que gana \$700 diarios gasta \$1,400 semanales. ¿Cuántos días tendrá que trabajar para comprar un auto de \$56,000? **R. 112 días.**
38. Un comerciante compró cierto número de trajes por 1,560,000 colones, a 13,000 cada uno, y por cada 12 trajes que compró le regalaron 1. Vendió 60 trajes, ganando 5,000 en cada uno; 30 trajes, perdiendo 5,000 en cada uno; se le echaron a perder 6 trajes y el resto lo vendió perdiendo 3,000 en cada uno. ¿Ganó o perdió en total y cuánto? **R. Perdió 24,000 colones.**
39. Un importador no quiere vender 6 automóviles cuando le ofrecen 37,000 nuevos soles por cada uno. Varios meses después vende los 6 por 216,000. Si en este tiempo ha gastado 6,840 por concepto de alquiler del local y otros gastos, ¿cuál es su pérdida en cada automóvil? **R. 2,140 nuevos soles.**
40. Un librero adquiere 500 libros a 2,000 colones cada uno y luego 6 docenas de libros a 60,000 cada una. Si luego los vende todos por 1,932,000, ¿cuánto gana en cada libro? **R. 1,000 colones.**
41. Un importador que ha adquirido 80 sacos de frijoles a 3,000 colones cada uno y que ha pagado además 200 por transporte de cada saco, quiere saber cuánto tendrá que sacar de la venta de esa mercancía para ganar 600 por saco. **R. 304,000 colones.**
42. Tengo alquilada una casa que me produce \$500 diarios y un automóvil que me produce \$200 diarios. Mi gasto diario es \$200 por alojamiento y \$100 de comida, pero el sábado y el domingo los paso en casa de un amigo. ¿Cuánto ahorraré en 8 semanas? **R. \$27,200**
43. ¿Por cuál número se multiplica 634 cuando se aumenta en 3,170? **R. Por 6**
44. ¿Entre qué número se divide 16,119 cuando se disminuye en 14,328? **R. Entre 9**
45. Un hacendado vende 118 caballos a 700,000 bolívares c/u y cierto número de vacas a 600,000 c/u. Con el importe total de la venta compró una casa de 146,560,000 y le sobraron 3,240,000. ¿Cuántas vacas vendió? **R. 112**
46. Un comerciante compró sombreros, pagando 48,000 colones por cada 16 sombreros. Si los tiene que vender a 2,400, ¿cuántos sombreros ha vendido cuando su pérdida asciende a 19,200 colones? **R. 32**
47. Vendí por 44,500 colones los libros que me habían costado 88,500, perdiendo así 400 colones en cada libro. ¿Cuántos libros tenía? **R. 110**
48. Repartí \$87 entre A y B de modo que A recibió \$11 más que B. ¿Cuánto le tocó a cada uno? **R. A, \$49; B, \$38**
49. Un hombre da 621,000 quetzales y 103 caballos que valen Q. 5,400 cada uno, a cambio de un terreno que compra a Q. 65,400 el área. ¿Cuántas áreas tiene el terreno? **R. 18**
50. Con el dinero que tenía compré cierto número de cuadernos a \$16 c/u y me sobraron \$300. Si cada cuaderno me hubiera costado \$20 no me hubiera sobrado más que \$100. ¿Cuántos cuadernos he comprado? **R. 50**

51. Con el dinero que tenía compré cierto número de entradas a \$13 cada una y me sobraron \$8. Si cada entrada me hubiera costado \$19 me hubieran faltado \$16. ¿Cuántas entradas compré y cuánto dinero tenía? **R. 4, \$60**
52. Un hacendado compró 64 bueyes por \$128,000. En mantenerlos ha gastado \$8,000. Si se mueren 14 bueyes y el resto los vende a \$3,000 c/u, ¿gana o pierde y cuánto en cada buey de los que quedaron? **R. Gana \$280 en cada uno.**
53. Un ganadero compra 40 caballos a 10,000 quetzales cada uno y por cada 10 que compra recibe uno de regalo. En mantenerlos ha gastado Q. 60,000. Si los vende todos por Q. 424,800, ¿gana o pierde y cuánto en cada caballo? **R. Pierde Q. 800 en cada uno.**
54. Adquiero 60 libros. Al vender 30 libros por 660 balboas gano 6 por libro. ¿Cuánto me costaron los 60 libros? **R. 960 balboas.**
55. ¿A cómo he de vender lo que me ha costado 6,300 quetzales para que la ganancia sea la tercera parte del costo? **R. Q. 8,400**
56. Cuando vendo una casa gano 6,300,000 colones, lo que representa la tercera parte de lo que me costó. ¿En cuánto vendí la casa? **R. 25,200,000 colones.**
57. Un hombre compró periódicos a 8 por \$24 y los vendió a 9 por \$45, ganando así \$62. ¿Cuántos libros a \$600 cada uno puede comprar con el producto de la venta de tantos caballos como periódicos compró a \$1,800 cada caballo? **R. 93**
58. Un hacendado compró cierto número de vacas por 1,785 balboas. Si hubiera comprado 7 vacas más y cada una de éstas le hubiera costado 10 menos, habría pagado por todas 2,450. ¿Cuántas vacas compró? **R. 17**
59. Si vendo a 80 balboas cada uno de los caballos que tengo, pierdo 600, y si los vendo a 65 balboas, pierdo 1,500. ¿Cuántos caballos tengo y cuánto me costó cada uno? **R. 60; 90 balboas.**
60. ¿A cómo tengo que vender los libros que compré a \$60 c/u para ganar en 15 libros el precio de compra de 5 libros? **R. A \$80**
61. Un agente recibe cierto número de cuadernos para vender a \$5. Se le estropean 15, y vendiendo los restantes a \$8 cada uno, no tuvo pérdida. ¿Cuántos cuadernos le fueron entregados? **R. 40**
62. Cuando vendo una casa por 126,000 balboas gano el doble del costo más 6,000. ¿Cuánto me costó la casa? **R. 40,000 balboas.**
63. Un capataz ofrece a un obrero un sueldo anual de \$19,000 y un caballo. Al cabo de 8 meses el obrero es despedido, recibiendo \$11,000 y el caballo. ¿Cuál era el valor del caballo? **R. \$5,000**
64. Si en cada caja de lápices cabe una docena, ¿cuántas cajas harán falta para guardar 108 lápices? **R. 9 cajas.**
65. Un comerciante compró 5 bastones, 9 sombreros, 14 libros y cierto número de cigarreras por \$2,980. Vendió los bastones a \$80 c/u, ganando \$30 en cada uno; los sombreros a \$180 c/u, perdiendo \$20 en cada uno, y los libros a \$30 c/u, ganando \$10 en cada uno. ¿Cuántas cigarreras compró si al venderlas a \$60 c/u ganó \$10 en cada una? **R. 13**
66. Un hombre compró cierto número de anillos por \$3,300, a \$60 cada uno. Vendió 15, ganando \$20 en cada uno; 28, perdiendo \$20 en cada uno y se le perdieron 5. ¿A cómo vendió los anillos que le quedaban si en definitiva ganó \$49? **R. A \$147**
67. Vendo un anillo por \$325; si lo hubiera vendido por \$63 más, ganaría \$89. ¿Cuánto me costó el anillo? **R. \$299**

68. Vendo un anillo por \$186; si lo hubiera vendido por \$12 menos, perdería \$30. ¿Cuánto me costó el anillo? **R. \$204**
69. ¿A qué hora y a qué distancia de Lima alcanzará un auto, que sale a las 11 a. m. a 50 km/h hacia Chiclayo, a otro auto que va en la misma dirección y que pasó por Lima a las 5 a. m. a 30 km/h? **R. A las 8 p. m., a 450 km de Lima.**
70. 11 personas iban a comprar una finca que vale 214,500 nuevos soles, contribuyendo por partes iguales. Se suman otros amigos y deciden formar parte de la sociedad, con lo cual cada uno aporta 3,000 menos que antes. ¿Cuántos fueron los que se sumaron a los primeros? **R. 2**
71. Se compran en un teatro 5 entradas de hombre y 6 de mujer por \$270, y más tarde se compran 8 de hombre y 6 de mujer por \$360. ¿Cuánto cuesta cada entrada de hombre y cuánto cada una de mujer? **R. De hombre, \$30; de mujer, \$20**
72. Se reparten \$4,893 entre tres personas de modo que la segunda reciba \$854 más que la tercera y la primera \$110 más que la segunda. Hallar la parte de cada persona. **R. 1ª, \$1,989; 2ª, \$1,879; 3ª, \$1,025**
73. Se reparte una herencia de 45,185,000 bolívares entre cuatro personas. La primera recibe 800,000 menos que la segunda; la segunda 2,000,000 más que la tercera; la tercera 3,143,000 más que la cuarta. Hallar la parte de cada persona. **R. 1ª, bs. 12,482,000; 2ª, bs. 13,282,000; 3ª, bs. 11,282,000; 4ª, bs. 8,139,000**
74. Un capataz contrata un obrero por 80 días ofreciéndole \$50 por cada día que trabaje y \$30 por cada día que, a causa de la lluvia, no pueda trabajar. Al cabo de 80 días el obrero ha recibido \$3,500. ¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó? **R. Trabajó 55 días, no trabajó 25 días.**
75. Un padre plantea 12 problemas a su hijo con la condición de que por cada problema que resuelva el muchacho recibirá \$10 y por cada problema que no resuelva perderá \$6. Después de trabajar en los 12 problemas el muchacho recibe \$72. ¿Cuántos problemas resolvió y cuántos no? **R. Resolvió 9; no resolvió 3**
76. Compré cierto número de caballos por \$450,000. Por la venta de una parte recibí \$400,000 a razón de \$10,000 por cada caballo, y en esta operación gané \$1,000 por caballo. ¿A cómo tuve que vender los restantes si en definitiva tuve una pérdida de \$10,000? **R. \$4,000 c/u**



De unas tablillas encontradas en las orillas del río Eufrates, se deduce que los primeros que aplicaron la elevación a potencia fueron los sacerdotes mesopotámicos, quienes resolvían la multiplicación sin necesidad de recurrir al ábaco, pues

empleaban la tabla de cuadrados, al basarse en el principio que dice “el producto de dos números es siempre igual al cuadrado de su promedio, menos el cuadrado de su semi-diferencia”.

Capítulo **XV**

ELEVACIÓN A POTENCIAS Y SUS OPERACIONES INVERSAS

212 **LA POTENCIACIÓN O ELEVACIÓN A POTENCIAS** es una operación de composición que tiene por objeto hallar las potencias de un número.

213 **POTENCIA** de un número es el resultado de tomarlo como factor dos o más veces.
Así, 9 es una potencia de 3 porque $3 \times 3 = 9$; 64 es una potencia de 4 porque $4 \times 4 \times 4 = 64$.

214 **NOMENCLATURA Y NOTACIÓN**

El número que se multiplica por sí mismo se llama **base** de la potencia. A la derecha y arriba de la base se escribe un número pequeño llamado **exponente**, que indica las veces que la base se repite como factor.

La segunda potencia o **cuadrado** de un número es el resultado de tomarlo como factor dos veces. Así: $5^2 = 5 \times 5 = 25$.

La tercera potencia o **cubo** de un número es el resultado de tomarlo como factor tres veces. Así: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

La cuarta potencia de un número es el resultado de tomarlo **cuatro veces** como factor. Así: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

La quinta, la sexta, la séptima, etc., potencia de un número es el resultado de tomarlo como factor cinco, seis, siete, etc., veces. Así:

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \\ 3^6 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729 \\ 2^7 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128 \end{aligned}$$

y en general, la **enésima** potencia de un número es el resultado de tomarlo como factor n veces. Así:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times A \dots}_{n \text{ veces}}$$

POTENCIAS SUCESIVAS

215

Toda cantidad elevada a cero equivale a 1. Así: $2^0 = 1$, $5^0 = 1$.

Se ha convenido en llamar primera potencia de un número al mismo número. Así: $3^1 = 3$, $5^1 = 5$.

Por tanto, las potencias sucesivas de 2 serán:

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, \text{ etcétera,}$$

y las potencias sucesivas de 3 serán:

$$3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \text{ etcétera.}$$

Las potencias sucesivas de 10 serán:

$$10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1,000, 10^4 = 10,000, 10^5 = 100,000, \text{ etcétera.}$$

Desarrollar:

1. 6^3

4. 3^6

7. 5^5

10. 31^2

13. 11^5

2. 5^4

5. 2^8

8. 8^4

11. 415^2

14. $1,034^2$

3. 7^3

6. 3^9

9. 9^6

12. 18^4

15. 3^{12}

Hallar el valor de:

16. $2^0 \times 2$

R. 2

22. $2^{10} \times 10^2 \times 8^0$

R. 102,400

17. $3^0 \times 5^4$

R. 625

23. $6^2 \times 9^0 \times 2^{10}$

R. 36,864

18. $4^2 \times 3^2$

R. 144

24. $\frac{3^0}{2^2 \times 3^2}$

R. $\frac{1}{36}$

19. $5^0 \times 3^7 \times 6^0$

R. 2,187

25. $\frac{5^3}{3^0}$

R. 125

20. $2^0 \times 3^0 \times 4^0 \times 5^0$

R. 1

26. $\frac{3^2 \times 3^0}{9}$

R. 1

21. $3^3 \times 4^2 \times 5^4$

R. 270,000

27. $\frac{2^4 \times 5^2}{5^0 \times 4^2}$

R. 25

72

Ejercicio

$$28. \frac{3^4 \times a^0}{9^2 \times b^0} \quad \text{R. 1}$$

$$29. \frac{5^5 \times 2^3}{10^2 \times 5^0} \quad \text{R. 250}$$

$$30. 3^0 \times \frac{5^2}{4^0} \quad \text{R. 25}$$

$$31. 3^3 \times 2^2 - 3^0 \times 4^0 \quad \text{R. 107}$$

$$32. 8 \times 5^0 - 5^0 \quad \text{R. 7}$$

$$33. a^0 b^0 + c^0 + 4d^0 \quad \text{R. 6}$$

216

CUADRADO

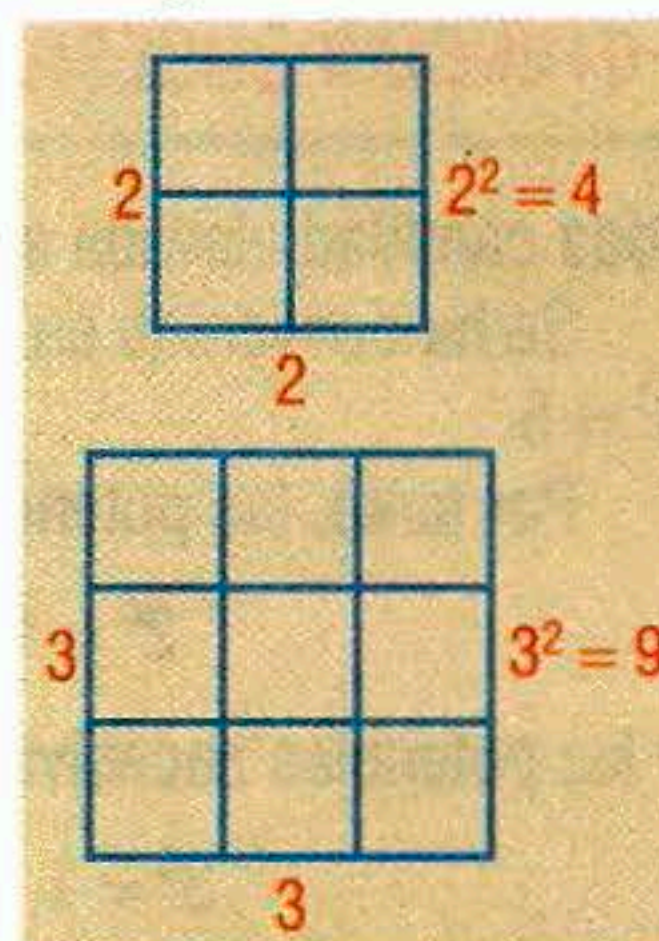
La segunda potencia de un número se llama **cuadrado** de este número porque representa siempre (en unidades de área) el área de un cuadrado cuyo lado sea dicho número (en unidades de longitud).

Así, si un cuadrado (Fig. 32) tiene de lado 2 cm, el área de dicho cuadrado es: $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$; si el lado es 3 cm, el área del cuadrado es: $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$; si el lado es 4 metros, el área del cuadrado es: $4 \times 4 = 16 \text{ m}^2$, etcétera.

En general n^2 representa el área de un cuadrado cuyo lado sea n .

Por su mucha utilidad, el alumno debe conocer los cuadrados de los 20 primeros números:

Figura 32

**NÚMERO CUADRADO**

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

NÚMERO CUADRADO

8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196

NÚMERO CUADRADO

15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

217

CUBO

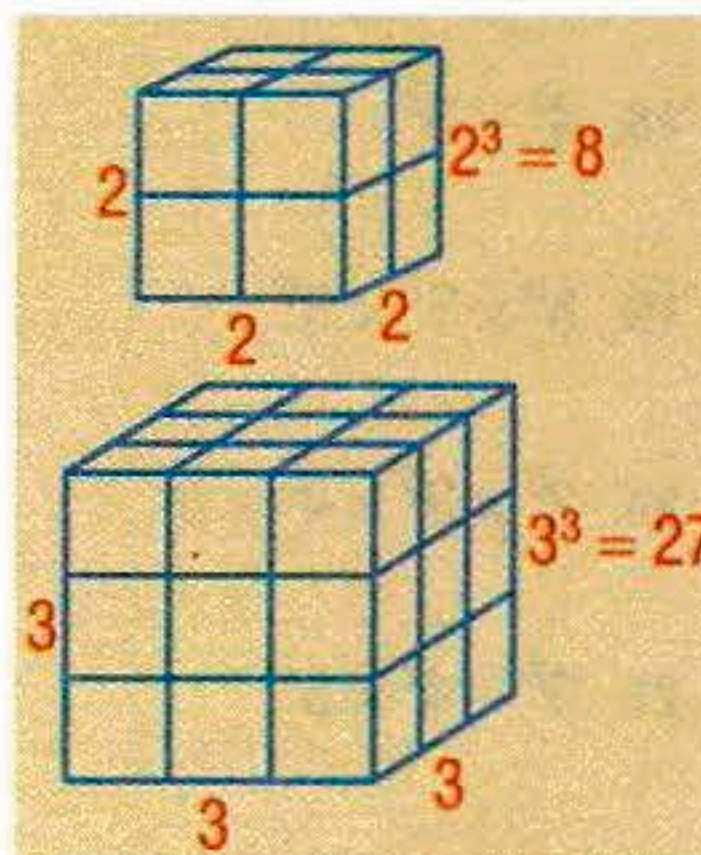
La tercera potencia de un número se llama **cubo** de este número, porque representa (en unidades de volumen) el volumen de un cubo cuya arista sea dicho número (en unidades de longitud).

Así, si la arista de un cubo (Fig. 33) es 2 cm, el volumen de dicho cubo será: $2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ cm}^3$; si la arista es 3 cm, el volumen del cubo será: $3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ cm}^3$.

En general, n^3 representa el volumen de un cubo cuya arista es n .

Por su utilidad, el alumno debe conocer de memoria los cubos de los 20 primeros números:

Figura 33



NÚMERO	CUBO	NÚMERO	CUBO	NÚMERO	CUBO
1	1	8	512	15	3,375
2	8	9	729	16	4,096
3	27	10	1,000	17	4,913
4	64	11	1,331	18	5,832
5	125	12	1,728	19	6,859
6	216	13	2,197	20	8,000
7	343	14	2,744		

COMPARACIÓN DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

218

- 1) Si la base es > 1 , cuanto mayor es el exponente, mayor es la potencia.

Así, como $2 > 1$, tenemos: $2^0 < 2^1 < 2^2 < 2^3 \dots < 2^n$

- 2) Si la base es 1, todas las potencias son iguales.

Así, $1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 \dots = 1^n$

- 3) Si la base es < 1 , cuanto mayor es el exponente, menor es la potencia.

Así, como $0.5 < 1$, tendremos: $0.5^0 > 0.5^1 > 0.5^2 > 0.5^3 \dots > 0.5^n$

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

219

Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes.

Sea el producto $a^2 \cdot a^3$. Decimos que $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$.

En efecto:

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

1) $2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$ R.

3) $5^m \cdot 5^n = 5^{m+n}$ R.

2) $3^3 \cdot 3 \cdot 3^4 = 3^{3+1+4} = 3^8 = 6,561$ R.

4) $a \cdot a^x \cdot a^2 = a^{1+x+2} = a^{x+3}$ R.

Ejemplos

COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

220

Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes.

Sea el cociente $a^7 \div a^3$. Decimos que $a^7 \div a^3 = a^{7-3} = a^4$.

En efecto: a^4 será el cociente de esta división si multiplicado por el divisor a^3 reproduce el dividendo a^7 y efectivamente:

$$a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$$

1) $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$ R.

3) $2^m \div 2^n = 2^{m-n}$ R.

2) $a^4 \div a = a^{4-1} = a^3$ R.

4) $a \div a^m = a^{1-m}$ R.

Ejemplos

73

Ejercicio

Efectuar, aplicando las reglas anteriores:

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------|--|--------------|
| 1. $3^2 \cdot 3$ | R. 27 | 13. $5^m \div 5^n$ | R. 5^{m-n} |
| 2. $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$ | R. a^{10} | 14. $6^x \div 6$ | R. 6^{x-1} |
| 3. $2m \cdot 3m \cdot m^6$ | R. $6m^8$ | 15. $a^{12} \div (a^3 \cdot a \cdot a^2)$ | R. a^6 |
| 4. $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ | R. 512 | 16. $x^{10} \div (x \cdot x^2)$ | R. x^7 |
| 5. $4a \cdot a^x \cdot 5a^2$ | R. $20a^{3+x}$ | 17. $(2^4 \cdot 2) \div 2^2$ | R. 8 |
| 6. $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$ | R. 59,049 | 18. $(5^5 \cdot 5^3 \cdot 5^6) \div 5^{14}$ | R. 1 |
| 7. $5 \cdot 5^2 \cdot 5^m$ | R. 5^{3+m} | 19. $(2^8 \cdot 2^5) \div (2^{10} \cdot 2^3)$ | R. 1 |
| 8. $a^3 \div a$ | R. a^2 | 20. $(a^6 \cdot a^5) \div (a^3 \cdot a)$ | R. a^7 |
| 9. $a^6 \div a^4$ | R. a^2 | 21. $(x \cdot x^6) \div (x^5 \cdot x^2)$ | R. 1 |
| 10. $3^5 \div 3^5$ | R. 1 | 22. $x^{20} \div (x^6 \cdot x^8 \cdot x)$ | R. x^5 |
| 11. $2^8 \div 2^3$ | R. 32 | 23. $(3^5 \cdot 3^6 \cdot 3^{15}) \div (3^9 \cdot 3^{14})$ | R. 27 |
| 12. $a^x \div a^x$ | R. 1 | 24. $x^{30} \div (x^6 \cdot x^5 \cdot x)$ | R. x^{18} |

221

OPERACIONES INVERSAS DE LA POTENCIACIÓN

En la potenciación, conociendo la base y el exponente, hallamos la potencia.

Ahora bien, como la potenciación no es conmutativa, pues no se puede permutar la base por el exponente, resulta que las operaciones inversas de la potenciación son dos:

- 1) La **radicación**, que consiste, conociendo la potencia y el exponente, en hallar la base.
- 2) La **logaritmación**, que consiste, conociendo la potencia y la base, en hallar el exponente.

I. RADICACIÓN

222

RADICACIÓN

Como $5^2 = 25$, el número 5 que elevado al cuadrado da 25, es la **raíz cuadrada** de 25, lo que se expresa con la notación:

$$\sqrt[2]{25} = 5$$

El signo $\sqrt{}$ se llama **signo radical**, 25 es la **cantidad subradical**, 5 es la **raíz cuadrada** y el número 2 que va en el signo radical es el **índice** o **grado** de la raíz, el cual indica que 5 elevado al cuadrado da 25.

En la práctica el índice 2 se omite. Así: $\sqrt[2]{9}$ se escribe $\sqrt{9}$.

Como $4^3 = 64$, el número 4, que elevado al cubo da 64, es la **raíz cúbica** de 64, lo que se expresa con la notación:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Aquí la cantidad subradical es 64 y el índice o grado es 3, el cual indica que 4 elevado al cubo da 64.

Igualmente: $\sqrt[4]{16} = 2$ significa que $2^4 = 16$

$\sqrt[5]{243} = 3$ significa que $3^5 = 243$

y en general: $\sqrt[n]{a} = b$ significa que $b^n = a$

Podemos decir que:

Raíz de un número es el número que elevado a la potencia que indica el índice reproduce la cantidad subradical.

Hallar:

- | | | | | | |
|-------------------|-------|--------------------|------|--------------------|------|
| 1. $\sqrt{81}$ | R. 9 | 4. $\sqrt[3]{216}$ | R. 6 | 7. $\sqrt[6]{64}$ | R. 2 |
| 2. $\sqrt{100}$ | R. 10 | 5. $\sqrt[4]{81}$ | R. 3 | 8. $\sqrt[5]{243}$ | R. 3 |
| 3. $\sqrt[3]{27}$ | R. 3 | 6. $\sqrt[5]{32}$ | R. 2 | 9. $\sqrt[7]{128}$ | R. 2 |

10. Si 8 es la raíz cúbica de un número, ¿cuál es este número? R. 512
11. Si 31 es la raíz cuadrada de un número, ¿cuál es este número? R. 961
12. ¿Cuál es el número cuya raíz cuarta es 4? R. 256
13. ¿Cuál es el número cuya raíz sexta es 2? R. 64

Hallar la cantidad subradical en:

- | | | | |
|-----------------------|--------|-----------------------|-----------|
| 14. $\sqrt{a} = 7$ | R. 49 | 17. $\sqrt[4]{a} = 5$ | R. 625 |
| 15. $\sqrt{b} = 11$ | R. 121 | 18. $\sqrt[5]{a} = 7$ | R. 16,807 |
| 16. $\sqrt[3]{a} = 7$ | R. 343 | 19. $\sqrt[6]{m} = 2$ | R. 64 |
20. Siendo $a^3 = b$ se verifica que $\sqrt[3]{b} = \dots$ R. a
21. Siendo $5^4 = 625$ se verifica que $\sqrt[4]{625} = \dots$ R. 5

74

Ejercicio

RAÍZ EXACTA Y ENTERA

223

Una raíz es **exacta** cuando elevada a la potencia que indica el índice reproduce la cantidad subradical.

Así 3 es la raíz cuadrada exacta de 9 porque $3^2 = 9$; 9 es la raíz cúbica exacta de 729 porque $9^3 = 729$.

Cuando no existe ningún número entero que elevado a la potencia que indica el índice reproduzca la cantidad subradical, la raíz es **inexacta** o **entera**.

Así, la raíz cuadrada de 38 es entera o inexacta, porque no existe ningún número entero que elevado al cuadrado dé 38.

Las raíces inexactas son llamadas **radicales**, que se estudiarán ampliamente más adelante.

SUPRESIÓN DE ÍNDICE Y EXPONENTE

224

Cuando la cantidad subradical está elevada a un exponente igual que el índice, ambos pueden suprimirse.

Así: $\sqrt{3^2} = 3$ porque 3 elevado al cuadrado da 3^2
 $\sqrt[3]{5^3} = 5$ porque 5 elevado al cubo da 5^3
 $\sqrt[n]{a^n} = a$ porque a elevado a n da a^n

225

CONDICIÓN DE POSIBILIDAD DE LA RADICACIÓN EN LA ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS NATURALES

Para que sea posible la radicación exacta de los números naturales es necesario que el número natural al cual se le extrae la raíz sea una potencia perfecta de igual grado que el índice de la raíz, de otro número natural.

Así, los únicos números naturales que tienen raíz cuadrada exacta son los **cuadrados perfectos**, o sea, los números naturales que sean el cuadrado de otro número natural, como:

1	que es el cuadrado de	1
4	" " " "	2
9	" " " "	3
16	" " " "	4, etc.

Los únicos números naturales que tienen raíz cúbica exacta son los **cubos perfectos**, o sea los números naturales que son el cubo de otro número natural, como:

8	que es el cubo de	2
27	" " " "	3
64	" " " "	4
125	" " " "	5, etc.

Los únicos números naturales que tienen raíz cuarta exacta son los números naturales que resultan de elevar a la cuarta potencia otro número natural, como:

16	que es la cuarta potencia de	2
81	" " " "	3
256	" " " "	4
625	" " " "	5, etc.

En general, para que un número natural tenga raíz exacta de grado n es necesario que dicho número sea la n -ésima potencia de otro número natural.

II. LOGARITMACIÓN

226

Como $3^2 = 9$, el número 2, que es el **exponente** a que hay que elevar la **base** 3 para que dé 9, es el logaritmo de 9 de base 3, lo que se expresa con la notación:

$$\log_3 9 = 2$$

El subíndice representa siempre la base del sistema.

Como $5^3 = 125$, el número 3, que es el **exponente** a que hay que elevar la base 5 para que dé 125, es el logaritmo de 125 de base 5, lo que se expresa con la notación:

$$\log_5 125 = 3$$

Igualmente: como $7^2 = 49$, resulta que $\log_7 49 = 2$,
 como $3^5 = 243$, resulta que $\log_3 243 = 5$,
 como $2^8 = 256$, resulta que $\log_2 256 = 8$,

y en general, si $a^x = b$, resulta que $\log_a b = x$.

Podemos decir que:

Logaritmo de un número con relación a otro llamado base es el exponente a que hay que elevar la base para que dé dicho número.

LOGARITMOS COMUNES

227

Los logaritmos más usados son los de base 10, que se llaman **logaritmos comunes**. En éstos el subíndice 10 se omite, de modo que cuando no hay subíndice se sobreentiende que la base es 10. Así:

$$\begin{aligned} 10^0 &= 1 & \therefore \log 1 &= 0, \\ 10^1 &= 10 & \therefore \log 10 &= 1, \\ 10^2 &= 100 & \therefore \log 100 &= 2, \\ 10^3 &= 1,000 & \therefore \log 1,000 &= 3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

CONDICIÓN DE POSIBILIDAD DE LA LOGARITMACIÓN EN LA ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS NATURALES

228

Para que el logaritmo de un número natural con respecto a una base dada sea otro número natural, es necesario que el número sea una potencia perfecta de la base.

Así:

$$\log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 8$$

pero $\log_3 8$ no es un número natural porque 8 no es una potencia perfecta de 3; igualmente $\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$, pero $\log 105$ no es un número natural porque 105 no es una potencia perfecta de 10.

En cada uno de los casos siguientes, escribir el log de la potencia:

- | | | | |
|----------------------|------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1. $2^2 = 4$ | R. $\log_2 4 = 2$ | 15. $a^m = c$ | R. $\log_a c = m$ |
| 2. $2^4 = 16$ | R. $\log_2 16 = 4$ | 16. $5^{a+1} = x$ | R. $\log_5 x = a + 1$ |
| 3. $3^3 = 27$ | R. $\log_3 27 = 3$ | 17. $6^{x-2} = 518$ | R. $\log_6 518 = x - 2$ |
| 4. $3^5 = 243$ | R. $\log_3 243 = 5$ | 18. $a^{3x} = b$ | R. $\log_a b = 3x$ |
| 5. $5^0 = 1$ | R. $\log_5 1 = 0$ | 19. $a^n = 8x$ | R. $\log_a 8x = n$ |
| 6. $4^3 = 64$ | R. $\log_4 64 = 3$ | 20. $x^{2a} = a + b$ | R. $\log_x (a + b) = 2a$ |
| 7. $5^2 = 25$ | R. $\log_5 25 = 2$ | 21. $\log_3 9 = \dots$ | R. 2 |
| 8. $5^4 = 625$ | R. $\log_5 625 = 4$ | 22. $\log_4 16 = \dots$ | R. 2 |
| 9. $6^2 = 36$ | R. $\log_6 36 = 2$ | 23. $\log_6 1 = \dots$ | R. 0 |
| 10. $7^4 = 2,401$ | R. $\log_7 2,401 = 4$ | 24. $\log_8 512 = \dots$ | R. 3 |
| 11. $2^8 = 512$ | R. $\log_2 512 = 8$ | 25. $\log_2 64 = \dots$ | R. 6 |
| 12. $2^{10} = 1,024$ | R. $\log_2 1,024 = 10$ | 26. $\log_3 729 = \dots$ | R. 6 |
| 13. $a^3 = b$ | R. $\log_a b = 3$ | 27. $\log_9 729 = \dots$ | R. 3 |
| 14. $x^6 = m$ | R. $\log_x m = 6$ | 28. $\log 10,000 = \dots$ | R. 4 |

¿Es un número natural

- | | | | | | |
|--|--------------|------------------|-------|------------------|-------|
| 29. $\log_3 11?$ | R. No | 30. $\log_2 21?$ | R. No | 31. $\log_5 36?$ | R. No |
| 32. Siendo $\log_3 x = a$, ¿qué puede escribir? | R. $3^a = x$ | | | | |
| 33. Siendo $\log_a 8 = 3$, ¿qué puede escribir? | R. $a^3 = 8$ | | | | |
| 34. Siendo $\log_x 81 = 4$, ¿qué número es x ? | R. 3 | | | | |
| 35. Siendo $\log_8 512 = a + 1$, ¿qué número es a ? | R. 2 | | | | |
| 36. Siendo $\log_3 243 = x - 1$, ¿qué número es x ? | R. 6 | | | | |

Hallar el número:

- | | | | |
|-------------------------|-------|-------------------------|--------|
| 37. Cuyo \log_3 es 4. | R. 81 | 39. Cuyo \log_5 es 4. | R. 625 |
| 38. Cuyo \log_2 es 6. | R. 64 | 40. Cuyo \log_2 es 9. | R. 512 |

75

Ejercicio



Hacia el siglo III (a. C.), los griegos alcanzaron un elevado grado de abstracción en las ciencias matemáticas. La misma palabra *aritmética* es de origen griego. Para ellos, esta ciencia era una rigurosa teoría de los números. Sus investigaciones los

llevaron muy pronto al concepto de número primo, de donde partió **Eratóstenes** para descubrir su curioso método de determinación de los números primos en la serie natural.

Capítulo **XVI**

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS, MÚLTIPLOS Y DIVISORES

229 **NÚMERO PRIMO ABSOLUTO O SIMPLE** es el que sólo es divisible entre sí mismo y entre la unidad.

Ejemplos

5, 7, 11, 29, 37, 97

230 **NÚMERO COMPUESTO** o no primo es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y entre la unidad lo es entre otro factor.

Ejemplos

14 es compuesto porque además de ser divisible entre 14 y 1, es divisible entre 2 y 7; 21 es compuesto porque además de ser divisible entre sí mismo y la unidad es divisible entre 3 y 7.

MÚLTIPLO de un número es el número que contiene a éste un número exacto de veces.

Así, 14 es múltiplo de 2 porque 14 contiene a 2 siete veces; 20 es múltiplo de 5 porque contiene a 5 cuatro veces.

Los múltiplos de un número se forman **multiplicando este número** por la serie infinita de los números naturales 0, 1, 2, 3 . . . ; luego, todo número tiene **infinitos múltiplos**.

Así, la serie infinita de los múltiplos de 5 es:

$$\begin{aligned} 0 \times 5 &= 0 \\ 1 \times 5 &= 5 \\ 2 \times 5 &= 10 \\ 3 \times 5 &= 15 \\ 4 \times 5 &= 20 \\ 5 \times 5 &= 25, \text{ etc.} \end{aligned}$$

El número 5 en este caso es el **módulo** de esta serie infinita.

En general, la serie infinita de los múltiplos de n es:

$$0 \times n, 1 \times n, 2 \times n, 3 \times n, 4 \times n, 5 \times n, \dots$$

NOTACIÓN

Para indicar que 10 es múltiplo de 5 se escribe:

$$10 = \text{m. de } 5$$

o también escribiendo **un punto** encima del módulo:

$$10 = \dot{5}$$

Que 28 es múltiplo de 7 se expresa:

$$28 = \text{m. de } 7 \quad \text{o} \quad 28 = \dot{7}$$

En general, para indicar que a es múltiplo de b se escribe:

$$a = \text{m. de } b \quad \text{o} \quad a = \dot{b}$$

SUBMÚLTIPLO, FACTOR O DIVISOR de un número es el número que está contenido en el primero un número exacto de veces.

4 es submúltiplo de 24 porque está contenido en 24 seis veces; 8 es factor o divisor de 64 porque está contenido en 64 ocho veces.

Los divisores de un número se llaman *partes alícuotas* (partes iguales) de ese número. Así 5 es divisor de 20 y es una parte alícuota de 20 porque 20 puede dividirse en 4 partes iguales que cada una valga 5; 4 también es una parte alícuota de 20 porque 20 puede dividirse en 5 partes iguales que cada una valga 4.

Parte alícuota de un número es, por tanto, una de las partes iguales en que se puede dividir dicho número.

234 **NÚMERO PAR** es todo número múltiplo de 2.

La fórmula general de los números pares es $2n$, siendo n un número entero cualquiera, ya sea par o impar, pues si es par, multiplicado por 2 dará otro número par, y si es impar, multiplicado por 2 dará un número par.

Todos los números pares excepto el 2, son compuestos.

235 **NÚMERO IMPAR** es el que no es múltiplo de 2. La fórmula general de los números impares es $2n \pm 1$, siendo n un número entero cualquiera, pues $2n$ representa un número par, que aumentado o disminuido en una unidad dará un número impar.

236 **EQUIMÚLTIPLOS** son dos o más números que contienen a otros un mismo número de veces.

Ejemplos

14, 24 y 32 son equimúltiplos de 7, 12 y 16, porque el 14 contiene al 7 dos veces, el 24 contiene al 12 dos veces y el 32 contiene al 16 dos veces.

Para hallar dos o más equimúltiplos de varios números dados se multiplican éstos por un mismo factor. Los productos serán los equimúltiplos de los números dados.

Hallar tres números que sean equimúltiplos de 5, 6 y 7.

$$5 \times 4 = 20, \quad 6 \times 4 = 24, \quad 7 \times 4 = 28$$

20, 24 y 28 son equimúltiplos de 5, 6 y 7.

237 **EQUIDIVISORES**

Dos o más números son equidivisores de otros cuando están contenidos en éstos el mismo número de veces.

Ejemplos

5, 6 y 7 son equidivisores de 20, 24 y 28, porque el 5 está contenido en el 20 cuatro veces, el 6 en el 24 cuatro veces y el 7 en el 28 cuatro veces.

Para hallar dos o más equidivisores de otros números dados basta dividir estos números entre un mismo número. Los cocientes serán los equidivisores.

Hallar tres equidivisores de los números 50, 80 y 90.

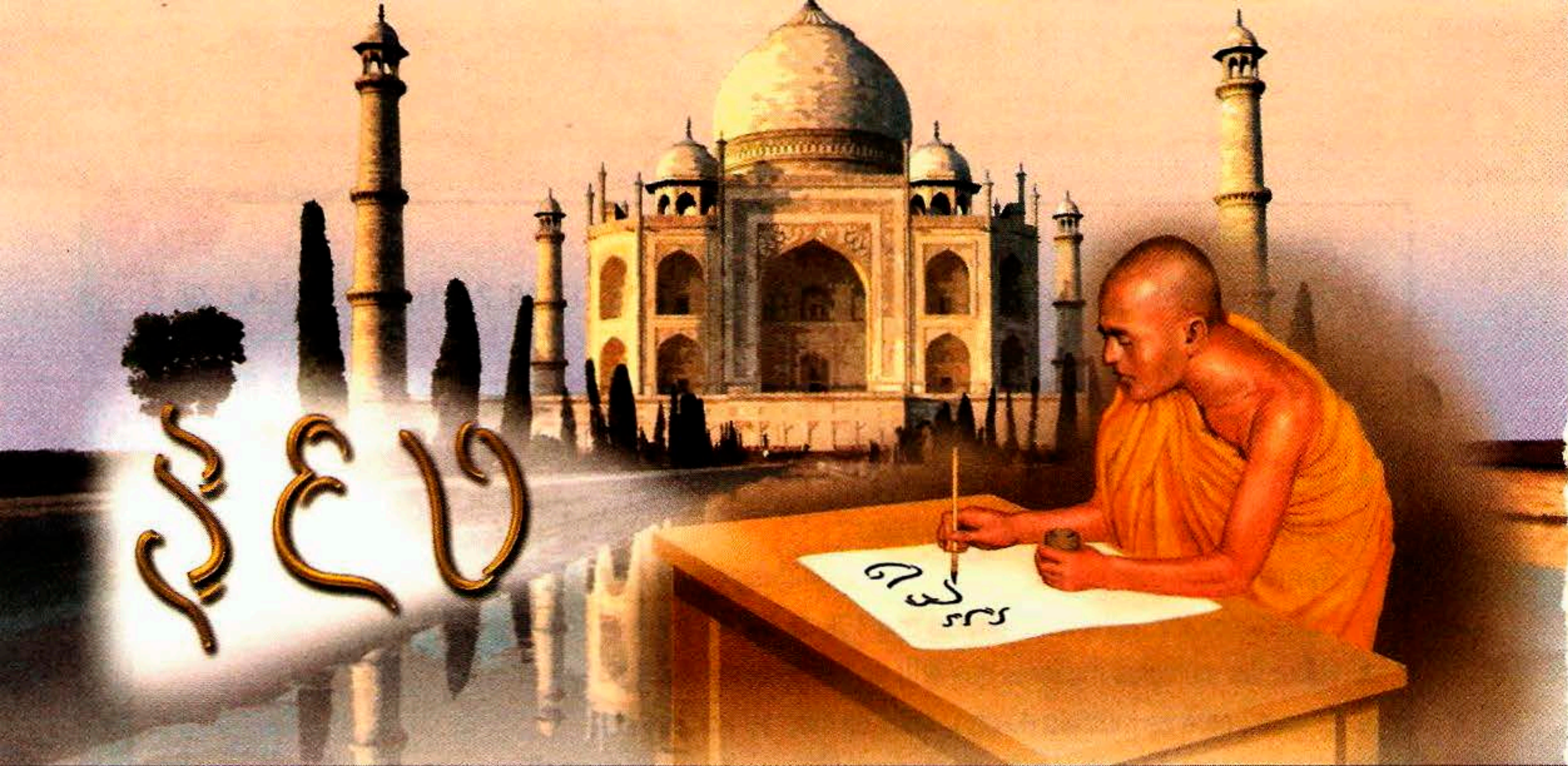
$$50 \div 10 = 5, \quad 80 \div 10 = 8, \quad 90 \div 10 = 9$$

5, 8 y 9 son equidivisores de 50, 80 y 90.

76

Ejercicio

1. ¿Cuántos divisores tiene un número primo?
2. Decir si los números siguientes son o no primos y por qué: 13, 17, 19, 24, 31, 37, 38, 45, 68, 79, 111, 324.
3. De los números siguientes, decir cuáles son primos y cuáles son compuestos: 12, 57, 43, 87, 97, 124, 131, 191.
4. ¿Cuántos múltiplos tiene un número?
5. ¿Cuál es el menor múltiplo de un número?
6. Formar cuatro múltiplos de cada uno de los números 5, 6, 12 y 13.
7. Hallar todos los múltiplos menores que 100 de los números 14 y 23.
8. Hallar los múltiplos menores que 400 de los números 45, 56, 72 y 87.
9. Si un número es múltiplo de otro, ¿qué es éste del primero?
10. ¿Cuál es el residuo de dividir un número entre uno de sus divisores?
11. ¿Cuál es el mayor divisor de 784? ¿Y el menor?
12. ¿Son compuestos todos los números pares? ¿Son pares todos los números compuestos?
13. ¿Son primos todos los números impares? ¿Son impares todos los números primos?
14. Decir cuáles son los tres menores números que se pueden añadir a un número para hacerlo impar.
15. Decir cuáles son los tres menores números que se deben restar de un número par para hacerlo impar.
16. Decir cuáles son los tres números menores que se pueden añadir a un número impar para hacerlo par y cuáles se deben restar con el mismo objeto.
17. Mencionar tres partes alícuotas de 45. ¿Es 9 parte alícuota de 45? ¿Y 7, y 8, y 15?
18. Hallar cuatro equimúltiplos de los números 8, 12, 14 y 16.
19. Hallar ocho equimúltiplos de 7, 8, 9, 10, 11, 13, 24 y 56.
20. Hallar tres equidivisores de 24, 48 y 96.
21. Hallar cinco equidivisores de 120, 240, 560, 780 y 555.



Los principios generales de divisibilidad son una consecuencia del desarrollo que había alcanzado la teoría de los números. Los indios, por ejemplo, llegaron a conocer la divisibilidad entre tres, nueve y siete. Griegos y egipcios establecieron la clasifica-

ción de los números en pares e impares. El genial matemático francés **Blas Pascal (1623-1662)**, propuso las reglas para determinar la divisibilidad entre cualquier número.

Capítulo **XVII**

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA DIVISIBILIDAD

238

I. TEOREMA⁽¹⁾

Todo número que divide a otros varios, divide a su suma.

Sea el número 5, que divide a 10, 15 y 20 (hipótesis). Vamos a probar que 5 divide a $10 + 15 + 20 = 45$, o sea que $10 + 15 + 20$ es m. de 5.

En efecto: $10 = 5 \times 2$; $15 = 5 \times 3$; $20 = 5 \times 4$.

Sumando miembro a miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad de la suma, tenemos: $10 + 15 + 20 = 5 \times 2 + 5 \times 3 + 5 \times 4$.

Sacando el factor común 5 en el segundo miembro de esta última igualdad, tenemos:

$$10 + 15 + 20 = 5(2 + 3 + 4)$$

$$\text{o sea } 10 + 15 + 20 = 5 \times 9$$

lo que nos dice que la suma $10 + 15 + 20$, o sea 45, contiene a 5 nueve veces; luego, 5 divide a la suma $10 + 15 + 20$, que era lo que queríamos demostrar.

⁽¹⁾ Como estos son los primeros teoremas que se demuestran, hacemos en cada caso una demostración con números como preparación para la demostración general con letras.

Demostración general

Sea el número n que divide a los números a , b y c (hipótesis). Vamos a probar que n divide a la suma $a + b + c$.

En efecto: sea q el cociente de dividir a entre n , q' el cociente de dividir b entre n y q'' el cociente de dividir c entre n . Como el dividendo es el producto del divisor por el cociente, tendremos:

$$\begin{aligned}a &= nq \\ b &= nq' \\ c &= nq''\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq''$$

Sacando n factor común:

$$a + b + c = n(q + q' + q'')$$

lo que nos dice que $a + b + c$ contiene a n un número exacto de veces, $q + q' + q''$ veces, o sea que n divide a la suma $a + b + c$, que era lo que queríamos demostrar.

II. TEOREMA

239

Todo número que no divide a otros varios divide a su suma, si la suma de los residuos que resultan de dividir éstos entre el número que no los divide, es divisible entre este número.

Sea el número 7, que no divide a 15, ni a 37, ni a 46, pero el residuo de dividir 15 entre 7 es 1, el de dividir 37 entre 7 es 2 y el de dividir 46 entre 7 es 4, y la suma de estos residuos, $1 + 2 + 4 = 7$, es divisible entre 7 (hipótesis).

Vamos a probar que 7 divide a $15 + 37 + 46 = 98$ (tesis).

$$\begin{aligned}\text{En efecto:} \quad 15 &= 7 \times 2 + 1 \\ 37 &= 7 \times 5 + 2 \\ 46 &= 7 \times 6 + 4\end{aligned}$$

Sumando estas igualdades:

$$15 + 37 + 46 = 7 \times 2 + 7 \times 5 + 7 \times 6 + 1 + 2 + 4$$

Sacando factor común 7:

$$15 + 37 + 46 = 7(2 + 5 + 6) + (1 + 2 + 4)$$

$$\text{o sea} \quad 15 + 37 + 46 = 7 \times 13 + 7$$

Ahora bien, en el segundo miembro, 7 divide a 7×13 porque es un múltiplo de 7 y divide a 7, porque todo número es divisible entre sí mismo; luego, 7 divide a su suma $15 + 37 + 46$ o sea 98, porque según el teorema anterior todo número que divide a otros divide a su suma, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración general

Sea el número n que no divide a los números a , b ni c .

Sea r el residuo de dividir a entre n ; r' el residuo de dividir b entre n , r'' el residuo de dividir c entre n y la suma $r + r' + r''$ divisible entre n (hipótesis).

Vamos a probar que n divide a $a + b + c$ (tesis).

En efecto: siendo q el cociente de dividir a entre n , q' el de dividir b entre n y q'' el de dividir c entre n , tendremos.

$$\begin{aligned}a &= nq + r \\ b &= nq' + r' \\ c &= nq'' + r''\end{aligned}$$

porque en toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo.

Sumando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq'' + r + r' + r''$$

Sacando n factor común:

$$a + b + c = n(q + q' + q'') + (r + r' + r'')$$

Ahora bien: n divide al sumando $n(q + q' + q'')$ porque este número es múltiplo de n y divide al sumando $(r + r' + r'')$ porque en la hipótesis hemos supuesto que la suma de los residuos era divisible entre n ; luego, si n divide a estos dos sumandos, tiene que dividir a su suma, que es $a + b + c$, porque según el teorema anterior, todo número que divide a varios sumandos, divide a su suma. Luego, n divide a $a + b + c$, que era lo que queríamos demostrar.

III. TEOREMA

Si un número divide a todos los sumandos de una suma, menos a uno de ellos, no divide a la suma, y el residuo que se obtiene al dividir la suma entre el número, es el mismo que se obtiene dividiendo el sumando no divisible entre dicho número.

Sea el número 5, que divide a 10 y a 15 pero no divide a 22, siendo 2 el residuo de dividir 22 entre 5 (hipótesis). Vamos a demostrar que 5 no divide a $10 + 15 + 22 = 47$ y que el residuo de dividir 47 entre 5 es 2, igual al residuo de dividir 22 entre 5 (tesis).

$$\begin{aligned}\text{En efecto:} \quad 10 &= 5 \times 2 \\ 15 &= 5 \times 3 \\ 22 &= 5 \times 4 + 2\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad, tenemos:

$$10 + 15 + 22 = 5 \times 2 + 5 \times 3 + 5 \times 4 + 2$$

Sacando el factor común 5 en el segundo miembro, tenemos:

$$10 + 15 + 22 = 5(2 + 3 + 4) + 2$$

$$\text{o sea } 10 + 15 + 22 = 5 \times 9 + 2$$

y esta última igualdad demuestra el teorema, pues ella nos dice que el número 5 está contenido en la suma 9 veces, pero no exactamente, pues sobra el residuo 2, luego 5 no divide a $10 + 15 + 22$. Además, ella nos dice que el residuo de dividir $10 + 15 + 22$ entre 5 es 2, igual al residuo de dividir 22 entre 5.

Demostración general

Sea el número n que divide a a y a b , pero no divide a c ; sea r el residuo de dividir c entre n (hipótesis). Vamos a demostrar que n no divide a $a + b + c$ y que el residuo de dividir la suma $a + b + c$ entre n es el mismo que el de dividir c entre n , o sea r (tesis).

En efecto: llamemos q al cociente de dividir a entre n ; q' al cociente de dividir b entre n ; q'' al cociente de dividir c entre n siendo r el residuo de esta división.

Tendremos:

$$\begin{aligned}a &= nq \\ b &= nq' \\ c &= nq'' + r\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$\begin{aligned}a + b + c &= nq + nq' + nq'' + r \\ \text{o sea } a + b + c &= n(q + q' + q'') + r\end{aligned}$$

y esta última igualdad demuestra el teorema, pues ella nos indica que el número n no está contenido en la suma $a + b + c$ un número exacto de veces, pues está contenido en ella $q + q' + q''$ veces pero sobra el residuo r ; luego, n no divide a $a + b + c$.

Además, ella nos dice que el residuo de dividir $a + b + c$ entre n es r , que es el mismo residuo que resulta de dividir c entre n . Luego queda demostrado lo que nos proponíamos.

IV. TEOREMA

241

Todo número que divide a otro divide a sus múltiplos.

Sea el número 5, que divide a 10 (hipótesis). Vamos a probar que 5 divide a cualquier múltiplo de 10; por ejemplo, a $10 \times 4 = 40$ (tesis).

En efecto:

$$10 \times 4 = 10 + 10 + 10 + 10$$

Ahora bien, 5 divide a todos los sumandos 10 del segundo miembro por hipótesis; luego, dividirá a su suma que es 10×4 o sea 40, porque hay un teorema (238) que dice que todo número que divide a varios sumandos divide a su suma; luego, 5 divide a 40, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración general

Sea el número n que divide al número a (hipótesis). Vamos a probar que n divide a cualquier múltiplo de a , por ejemplo a ab (tesis).

En efecto:

$$ab = \underbrace{a + a + a + a + \dots}_{b \text{ veces}}$$

Ahora bien: n divide a todos los sumandos a del segundo miembro por hipótesis; luego, dividirá a su suma, que es ab , porque hay un teorema (238) que dice que todo número que divide a varios sumandos divide a su suma; luego, n divide a ab , que era lo que queríamos demostrar.

242

V. TEOREMA

Todo número que divide a otros dos, divide a su diferencia.

Sea el número 3, que divide a 18 y a 12 (hipótesis). Vamos a probar que 3 divide a la diferencia $18 - 12 = 6$ (tesis).

$$\begin{aligned}\text{En efecto:} \quad & 18 = 3 \times 6 \\ & 12 = 3 \times 4\end{aligned}$$

Restando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$18 - 12 = 3 \times 6 - 3 \times 4$$

Sacando 3 factor común en el segundo miembro:

$$\begin{aligned}18 - 12 &= 3(6 - 4) \\ \text{o sea} \quad 18 - 12 &= 3 \times 2\end{aligned}$$

lo que nos dice que la diferencia $18 - 12$, o sea 6, contiene a 3 dos veces, o sea, que 3 divide a $18 - 12$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración general

Sea el número n que divide a a y a b siendo $a > b$ (hipótesis). Vamos a probar que n divide a $a - b$ (tesis).

En efecto: sea q el cociente de dividir a entre n y q' el cociente de dividir b entre n . Como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tenemos:

$$\begin{aligned}a &= nq \\ b &= nq'\end{aligned}$$

Restando miembro a miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad de la resta tenemos:

$$a - b = nq - nq'$$

Sacando n factor común en el segundo miembro:

$$a - b = n(q - q')$$

lo que nos dice que la diferencia $a - b$ contiene a n un número exacto de veces $q - q'$ veces; luego, n divide a la diferencia $a - b$, que era lo que queríamos demostrar.

243

VI. TEOREMA

Todo número que no divide a otros dos, divide a su diferencia si los residuos por defecto que resultan de dividir estos dos números entre el número que no los divide son iguales.

Sea el número 5, que no divide a 28 ni a 13, pero el residuo por defecto de dividir 28 entre 5 es 3 y el residuo de dividir 13 entre 5 también es 3 (hipótesis). Vamos a probar que 5 divide a la diferencia $28 - 13 = 15$ (tesis).

$$\begin{aligned}\text{En efecto:} \quad & 28 = 5 \times 5 + 3 \\ & 13 = 5 \times 2 + 3\end{aligned}$$

Restando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$28 - 13 = 5 \times 5 - 5 \times 2 + 3 - 3$$

Sacando 5 factor común en el segundo miembro:

$$28 - 13 = 5(5 - 2) + (3 - 3)$$

y como $3 - 3 = 0$, nos queda:

$$\begin{aligned}28 - 13 &= 5(5 - 2) \\ \text{o sea } 28 - 13 &= 5 \times 3\end{aligned}$$

lo que nos dice que la diferencia $28 - 13$, o sea 15, contiene a 5 tres veces; luego, 5 divide a la diferencia $28 - 13$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración general

Sea el número n que no divide a a ni a b ; r el residuo de dividir a entre n y b entre n (hipótesis). Vamos a probar que n divide a la diferencia $a - b$.

En efecto: siendo q el cociente de dividir a entre n y q' el cociente de dividir b entre n , como r es el residuo en ambos casos, tenemos:

$$\begin{aligned}a &= nq + r \\ b &= nq' + r\end{aligned}$$

Restando estas igualdades:

$$a - b = nq - nq' + r - r$$

y como $r - r = 0$, nos queda:

$$a - b = nq - nq'$$

Sacando n factor común:

$$a - b = n(q - q')$$

lo que nos dice que la diferencia $a - b$ contiene a n un número exacto de veces, $(q - q')$ veces o sea que n divide a la diferencia $a - b$, que era lo que queríamos demostrar.

VII. TEOREMA

Todo número que divide a la suma de dos sumandos y a uno de éstos, tiene que dividir al otro sumando.

Sea la suma $8 + 10 = 18$. El número 2 divide a 18 y a 10 (hipótesis). Vamos a probar que 2 divide a 8 (tesis).

En efecto: $18 - 10 = 8$. 2 divide a 18 y a 10 por hipótesis; luego, tiene que dividir a su diferencia 8, porque hay un teorema (242) que dice que todo número que divide a otros dos divide a su diferencia; luego 2 divide a 8, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración general

En la suma $a + b = s$, el número n divide a s y al sumando a (hipótesis). Vamos a probar que n divide al otro sumando b (tesis).

En efecto: $s - a = b$. El número n divide a s y a a por hipótesis, luego tiene que dividir a su diferencia b porque hay un teorema (242) que dice que todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, luego n divide a b , que era lo que queríamos demostrar.

245

VIII. TEOREMA

Todo número que divide a uno o dos sumandos y no divide al otro, no divide a la suma.

Sea la suma $10 + 13 = 23$. El número 5 divide a 10 y no divide a 13 (hipótesis). Vamos a probar que 5 no divide a 23 (tesis).

En efecto: $23 - 10 = 13$. Si 5 dividiera a 23, como 5 divide a 10 (por hipótesis), tendría que dividir a la diferencia entre 23 y 10, que es 13, porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, pero es imposible que 5 divida a 13, porque va contra lo que hemos supuesto; luego, 5 no divide a 23.⁽¹⁾

Demostración general

Sea la suma $a + b = s$. El número n divide a a y no divide a b (hipótesis). Vamos a probar que n no divide a s (tesis).

En efecto: $s - a = b$. Si n dividiera a s , como n divide a a por hipótesis, tendría que dividir a la diferencia entre s y a que es b , porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, pero es imposible que n divida a b porque va contra lo que hemos supuesto, luego n no divide a s , que era lo que queríamos demostrar.

246

IX. TEOREMA

Todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta, divide al residuo.

Sea la división $9 \overline{)24} \begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix}$. El número 3 divide al dividendo 24 y al divisor 9 (hipótesis). Vamos a probar que 3 divide al residuo 6 (tesis).

En toda división inexacta el residuo por defecto es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente; luego

$$24 - 9 \times 2 = 6$$

⁽¹⁾ Este método de demostración se llama de "reducción al absurdo".

Ahora bien: en la diferencia anterior 3 divide a 24 y a 9 por hipótesis. Si 3 divide a 9, tiene que dividir a 9×2 que es un múltiplo de 9, porque hay un teorema (241) que dice que todo número que divide a otro divide a sus múltiplos, y si 3 divide al minuendo 24 y al sustraendo 9×2 , tiene que dividir a su diferencia que es el residuo 6, porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia; luego, 3 divide a 6, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración general

Sea la división $d \overline{)D}^c$. El número n divide al dividendo D y al divisor d (hipótesis). Vamos a probar que n divide al residuo R (tesis).

En efecto:

$$D - dc = R$$

Ahora bien, en la diferencia anterior n divide a D y a d por hipótesis. Si n divide a d tiene que dividir a dc porque todo número que divide a otro, divide sus múltiplos y si n divide a D y a dc tiene que dividir a su diferencia, que es R , porque todo número que divide a otros dos, divide a su diferencia; luego n divide a R , que era lo que queríamos demostrar.

X. TEOREMA

247

Todo número que divide al divisor y al resto de una división inexacta, divide al dividendo.

Sea la división $8 \overline{)28}^3$. El número 2 divide al divisor 8 y al residuo por defecto 4 (hipótesis).

Vamos a probar que 2 divide al dividendo 28 (tesis).

En efecto: en toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo; luego:

$$28 = 8 \times 3 + 4$$

Ahora bien, 2 divide a 8 y a 4 por hipótesis. Si 2 divide a 8, tiene que dividir a 8×3 , que es un múltiplo de 8, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos, y si 2 divide a 8×3 y a 4, tiene que dividir a su suma porque hay un teorema (238) que dice que todo número que divide a otros varios divide a su suma; luego, 2 divide a 28, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración general

Sea la división $d \overline{)D}^c$. Sea el número n que divide a d y a R (hipótesis). Vamos a probar que n divide a D (tesis).

En efecto:

$$D = dc + R$$

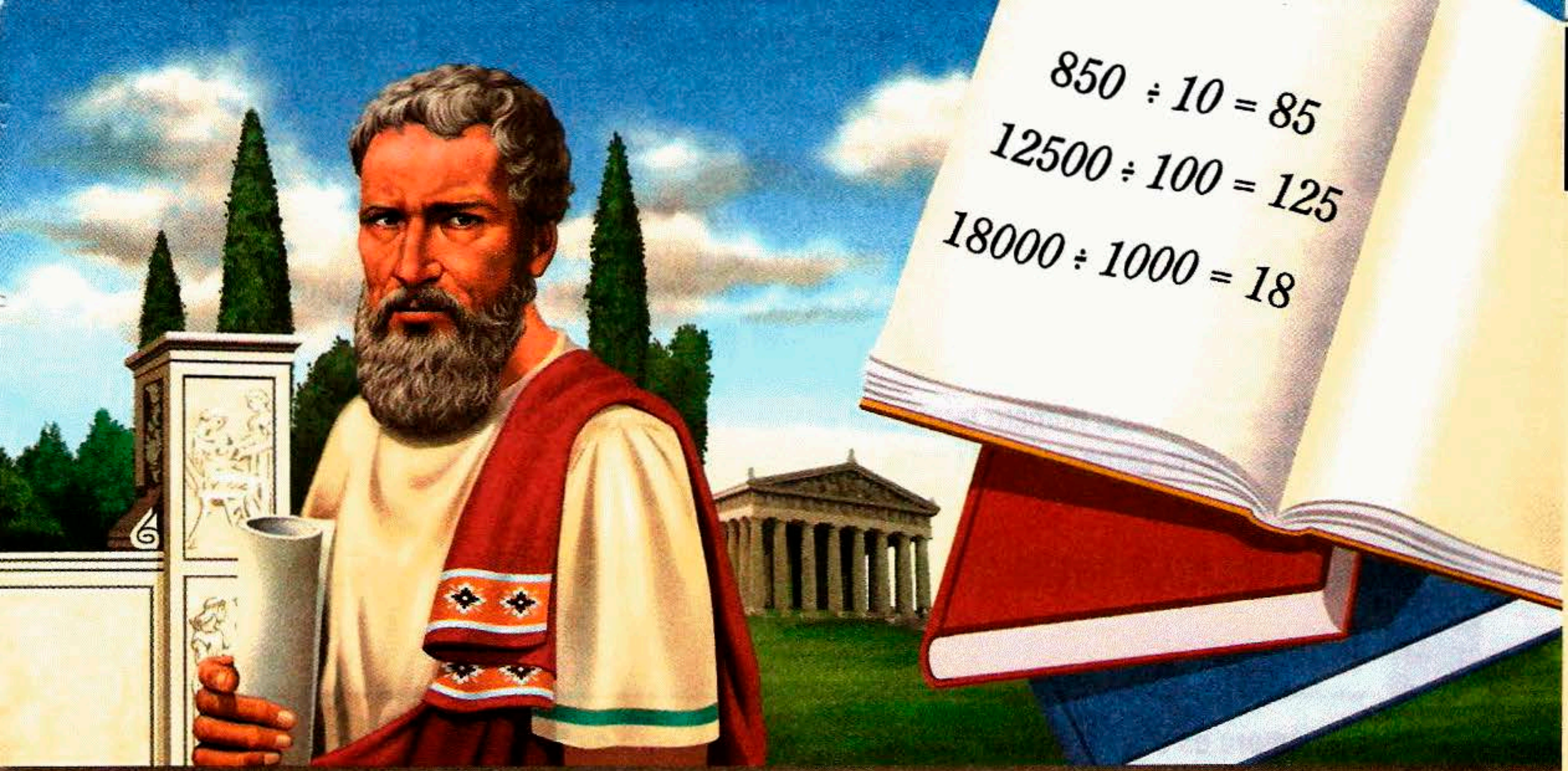
Ahora bien, n divide a d y a R por hipótesis. Si n divide a d , tiene que dividir a dc porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos, y si n

divide a dc y a R , tiene que dividir a su suma, que es D , porque todo número que divide a otros dos divide a su suma (238); luego, n divide a D , que era lo que queríamos demostrar.

77

Ejercicio

1. ¿Qué es la suma de un múltiplo de 5 con otro múltiplo de 5? ¿Por qué?
2. ¿Por qué no puede ser impar la suma de dos números pares?
3. ¿Qué clase de número será la suma de tres números pares? ¿Por qué?
4. ¿Es par o impar la suma de dos números impares? ¿Por qué?
5. ¿Será divisible entre 5 la suma de 17, 21 y 37? ¿Por qué?
6. ¿Será divisible entre 5 la suma de 9, 11 y 25? ¿Por qué?
7. ¿Será divisible entre 5 la suma de 17, 21 y 36? ¿Por qué?
8. ¿Será divisible entre 3 la suma de 6, 9 y 11? ¿Por qué?
9. Si un número divide al sustraendo y al resto, divide al minuendo. ¿Por qué?
10. Decir, sin efectuar la división, cuál es el residuo de dividir la suma de 11, 14 y 21 entre 7. ¿Por qué?
11. Decir, sin efectuar la división, cuál es el residuo de dividir la suma de 21 y 35 entre 5. ¿Por qué?
12. ¿Es par o impar la suma de un número par con uno impar? ¿Por qué?
13. ¿3 divide a 9? ¿Por qué divide a 27?
14. ¿Qué es la diferencia entre un múltiplo de 11 y otro múltiplo de 11? ¿Por qué?
15. Si un número divide al minuendo y al resto, ¿divide al sustraendo? ¿Por qué?
16. ¿Divide 7 a 21 y 35? ¿Dividirá a 14? ¿Por qué?
17. ¿Es par o impar la diferencia entre dos números pares? ¿Por qué?
18. ¿Es divisible entre 2 la diferencia de dos números impares? ¿Por qué?
19. ¿Divide 5 a la diferencia de 132 y 267? ¿Por qué?
20. ¿Es divisible entre 2 la diferencia entre un número par y uno impar? ¿Por qué?
21. ¿Divide 3 a 19 y 21? ¿Dividirá a 40? ¿Por qué?
22. Si un número divide al sustraendo y no divide al resto, ¿divide al minuendo? ¿Por qué?
23. ¿Qué clase de número es el residuo de la división de dos números pares, si los hay? ¿Por qué?
24. Si el divisor y el resto de una división inexacta son múltiplos de 5, ¿qué ha de ser el dividendo? ¿Por qué?
25. El residuo de la división de 84 entre 9 es 3. Decir sin efectuar la división, ¿cuál será el residuo de dividir 168 entre 28; 28 entre 3?
26. ¿Qué clase de números son los múltiplos de los números pares? ¿Por qué?



Euclides, hacia el **300 a. C.**, demostró en sus *Elementos*, los teoremas básicos de la divisibilidad de los números enteros, lo que permitió a **Gauss** en **1801**, deducir el teorema fundamental de la Aritmética. Más tarde, alrededor de 1875, el

matemático alemán **Dedekind (1831-1916)**, llevó a cabo la generalización de los caracteres de divisibilidad, extendiéndolos a los números racionales y a los ideales.

Capítulo **XVIII**

CARACTERES DE DIVISIBILIDAD

CARACTERES DE DIVISIBILIDAD son ciertas señales de los números que nos permiten conocer, por simple inspección, si un número es divisible entre otro.

248

DIVISIBILIDAD ENTRE LAS POTENCIAS DE 10

249

Sabemos (178) que para dividir un número terminado en ceros entre la unidad seguida de ceros, se suprimen de la derecha del número tantos ceros como ceros acompañen a la unidad, y lo que queda es el cociente exacto. Así:

$$\begin{aligned} 850 \div 10 &= 85 \\ 12,500 \div 100 &= 125 \\ 18,000 \div 1,000 &= 18, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Luego, **un número es divisible entre 10 cuando termina en cero**, porque suprimiendo este cero queda dividido entre 10 y lo que queda es el cociente exacto. Así 70, 180 y 1,560 son divisibles entre 10.

Un número es divisible entre $10^2 = 100$ cuando termina en dos ceros porque suprimiendo estos ceros queda dividido entre 100 y lo que queda es el cociente exacto. Así 800, 1,400 y 13,700 son divisibles entre 100.

Un número es divisible entre $10^3 = 1,000$ cuando termina en tres ceros; entre $10^4 = 10,000$ cuando termina en cuatro ceros; entre $10^5 = 100,000$ cuando termina en cinco ceros, etc. Así, 8,000 es divisible entre 1,000; 150,000 es divisible entre 10,000; 800,000 es divisible entre 100,000, etcétera.

En general, todo número terminado en ceros es divisible entre la unidad seguida de tantos ceros como ceros haya a la derecha del número.

DIVISIBILIDAD ENTRE 2

250

TEOREMA

Un número es divisible entre 2 cuando termina en cero o cifra par.

- 1) **Que el número termine en cero.** Sea, por ejemplo, el número 40. 40 es divisible entre 10 porque termina en cero y 10 es divisible entre 2. Ahora bien, si 2 divide a 10, tiene que dividir a 40, que es múltiplo de 10, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.
- 2) **Que el número termine en cifra par.** Sea, por ejemplo, el número 86. Descomponiendo este número en decenas y unidades, tenemos:

$$86 = 80 + 6$$

En la suma anterior, 2 divide a 80 porque termina en cero y también divide a 6 porque todo número par es divisible entre 2; luego, si 2 divide a 80 y a 6, dividirá a su suma, 86, porque todo número que divide a varios sumandos divide a su suma (238).

- 3) **Que el número no termine en cero ni en cifra par.** En este caso el número termina en cifra impar y no es divisible entre 2.

Sea, por ejemplo, $97 = 90 + 7$. 2 divide a 90, pero no a 7; luego, no divide a su suma, que es 97, porque hay un teorema que dice que si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma (245).

Además, el **residuo** de dividir el número entre 2 es el que se obtiene dividiendo entre 2 la cifra de las unidades (240). Este residuo, cuando existe, siempre es 1.

DIVISIBILIDAD ENTRE 5

251

TEOREMA

Un número es divisible entre 5 cuando termina en cero o cinco.

- 1) **Que el número termine en cero.** Sea, por ejemplo, el número 70. 70 es divisible entre 10 porque termina en cero, y 10 es divisible entre 5 porque lo contiene 2 veces. Ahora bien, si 5 divide a 10, dividirá a 70, que es múltiplo de 10, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

- 2) Que el número termine en cinco.** Sea, por ejemplo, el número 145. Descomponiendo este número en decenas y unidades, tendremos:

$$145 = 140 + 5$$

En la suma anterior, 5 divide a 140 porque termina en cero, y también divide a 5 porque todo número es divisible entre sí mismo; luego, si el 5 divide a 140 y a 5, dividirá a su suma, que es 145, porque todo número que divide a varios sumandos, divide a la suma.

- 3) Que el número no termine en cero ni cinco.** En este caso el número no es divisible entre 5.

Sea, por ejemplo, $88 = 80 + 8$. 5 divide a 80, pero no a 8; luego, no divide a 88, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 5 es el que se obtiene dividiendo entre 5 la cifra de las unidades (**240**). Así, el residuo de dividir 88 entre 5 es el que se obtiene dividiendo 8 entre 5, o sea, 3.

DIVISIBILIDAD ENTRE 4

TEOREMA

252

Un número es divisible entre 4 cuando sus dos últimas cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de cuatro.

- 1) Que las dos últimas cifras de la derecha sean ceros.** Sea, por ejemplo, el número 600, que es divisible entre 100 porque termina en dos ceros, y 100 es divisible entre 4 porque lo contiene 25 veces; luego, si 4 divide a 100, dividirá a 600, que es múltiplo de 100, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.
- 2) Que las dos últimas cifras de la derecha formen un múltiplo de 4.** Sea, por ejemplo, el número 416. Descomponiendo este número en centenas y unidades, tendremos:

$$416 = 400 + 16$$

En la suma anterior, 4 divide a 400 porque termina en dos ceros, y a 16, por suposición, porque hemos supuesto que las dos últimas cifras forman un múltiplo de 4; luego, si el 4 divide a 400 y a 16, dividirá a su suma, que es 416, porque si un número divide a varios sumandos, divide a la suma.

- 3) Que las dos últimas cifras de la derecha no sean ceros ni formen un múltiplo de 4.** El número no es divisible entre 4.

Sea, por ejemplo, $314 = 300 + 14$. 4 divide a 300, pero no a 14; luego, no divide a su suma 314, porque todo número que divide a un sumando y no divide al otro no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 4 es el que se obtiene dividiendo entre 4 el número que forman las dos últimas cifras de la derecha (**240**). Así, el residuo de dividir 314 entre 4 es el residuo de dividir 14 entre 4, o sea, 2.

DIVISIBILIDAD ENTRE 25

253

TEOREMA

Un número es divisible entre 25 cuando sus dos últimas cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de 25.

- 1) **Que las dos últimas cifras de la derecha sean ceros.** Sea, por ejemplo, el número 800, que es divisible entre 100 porque termina en dos ceros, y 100 es divisible entre 25 porque lo contiene 4 veces; luego, si 25 divide a 100, dividirá a 800, que es múltiplo de 100, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.
- 2) **Que las dos últimas cifras de la derecha formen un múltiplo de 25.** Sea, por ejemplo, el número 650. Descomponiendo este número en centenas y unidades, tendremos:

$$650 = 600 + 50$$

En la suma anterior, 25 divide a 600 porque termina en dos ceros, y divide a 50 por suposición, porque hemos supuesto que las dos últimas cifras forman un múltiplo de 25. Luego, si el 25 divide a 600 y a 50, dividirá a su suma, que es 650, porque todo número que divide a varios sumandos divide a la suma.

- 3) **Que las dos últimas cifras de la derecha no sean ceros ni formen un múltiplo de 25.** El número no es divisible entre 25.

Sea, por ejemplo, $834 = 800 + 34$. 25 divide a 800, pero no a 34; luego, no divide a la suma, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 25 es el que resulta de dividir el número que forman las dos últimas cifras entre 25. Así, el residuo de dividir 834 entre 25 es el de dividir 34 entre 25, o sea, 9.

DIVISIBILIDAD ENTRE 8

254

TEOREMA

Un número es divisible entre 8 cuando sus tres últimas cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de 8.

- 1) **Que las tres últimas cifras de la derecha sean ceros.** Sea, por ejemplo, el número 5,000, que es divisible entre 1,000 porque termina en tres ceros, y 1,000 es divisible entre 8 porque lo contiene 125 veces; luego, si el 8 divide a 1,000, dividirá a 5,000, que es múltiplo de 1,000 porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.
- 2) **Que las tres últimas cifras de la derecha formen un múltiplo de 8.** Sea, por ejemplo, el número 6,512. Descomponiendo este número en millares y unidades, tendremos:

$$6,512 = 6,000 + 512$$

En la suma anterior, 8 divide a 6,000 porque termina en tres ceros, y a 512, por suposición, porque hemos supuesto que el número formado por las tres últimas cifras es múltiplo de 8; luego, si el 8 divide a 6,000 y a 512, dividirá a su suma, que es 6,512, porque si un número divide a todos los sumandos, divide a la suma.

- 3) Que las tres últimas cifras no sean ceros ni formen un múltiplo de 8.** El número no es divisible entre 8.

Sea, por ejemplo, $7,124 = 7,000 + 124$. 8 divide a 7,000, pero no a 124; luego, no divide a la suma 7,124, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 8 es el que resulta de dividir el número que forman las tres últimas cifras de la derecha entre 8. Así, el residuo de dividir 7,124 entre 8 es el de dividir 124 entre 8, o sea, 4.

DIVISIBILIDAD ENTRE 125

TEOREMA

255

Un número es divisible entre 125 cuando sus tres últimas cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de 125.

- 1) Que las tres últimas cifras de la derecha sean ceros.** Sea, por ejemplo, el número 8,000, que es divisible entre 1,000 porque termina en tres ceros, y 1,000 es divisible entre 125 porque lo contiene 8 veces; luego, si 125 divide a 1,000, dividirá a 8,000, que es múltiplo de 1,000, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.
- 2) Que las tres últimas cifras de la derecha formen un múltiplo de 125.** Sea, por ejemplo, el número 4,250. Descomponiendo este número en millares y unidades, tendremos:

$$4,250 = 4,000 + 250$$

En esta suma, 125 divide a 4,000 porque termina en tres ceros, y a 250, por suposición; luego, si el 125 divide a 4,000 y a 250, dividirá a su suma, que es 4,250, porque todo número que divide a varios sumandos divide a la suma.

- 3) Que las tres últimas cifras de la derecha no sean ceros ni formen un múltiplo de 125.** El número no es divisible entre 125.

Sea, por ejemplo, $8,156 = 8,000 + 156$. 125 divide a 8,000, pero no a 156; luego, no divide a su suma, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el residuo de dividir el número entre 125 es el de dividir el número que forman las tres últimas cifras de la derecha entre 125.

Así, el residuo de dividir 8,156 entre 125 es el de dividir 156 entre 125, o sea, 31.

DIVISIBILIDAD ENTRE 3

256

PRIMER LEMA

La unidad, seguida de cualquier número de ceros, es igual a un múltiplo de 3 más la unidad.

$$\begin{aligned}\text{En efecto:} \quad 10 &= 3 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1 \\ 100 &= 33 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1 \\ 1,000 &= 333 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1 \\ 10,000 &= 3,333 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1\end{aligned}$$

257

SEGUNDO LEMA

Una cifra significativa, seguida de cualquier número de ceros, es igual a un múltiplo de 3 más la misma cifra.

$$\begin{aligned}\text{En efecto:} \quad 20 &= 10 \times 2 = (\text{m. de } 3 + 1) \times 2 = (\text{m. de } 3) \times 2 + 1 \times 2 = \text{m. de } 3 + 2 \\ 500 &= 100 \times 5 = (\text{m. de } 3 + 1) \times 5 = (\text{m. de } 3) \times 5 + 1 \times 5 = \text{m. de } 3 + 5 \\ 6,000 &= 1,000 \times 6 = (\text{m. de } 3 + 1) \times 6 = (\text{m. de } 3) \times 6 + 1 \times 6 = \text{m. de } 3 + 6\end{aligned}$$

258

TEOREMA

Todo número entero es igual a un múltiplo de 3 más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Sea un número entero cualquiera; por ejemplo, 1,356.

Vamos a demostrar que

$$1,356 = \text{m. de } 3 + (1 + 3 + 5 + 6) = \text{m. de } 3 + 15.$$

En efecto: descomponiendo este número en sus unidades de distinto orden, tendremos:

$$1,356 = 1,000 + 300 + 50 + 6$$

Aplicando los lemas anteriores, tendremos:

$$\begin{aligned}1,000 &= \text{m. de } 3 + 1 \\ 300 &= \text{m. de } 3 + 3 \\ 50 &= \text{m. de } 3 + 5 \\ 6 &= 6\end{aligned}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, tendremos:

$$1,356 = \text{m. de } 3 + (1 + 3 + 5 + 6)$$

o sea,

$$1,356 = \text{m. de } 3 + 15$$

que era lo que queríamos demostrar.

COROLARIO

259

Un número es divisible entre 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3.

En efecto: según el teorema anterior, todo número es igual a un múltiplo de 3 más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Luego, si la suma de los valores absolutos de las cifras de un número es múltiplo de 3, dicho número se puede descomponer en dos sumandos: uno, m. de 3 que evidentemente es divisible entre 3, y el otro, la suma de los valores absolutos de sus cifras, que también es múltiplo de 3; y si los dos sumandos son divisibles entre 3, su suma, que será el número dado, también será divisible entre 3, porque hay un teorema que dice que todo número que divide a varios sumandos también divide a la suma.

Así, por ejemplo, el número 4,575 será divisible entre 3 porque la suma de los valores absolutos de sus cifras, $4 + 5 + 7 + 5 = 21$, es un múltiplo de 3.

En efecto: según el teorema anterior, $4,575 = \text{m. de } 3 + 21$.

El sumando m. de 3, evidentemente, es divisible entre 3, y el otro sumando, 21, **que es la suma de los valores absolutos de las cifras de 4,575**, también es divisible entre 3. Luego, si el 3 divide a los dos sumandos, tiene que dividir a su suma, que es 4,575, porque todo número que divide a otros varios tiene que dividir a su suma.

Nota

Si la suma de los valores absolutos de las cifras de un número **no es múltiplo de 3**, dicho número **no es divisible entre 3**.

Así, por ejemplo, el número 989 no es divisible entre 3, porque la suma de los valores absolutos de sus cifras, $9 + 8 + 9 = 26$, no es múltiplo de 3.

En efecto: sabemos que $989 = \text{m. de } 3 + 26$.

El sumando m. de 3, evidentemente, es divisible entre 3, pero el otro sumando, 26, **que es la suma de los valores absolutos**, no es divisible entre 3; luego, la suma de esos sumandos, que es el número 989, no será divisible entre 3, porque hay un teorema que dice que si un número divide a uno de dos sumandos y no divide al otro, tampoco divide a la suma.

Además, en este caso, el **residuo** de dividir el número entre 3 es el que se obtiene dividiendo entre 3 la suma de los valores absolutos de sus cifras. Así, el residuo de dividir 989 entre 3 es el que resulta de dividir $9 + 8 + 9 = 26$ entre 3, o sea, 2.

DIVISIBILIDAD ENTRE 9

260

La divisibilidad entre 9 se demuestra de modo análogo a la divisibilidad entre 3, pero poniendo nueve donde diga tres; así que consta de los dos lemas, el teorema y el corolario siguientes:

PRIMER LEMA. La unidad seguida de cualquier número de ceros es igual a un múltiplo de 9 más la unidad.

SEGUNDO LEMA. Una cifra significativa seguida de cualquier número de ceros es igual a un múltiplo de 9 más la misma cifra.

TEOREMA. Todo número entero es igual a un múltiplo de 9 más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

COROLARIO. Un número es divisible entre 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 9.

Las demostraciones son análogas a las de la divisibilidad entre 3.

Además, el **residuo** de dividir un número entre 9 es el que se obtiene dividiendo entre 9 la suma de los valores absolutos de sus cifras.

DIVISIBILIDAD ENTRE 11

261

PRIMER LEMA

La unidad, seguida de un número par de ceros, es igual a un múltiplo de 11 más la unidad.

En efecto:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 11 \overline{) 100} \\ \underline{1} \\ 1 \end{array} \quad 100 = 11 \times 9 + 1 = \text{m. de } 11 + 1$$

$$\begin{array}{r} 909 \\ 11 \overline{) 10,000} \\ \underline{100} \\ 1 \end{array} \quad 10,000 = 909 \times 11 + 1 = \text{m. de } 11 + 1$$

262

SEGUNDO LEMA

La unidad, seguida de un número impar de ceros, es igual a un múltiplo de 11 menos la unidad.

En efecto:

$$10 = 11 - 1 = \text{m. de } 11 - 1$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 11 \overline{) 1,000} \\ \underline{10} \\ 10 \end{array} \quad 1,000 = 11 \times 90 + 10 = \text{m. de } 11 + 10 = \text{m. de } 11 + 11 - 1 = \text{m. de } 11 - 1$$

$$\begin{array}{r} 9,090 \\ 11 \overline{) 100,000} \\ \underline{100} \\ 10 \end{array} \quad 100,000 = 11 \times 9,090 + 10 = \text{m. de } 11 + 10 = \text{m. de } 11 + 11 - 1 = \text{m. de } 11 - 1$$

TERCER LEMA

263

Una cifra significativa, seguida de un número par de ceros, es igual a un múltiplo de 11 más la misma cifra.

En efecto:

$$400 = 100 \times 4 = (\text{m. de } 11 + 1) \times 4 = (\text{m. de } 11) \times 4 + 1 \times 4 = \text{m. de } 11 + 4$$

$$60,000 = 10,000 \times 6 = (\text{m. de } 11 + 1) \times 6 = (\text{m. de } 11) \times 6 + 1 \times 6 = \text{m. de } 11 + 6$$

CUARTO LEMA

264

Una cifra significativa, seguida de un número impar de ceros, es igual a un múltiplo de 11 menos la misma cifra.

En efecto:

$$90 = 10 \times 9 = (\text{m. de } 11 - 1) \times 9 = (\text{m. de } 11) \times 9 - 1 \times 9 = \text{m. de } 11 - 9$$

$$4,000 = 1,000 \times 4 = (\text{m. de } 11 - 1) \times 4 = (\text{m. de } 11) \times 4 - 1 \times 4 = \text{m. de } 11 - 4$$

TEOREMA

265

Todo número entero es igual a un múltiplo de 11 más la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par, contando de derecha a izquierda.

Sea, por ejemplo, el número 13,947. Vamos a demostrar que

$$13,947 = \text{m. de } 11 + [(7 + 9 + 1) - (4 + 3)] = \text{m. de } 11 + (17 - 7) = \text{m. de } 11 + 10$$

En efecto: descomponiendo este número en sus unidades de distinto orden, tendremos:

$$13,947 = 10,000 + 3,000 + 900 + 40 + 7$$

Aplicando los lemas anteriores, tendremos:

$$\begin{aligned} 10,000 &= \text{m. de } 11 + 1 \\ 3,000 &= \text{m. de } 11 - 3 \\ 900 &= \text{m. de } 11 + 9 \\ 40 &= \text{m. de } 11 - 4 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades:

$$13,947 = \text{m. de } 11 + [(7 + 9 + 1) - (4 + 3)] = \text{m. de } 11 + (17 - 10)$$

o sea

$$13,947 = \text{m. de } 11 + 10$$

que era lo que queríamos demostrar

COROLARIO

266

Un número es divisible entre 11 cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par, de derecha a izquierda, es cero o múltiplo de 11.

- 1) Que la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par sea cero.**

Sea, por ejemplo, el número 4,763, en el cual tenemos

$$(3 + 7) - (6 + 4) = 10 - 10 = 0$$

Vamos a demostrar que este número es divisible entre 11.

En efecto: según el teorema anterior, tenemos:

$$4,763 = \text{m. de } 11 + [(3 + 7) - (6 + 4)] = \text{m. de } 11 + 0$$

o sea,

$$4,763 = \text{m. de } 11$$

- 2) Que la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par sea múltiplo de 11.**

Sea, por ejemplo, el número 93,819, en el cual tenemos:

$$(9 + 8 + 9) - (1 + 3) = 26 - 4 = 22 = \text{m. de } 11$$

Vamos a demostrar que este número es divisible entre 11.

En efecto: sabemos que

$$93,819 = \text{m. de } 11 + [(9 + 8 + 9) - (1 + 3)] = \text{m. de } 11 + (26 - 4),$$

o sea,

$$93,819 = \text{m. de } 11 + 22$$

Aquí vemos que el número 93,819 es la suma de dos sumandos que son m. de 11 y 22. Uno de ellos m. de 11, evidentemente es divisible entre 11, y el otro sumando, 22, **que es la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par**, también es múltiplo de 11; luego, si el 11 divide a los dos sumandos, tiene que dividir a su suma, que es el número 93,819; porque hay un teorema que dice que si un número divide a otros varios, también divide a su suma.

OBSERVACIÓN

Si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par de un número **no es cero ni múltiplo de 11**, dicho número **no es múltiplo de 11**.

Sea, por ejemplo, el número 5,439, en el cual tendremos:

$$(9 + 4) - (3 + 5) = 13 - 8 = 5$$

Sabemos que

$$5,439 = \text{m. de } 11 + [(9 + 4) - (3 + 5)]$$

o sea,

$$5,439 = \text{m. de } 11 + 5$$

El sumando m. de 11, evidentemente, es divisible entre 11, pero el otro sumando, 5, no lo es; luego, su suma, que es el número 5,439, tampoco será divisible entre 11, porque todo número que divide a uno de dos sumandos y no divide al otro, tampoco divide a la suma.

Además, en este caso, el **residuo** de dividir el número entre 11 es el que se obtiene dividiendo entre 11 la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par.

Así, el residuo de dividir 1,829 entre 11 es el que resulta de dividir $(9 + 8) - (2 + 1) = 14$ entre 11, o sea, 3.

Si la suma de las cifras de lugar impar es **menor** que la suma de las cifras de lugar par, se aumenta la primera en el múltiplo de 11 necesario para que la sustracción sea posible. Ello no hace variar el residuo.

Así, quiero saber cuál es el residuo de la división de 8,291 entre 11. Tengo: $(1 + 2) - (9 + 8) = 3 - 17$. Como no puedo restar, añado al 3 el múltiplo de 11 que necesito para que la resta sea posible, en este caso 22, y tengo: $(3 + 22) - 17 = 25 - 17 = 8$. El residuo de 8,291 entre 11 es 8.

DIVISIBILIDAD ENTRE 7

267

Un número es divisible entre 7 cuando separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 7.

- 1) Para saber si el número 2,058 es divisible entre 7, haremos lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 205'8 \times 2 = 16 \\ - 16 \\ \hline 18'9 \times 2 = 18 \\ - 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

da cero, luego 2,058 es divisible entre 7.

- 2) Averiguar si el número 2,401 es divisible o no entre 7.

$$\begin{array}{r} 240'1 \times 2 = 2 \\ - 2 \\ \hline 23'8 \times 2 = 16 \\ - 16 \\ \hline 07 \end{array}$$

da múltiplo de 7, luego 2,401 es divisible entre 7.

- 3) Averiguar si 591 es o no divisible entre 7.

$$\begin{array}{r} 59'1 \times 2 = 2 \\ - 2 \\ \hline 5'7 \times 2 = 14 \\ - 14 \\ \hline 9 \end{array}$$

no da 0 ni múltiplo de 7, luego 591 no es divisible entre 7.

OBSERVACIÓN

Si el producto de la primera cifra de la derecha por 2 no se puede restar de lo que queda a la izquierda, se invierten los términos de la resta.

Ejemplos

268

DIVISIBILIDAD ENTRE 13

Un número es divisible entre 13 cuando, separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 13.

Ejemplos

- 1) Averiguar si el número 1,456 es múltiplo de 13.

$$\begin{array}{r} 145'6 \times 9 = 54 \\ - 54 \\ \hline 09'1 \times 9 = 9 \\ - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

da cero, luego 1,456 es divisible entre 13.

- 2) Averiguar si 195 es divisible entre 13.

$$\begin{array}{r} 19'5 \times 9 = 45 \\ - 45 \\ \hline 26 \end{array}$$

da 26, que es múltiplo de 13, luego 195 es divisible entre 13.

- 3) Averiguar si 2,139, es divisible entre 13.

$$\begin{array}{r} 213'9 \times 9 = 81 \\ - 81 \\ \hline 13'2 \times 9 = 18 \\ - 18 \\ \hline 5 \end{array}$$

da 5, luego 2,139 no es divisible entre 13.

269

DIVISIBILIDAD ENTRE 17

Un número es divisible entre 17 cuando, separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17.

Ejemplos

- 1) Averiguar si el número 2,142 es m. de 17.

$$\begin{array}{r} 214'2 \times 5 = 10 \\ - 10 \\ \hline 20'4 \times 5 = 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

da cero, luego 2,142 es divisible entre 17.

- 2) Averiguar si 3,524 es m. de 17.

$$\begin{array}{r} 352'4 \times 5 = 20 \\ - 20 \\ \hline 33'2 \times 5 = 10 \\ - 10 \\ \hline 23 \end{array}$$

da 23, luego 3,524 no es divisible entre 17.

270

DIVISIBILIDAD ENTRE 19

Un número es divisible entre 19 cuando, separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 17, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 19.

- 1) Averiguar si 171 es divisible entre 19.

$$\begin{array}{r} 17'1 \times 17 = 17 \\ - 17 \\ \hline 0 \end{array}$$

da cero, luego 171 es m. de 19.

- 2) Averiguar si 1,501 es m. de 19.

$$\begin{array}{r} 150'1 \times 17 = 17 \\ - 17 \\ \hline 13'3 \times 17 = 51 \\ - 51 \\ \hline 38 \end{array}$$

da 38, que es m. de 19, luego 1,501 es divisible entre 19.

DIVISIBILIDAD ENTRE NÚMEROS COMPUESTOS

Véase el número 297.

- ¿Entre cuáles de los números 2, 3, 4, 5 son divisibles 84, 375 y 136?
- ¿Entre cuáles de los números 2, 3, 4, 5, 11 y 25 son divisibles 175, 132, 165, 1,893, 12,344 y 12,133?
- ¿Entre cuáles de los números 8, 125, 11 y 13 son divisibles 8,998, 1,375, 7,512 y 8,192?
- ¿Entre cuáles de los números 7, 11, 13, 17 y 19 son divisibles 91, 253, 169, 187, 209, 34,573, 2,227 y 2,869?
- Decir, por simple inspección, cuál es el residuo de dividir 85 entre 2; 128 entre 5, 215 entre 4; 586 entre 25 y 1,046 entre 8. •
- Decir, por simple inspección, cuál es el residuo de dividir 95 entre 3; 1,246 entre 3; 456,789 entre 3; 986,547 entre 9; 2,345 entre 11; 93,758 entre 11; 7,234 entre 11 y 928,191 entre 11.
- Decir cuál es la menor cifra que debe añadirse al número 124 para que resulte un número de 4 cifras múltiplo de 3.
- Decir qué tres cifras distintas pueden añadirse al número 562 para formar un múltiplo de 3 de 4 cifras.
- Decir qué cifra debe suprimirse en 857 para que resulte un número de dos cifras múltiplo de 3.
- Decir qué cifra debe añadirse a la derecha de 3,254 para que resulte un múltiplo de 11 de cinco cifras.
- Para hallar el mayor múltiplo de 3 contenido en 7,345, ¿en cuánto se debe disminuir este número?
- Decir cuál es el mayor múltiplo de 9 contenido en 7,276.
- Para hallar el mayor múltiplo de 11 contenido en 2,738, ¿en cuánto se debe disminuir este número?
- ¿Cuál es la diferencia entre 871 y el mayor múltiplo de 9 contenido en él?

PRUEBA DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES POR LOS CARACTERES DE DIVISIBILIDAD

271 Los caracteres de divisibilidad, principalmente entre 9 y 11, se aplican a la prueba de las operaciones fundamentales, constituyendo lo que se llama **prueba del 9 y prueba del 11**.

Para ello hay que tener presente que **el residuo de dividir un número entre 9 se obtiene dividiendo entre 9 la suma de los valores absolutos de las cifras del número** y que **el residuo de dividir un número entre 11 se obtiene dividiendo entre 11 la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par del número**.

En la práctica, para hallar el residuo de dividir un número entre 9 o **exceso sobre 9** del número, se suma cada cifra con la siguiente, restando 9 cada vez que la suma sea 9 o mayor que 9, y si alguna cifra del número es 9, no se tiene en cuenta.

Así, para hallar el residuo de dividir 64,975 entre 9, diremos: 6 y 4, 10; menos 9, 1; 1 y 7, 8 (el 9 no se toma en cuenta); 8 y 5, 13; menos 9, 4. El residuo de dividir el número entre 9 es 4.

I. SUMA

272 PRUEBA DEL 9

Se halla el residuo entre 9 de cada sumando; el residuo entre 9 de la suma de estos residuos tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 de la suma total.

Ejemplo

Operación

$$\begin{array}{r} 2,345 \\ + 7,286 \\ \hline 138,797 \\ \hline 148,428 \end{array}$$

Prueba

Residuo entre 9 de	2,345	5
" " " "	7,286	5
" " " "	138,797	8
• Suma de estos residuos		18
Residuo de esta suma entre 9		0
Residuo de la suma 148,428 entre 9		0

273 PRUEBA DEL 11

El procedimiento es semejante. Así, en el ejemplo anterior, tendremos:

Residuo entre 11 de 2,345.	$(5 + 3) - (4 + 2) = 8 - 6 = 2$
Residuo entre 11 de 7,286.	$(6 + 2) - (8 + 7) = 8 - 15$
	$= (8 + 11) - 15 = 4$
Residuo entre 11 de 138,797.	$(7 + 7 + 3) - (9 + 8 + 1) = 17 - 18$
	$= (17 + 11) - 18 = 10$

Suma de estos residuos	16
Residuo de esta suma entre 11	$6 - 1 = 5$
Residuo de la suma 148,428 entre 11	$(8 + 4 + 4) - (2 + 8 + 1) = 16 - 11 = 5$

II. RESTA

El minuendo de una resta es la suma de dos sumandos, que son el sustraendo y la diferencia. Por tanto, podemos aplicar, para probar la resta, la regla dada para probar la suma, considerando como sumandos el sustraendo y la diferencia y como suma total el minuendo.

274

PRUEBA DEL 9

275

Se halla el residuo entre 9 del sustraendo y de la diferencia; el residuo entre 9 de la suma de estos residuos tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 del minuendo.

Operación	Prueba	
75,462	Residuo entre 9 de 61,034.....	5
– 61,034	” ” ” ” 14,428.....	1
14,428	Suma de estos residuos.....	6
	Residuo entre 9 de 6.....	6
	Residuo entre 9 de 75,462.....	6

Ejemplo

PRUEBA DEL 11

276

El procedimiento es semejante. Así, en el ejemplo anterior, se tendrá:

Residuo entre 11 de 61,034.....	$(4 + 6) - (3 + 1) = 10 - 4 = 6$
Residuo entre 11 de 14,428.....	$(8 + 4 + 1) - (2 + 4) = 13 - 6 = 7$
Suma de estos residuos.....	13
Residuo entre 11 de 13.....	$3 - 1 = 2$
Residuo entre 11 de 75,462.....	$(2 + 4 + 7) - (6 + 5) = 13 - 11 = 2$

III. MULTIPLICACIÓN

PRUEBA DEL 9

277

Se halla el residuo entre 9 del multiplicando y del multiplicador; el residuo entre 9 del producto de estos residuos tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 del producto total.

Operación	Prueba	
186	Residuo de 186 entre 9.....	6
× 354	Residuo de 354 entre 9.....	3
744	Producto de estos residuos.....	18
930	Residuo entre 9 de 18.....	0
558	Residuo entre 9 del producto 65,844.....	0
65,844		

Ejemplo

En la práctica la operación suele disponerse como se indica a continuación:



278

PRUEBA DEL 11

En el ejemplo anterior se tendrá:

Residuo entre 11 de 186.....	$(6 + 1) - 8 = 7 - 8 = (7 + 11) - 8 = 10$
Residuo entre 11 de 354.....	$(4 + 3) - 5 = 7 - 5 = 2$
Producto de estos residuos	20
Residuo entre 11 de este producto	$0 - 2 = (0 + 11) - 2 = 9$
Residuo entre 11 del producto 65,844.....	$(4 + 8 + 6) - (4 + 5) = 18 - 9 = 9$

IV. DIVISIÓN

279

Como el dividendo de una división exacta es el producto de dos factores que son el divisor y el cociente, para probar una división exacta, aplicaremos la regla dada para probar un producto considerando como factores el divisor y el cociente y como producto el dividendo.

Si la división es inexacta, el dividendo es la suma de dos sumandos que son el producto del divisor por el cociente y el residuo; luego, podremos aplicar la regla anterior y la regla dada para la suma.

280

PRUEBA DEL 9

Se halla el residuo entre 9 del divisor y del cociente; se multiplican estos residuos y al producto que resulte se le añade el residuo entre 9 del residuo de la división, si lo hay. El residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 del dividendo.

Ejemplos

1) Operación

$$\begin{array}{r}
 862 \\
 2,134 \overline{) 1,839,508} \\
 \underline{13,230} \\
 4,268 \\
 \underline{0000}
 \end{array}$$

Prueba



2) Operación

$$\begin{array}{r}
 871 \\
 516 \overline{) 449,560} \\
 \underline{3,676} \\
 0,640 \\
 \underline{124}
 \end{array}$$

El 7 que se suma a 3×7 es el residuo de 124 entre 9.

Prueba**PRUEBA DEL 11**

281

El procedimiento es semejante, pero hallando los residuos entre 11, del modo como se han hallado antes.

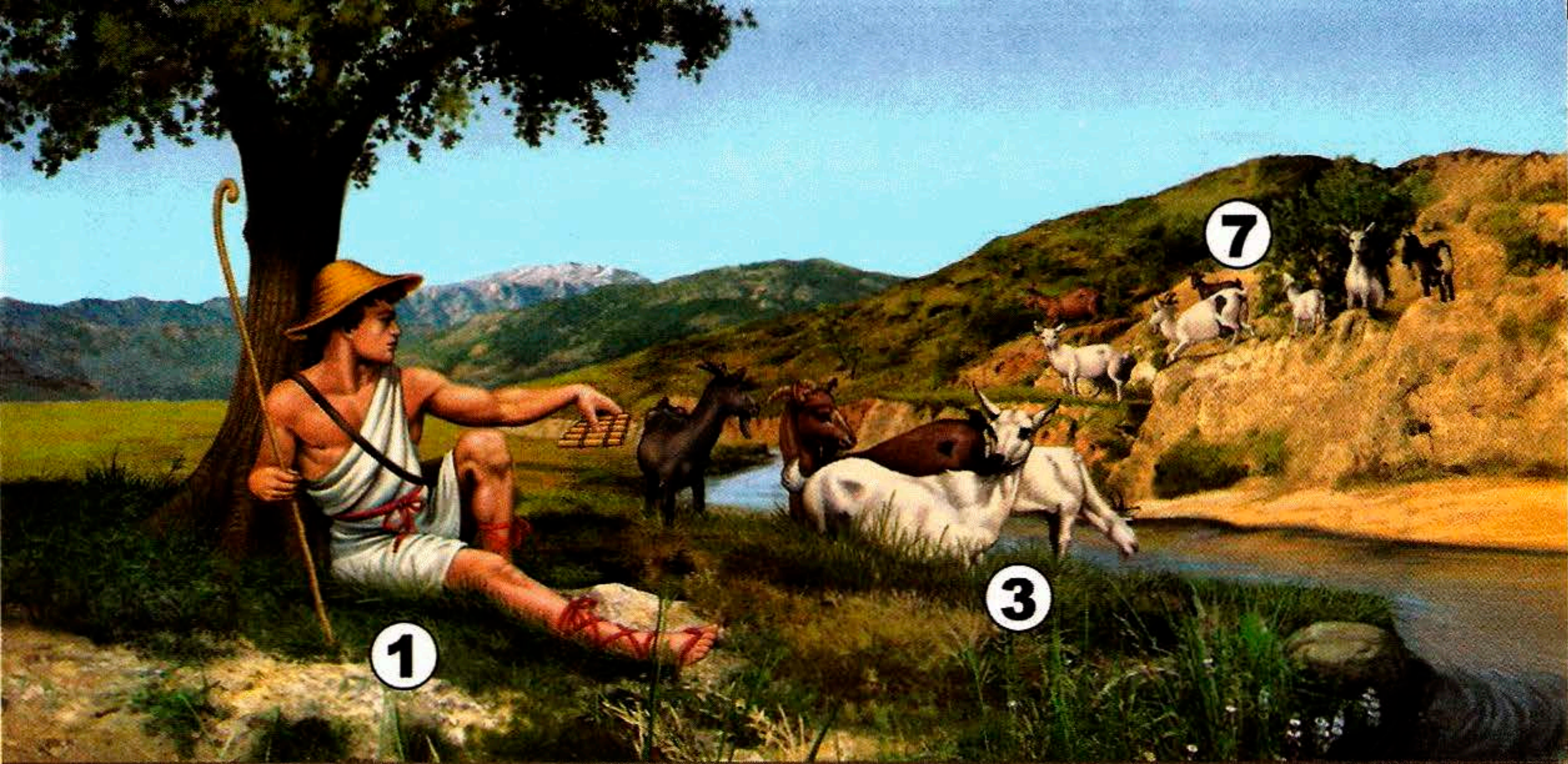
Así, en el ejemplo anterior tendremos:

**GARANTÍA DE ESTAS PRUEBAS**

282

Es relativa. Si la prueba no cumple los requisitos que se han indicado en cada caso, **podemos tener la seguridad de que la operación está mal**, pero si la prueba resulta bien, **no podemos tener la seguridad de que la operación es correcta**; las cifras pueden estar mal halladas, pero la suma de sus valores absolutos puede ser igual a la de las cifras correctas, y la prueba será acertada.

Además, en la prueba del 9 no se atiende al lugar que ocupan las cifras, así que teniendo cifras iguales a las correctas, aunque sea en distinto orden, la prueba estará bien. La prueba del 11, por tener en cuenta el lugar de las cifras, es de más garantía que la del 9, pero es mucho más laboriosa.



Al descubrir **Euclides** la infinitud de la serie de los números primos, alcanzó su máximo desarrollo la teoría de los números entre los griegos. No se volvieron a hacer progresos en este campo, hasta que **Fermat**, en 1601-1665, propuso su teore-

ma sobre los exponentes primos. **L. S. Dickson** afirma en su *History of theory of numbers* que los chinos ya conocían este problema en el año 500 a. C., cuando el número era 2.

Capítulo XIX

TEORÍA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

283 Hemos visto (229) que **números primos absolutos** son los que solamente son divisibles entre ellos mismos y entre 1, como 17, 31, 53.

284 **NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ O NÚMEROS PRIMOS RELATIVOS** son dos o más números que no tienen más divisor común que 1.

El mayor divisor común o máximo común divisor de varios números primos entre sí es 1. Así, 8 y 15 son primos entre sí o primos relativos porque su único factor común es 1, porque 8 es divisible entre 2, pero 15 no, y 15 es divisible entre 3 y 5, pero 8 no.

7, 12 y 15 son primos entre sí porque 7 no divide a 12 ni a 15; 2 divide a 12, pero no a 7 ni a 15; 3 divide a 12 y a 15, pero no a 7; 5 divide a 15, pero no a 7 ni a 12; luego, su único divisor común es 1.

12, 14 y 18 **no son** primos entre sí, porque 2 los divide a todos; 35, 70 y 45 tampoco son primos entre sí porque 5 los divide a todos.

Obsérvese que para que dos o más números sean primos entre sí **no es necesario que sean primos absolutos**. Así, 8 no es primo, 15 tampoco, y sin embargo, son primos entre sí. 7 es primo, 12 no lo es y 25 tampoco y son primos entre sí. Ahora bien, si dos o más números son **primos absolutos cada uno de ellos**, evidentemente serán primos entre sí.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ DOS A DOS son tres o más números tales que cada uno de ellos es primo con cada uno de los demás.

Así, 8, 9 y 17 son primos dos a dos, porque el 8 es primo con 9 y con 17, y el 9 es primo con 17; 5, 11, 14 y 39 son primos dos a dos, porque 5 es primo con 11, con 14 y con 39; 11 es primo con 14 y con 39; y 14 es primo con 39.

10, 15, 21 y 16 son primos entre sí, porque el único número que los divide a **todos** es 1, pero **no son** primos dos a dos, porque 15 y 21 tienen el factor común 3.

Si varios números son primos dos a dos, necesariamente son primos entre sí, pero siendo primos entre sí pueden no ser primos dos a dos.

NÚMEROS CONSECUTIVOS son dos o más números enteros tales, que cada uno se diferencia del anterior en una unidad.

Los números consecutivos representan conjuntos que se diferencian en un elemento.

5 y 6; 21 y 22; 7, 8 y 9; 18, 19, 20 y 21

Dos números enteros consecutivos se expresan por las fórmulas n y $n + 1$.

Así, si n es 5, $n + 1$ será 6 y $n - 1$ será 4. Evidentemente, 5 y 6 o 4 y 5 son consecutivos.

De dos números consecutivos, uno es *par* y otro *impar*.

Dos números enteros consecutivos son primos entre sí. En efecto: si los números consecutivos n y $n + 1$ tuvieran un divisor común distinto de la unidad, este divisor común dividiría a su diferencia, porque todo divisor de dos números divide a su diferencia (242); pero la diferencia entre n y $n + 1$ es la unidad, luego ese divisor tendría que dividir a la unidad, lo cual es imposible.

Las fórmulas para expresar tres o más números enteros consecutivos son: $n, n + 1, n + 2, n + 3 \dots$ o también, $n, n - 1, n - 2, n - 3 \dots$. *Tres o más números enteros consecutivos son primos entre sí.*

285

286

Ejemplos

1. Escribir dos números, tres números, cuatro números primos entre sí.
2. Escribir dos números compuestos, tres números compuestos primos entre sí.
3. Escribir cuatro números compuestos primos entre sí.
4. Escribir cuatro números impares, seis números impares, primos entre sí.
5. ¿Es posible que varios números pares sean primos entre sí?
6. ¿Puede haber varios números múltiplos de 3 que sean primos entre sí?
7. Decir si los siguientes grupos de números son o no primos entre sí:

a) 9, 14 y 21

b) 12, 24 y 42

c) 35, 18, 12 y 28

d) 26, 39, 42 y 65

e) 22, 33, 44, 55 y 91

f) 14, 21, 28, 35 y 26

g) 34, 51, 68, 85 y 102

79

Ejercicio

8. Los números 23, 46 y 69 no son primos entre sí porque...
9. 42, 63, 91 y 105 no son primos entre sí porque...
10. ¿Son primos dos a dos los siguientes grupos de números?:
 - a) 5, 8 y 10
 - b) 6, 35 y 18
 - c) 9, 25 y 14
 - d) 18, 45, y 37
 - e) 13, 17, 16 y 24
 - f) 22, 35, 33 y 67
11. Escribir tres números, cuatro números primos entre sí dos a dos.
12. Escribir tres números compuestos, cuatro números compuestos, primos entre sí dos a dos.
13. Los números 8, 9, 10 y 15, ¿son primos entre sí? ¿Y primos dos a dos?
14. Decir si los siguientes grupos de números son primos entre sí y si lo son dos a dos:
 - a) 10, 18 y 21
 - b) 14, 26, 34 y 63
 - c) 19, 38, 57 y 76
 - d) 24, 36, 42, 60 y 81
 - e) 7, 9, 11, 13, 15 y 17
 - f) 5, 7, 17, 10, 14 y 32
15. De los números 24, 31, 27, 36, 42, 53 y 14 formar: un grupo de cuatro números que no sean primos entre sí; un grupo de cuatro que sean primos entre sí; un grupo de cuatro que sean primos dos a dos.
16. De los números 28, 35, 17, 14, 26 y 15 formar un grupo de tres números que no sean primos entre sí; un grupo de cinco que sean primos entre sí; y un grupo de tres que sean primos dos a dos.
17. Escribir cinco números impares primos entre sí dos a dos.
18. Decir si los números 14, 18, 24, 35 y 56 son primos entre sí y si lo son dos a dos.
19. Decir si los números 17, 24, 35, 59 y 97 son primos entre sí y si lo son dos a dos.
20. De los números 24, 31, 35, 37, 45, 47, 49, 57, 67, 83 y 87 formar un grupo de cinco números que sean primos entre sí y un grupo de tres números que sean primos entre sí dos a dos.
21. De los números 24, 31, 35, 37, 45, 47, 57, 67, 83 y 86 formar un grupo de cinco números primos entre sí dos a dos.
22. Las edades de Pedro y Juan son dos números enteros consecutivos cuya suma es 51. Si Pedro es el menor, ¿cuál es la edad de cada uno?
23. Si Enrique tiene un año menos que Basilio y ambas edades suman 103 años, ¿cuál es la edad de cada uno?
24. Las edades de Pedro, Juan y Enrique que son tres números enteros consecutivos, suman 87 años. Si Enrique es el menor y Pedro el mayor, ¿cuál es la edad de cada uno?
25. Un comerciante compró el lunes cierto número de sacos de frijoles; el martes compró un saco más que los que compró el lunes; el miércoles uno más que el martes, y el jueves uno más que el miércoles. Si en los 4 días adquirió 102 sacos, ¿cuántos compró cada día?
26. ¿Qué factor común tienen 8 y 9; 10, 11 y 12; 84, 83, 82 y 81?

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES SOBRE NÚMEROS PRIMOS

I. TEOREMA

287

Todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que 1.

Sea el número compuesto N . Vamos a demostrar que N tiene por lo menos un factor primo mayor que 1.

En efecto: N , por ser compuesto, tiene que poseer algún divisor distinto de sí mismo y de la unidad que llamaremos N' , el cual tiene que ser primo o compuesto. Si N' es primo, ya queda demostrado el teorema, porque N tendrá un divisor primo mayor que 1. Si N' es compuesto tendrá que tener un divisor distinto de N' y de la unidad que llamaremos N'' , el cual será divisor de N porque N es múltiplo de N' y todo número que divide a otro divide a sus múltiplos. N'' ha de ser primo o compuesto. Si N'' es primo queda demostrado el teorema; si es compuesto tiene que tener un divisor distinto de N'' y de la unidad que llamaremos N''' , el cual dividirá a N . Este N''' ha de ser primo o compuesto. Si es primo, queda demostrado el teorema y si es compuesto tendrá que tener otro divisor distinto de sí mismo y de la unidad, que llamaremos N'''' , el cual dividirá a N y así sucesivamente. Ahora bien, como estos divisores se van haciendo cada vez menores, pero siempre mayores que la unidad, y no habiendo un número ilimitado de divisores, llegaremos necesariamente a un número primo, que dividirá a N . Luego N tiene por lo menos un divisor primo mayor que 1.

El número compuesto 14 es divisible entre los números primos 2 y 7; el número compuesto 121 es divisible entre el número primo 11.

Ejemplo

II. TEOREMA

288

La serie de los números primos es ilimitada, o sea, que por grande que sea un número primo, siempre hay otro número primo mayor.

Sea el número primo P tan grande como se quiera. Vamos a demostrar que hay otro número primo mayor que P .

Para hacer la demostración formemos el producto de todos los números primos menores que P , multipliquémoslo por P , añadamos la unidad y sea N el resultado:

$$1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times \dots \times P + 1 = N$$

N evidentemente es mayor que P y tiene que ser primo o compuesto. Si N es primo queda demostrado el teorema, porque habrá un número primo mayor que P . Si N es compuesto

tiene que poseer un divisor primo mayor que 1, porque hay un teorema (287) que dice que todo número compuesto tiene por lo menos un divisor primo mayor que 1. Ese divisor primo de N tiene que ser menor que P , igual a P o mayor que P . Ahora bien, el divisor primo de N no puede ser menor que P , porque dividiendo a N entre cualquiera de los números primos menores que P daría de residuo la unidad; no puede ser igual a P , porque dividiendo a N entre P daría también de residuo la unidad; luego, si N necesita tener un divisor primo y ese divisor primo no es menor que P ni igual a P , tiene que ser mayor que P . Luego hay un número primo mayor que P , al cual se pueda aplicar el mismo razonamiento; luego la serie de los números primos es ilimitada.

289

III. TEOREMA

Si un número primo no divide a otro número, necesariamente es primo con él.

Sea el número primo a , que no divide al número b . Vamos a demostrar que a es primo con b , o sea, que a y b son primos entre sí.

En efecto: el número a , por ser primo, solamente es divisible entre a y entre 1. Por tanto, los únicos divisores comunes que pueden tener a y b son a o 1. Ahora bien: a no puede ser divisor común de a y b , porque suponemos que a no divide a b , luego, el único divisor común de a y b es 1, o sea, que a y b son primos entre sí, que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

El número primo 5 no divide a 14; 5 y 14 son primos entre sí.

290

IV. TEOREMA

Todo número que divide a un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, necesariamente divide al otro factor.

Sea el número a que divide al producto bc y es primo con b . Vamos a demostrar que a tiene que dividir al otro factor c .

En efecto: como a y b son primos entre sí, su mayor divisor común es 1. Multiplicando los números a y b por c resultarán los productos ac y bc ; y el m.c.d. de estos productos será $1 \times c$, o sea c , porque si dos números se multiplican por un mismo número, su m.c.d. queda multiplicado por ese mismo número (314). Ahora bien: a divide al producto ac por ser un factor de este producto y al producto bc por suposición; luego dividirá al m.c.d. de ac y bc que es c , porque todo número que divide a otros dos, divide a su m.c.d. (313). Luego a divide a c , que era lo que queríamos demostrar.

5 divide al producto $7 \times 10 = 70$, y como es primo con 7, divide a 10.

Ejemplo

V. TEOREMA

291

Todo número primo que divide a un producto de varios factores, divide por lo menos a uno de ellos.

Sea el número primo P que divide al producto $abcd$. Vamos a demostrar que P tiene que dividir a uno de estos factores.

En efecto: el producto $abcd$ se puede considerar descompuesto en dos factores, de este modo: $a(bcd)$.

Si P divide a a , queda demostrado el teorema y si P no divide a a será primo con él, porque hay un teorema (289) que dice que si un número primo no divide a otro número es primo con él y P tendrá que dividir al otro factor bcd , porque hay un teorema (290) que dice que si un número divide al producto de dos factores y es primo con uno de ellos, tiene que dividir al otro. Luego, P divide al producto bcd .

Este producto se puede considerar descompuesto en dos factores, de este modo: $b(cd)$. Si P divide al factor b queda demostrado el teorema; si no lo divide es primo con él, y tendrá que dividir al otro factor cd ; por las razones anteriores.

Si P divide al factor c , queda demostrado el teorema; si no lo divide es primo con él y tendrá que dividir al otro factor, que es d . Luego, P divide a uno de los factores, que era lo que queríamos demostrar.

El número primo 3 que divide al producto $5 \times 8 \times 6 = 240$, tiene que dividir por lo menos a uno de los factores y, en efecto, divide a 6.

Ejemplo

VI. TEOREMA

292

Todo número primo que divide a una potencia de un número tiene que dividir a este número.

Sea el número primo P que divide a a^n . Vamos a demostrar que P divide a a .

En efecto: por definición de potencia, sabemos que

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \dots}_{n \text{ veces}}$$

Ahora bien: el número primo P divide a a^n , por suposición, luego divide a su igual $\underbrace{a \times a \times a \times a \dots}_{n \text{ veces}}$. Si P divide a este producto, tiene que dividir a uno de sus factores, por-

que todo número primo que divide a un producto de varios factores tiene que dividir a uno

de ellos (291), pero todos los factores son a ; luego, P divide a a , que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

El número primo 3 divide a 216 que es 6^3 y también divide a 6.

293

VII. TEOREMA

Si dos números son primos entre sí, todas sus potencias también son números primos entre sí.

Sean los números a y b , primos entre sí. Vamos a demostrar que dos potencias cualesquiera de estos números, por ejemplo, a^m y b^n , también son números primos entre sí.

En efecto: por definición de potencia, sabemos que:

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times a \dots}_{m \text{ veces}}$$

$$b^n = \underbrace{b \times b \times b \times b \dots}_{n \text{ veces}}$$

Ahora bien: si las potencias a^m y b^n no fueran números primos entre sí, tendrían un factor primo común, por ejemplo, P . Si P dividiera a a^m y a b^n , tendría que dividir a a y a b , según el teorema anterior, lo cual va contra lo que hemos supuesto, porque hemos supuesto que a y b son primos entre sí. Luego a^m y b^n no pueden tener ningún factor común, o sea, que son números primos entre sí, que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

2 y 3 son primos entre sí y dos potencias cualesquiera de estos números, por ejemplo, 32 que es 2^5 y 81 que es 3^4 también son números primos entre sí.

294

FORMACIÓN DE UNA TABLA DE NÚMEROS PRIMOS

Explicación del procedimiento empleado.

Para formar una tabla de números primos desde el 1 hasta un número dado, se escribe la serie natural de los números desde la unidad hasta dicho número. Hecho esto, a partir del 2, que se deja, se tacha su cuadrado 4 y a partir del 4 se van tachando de dos en dos lugares todos los números siguientes múltiplos de 2. A partir del 3, que se deja, se tacha su cuadrado 9 y desde el 9 se tachan de tres en tres lugares todos los números siguientes múltiplos de 3. A partir del 5, que se deja, se tacha su cuadrado 25 y desde el 25 se tachan de cinco en cinco lugares todos los números siguientes múltiplos de 5.

A partir del 7, que se deja, se tacha su cuadrado 49 y desde el 49 se van tachando de siete en siete lugares todos los números siguientes múltiplos de 7. A partir del 11, del 13, del 17 y los siguientes números primos se procede de modo semejante: se dejan esos números, se tacha su cuadrado, y a partir de éste se tachan los números siguientes, de tantos en tantos lugares como unidades tenga el número primo de que se trate. La operación termina al llegar a un número primo, cuyo cuadrado quede fuera del límite dado. Los números primos son los que quedan sin tachar.

Formar una tabla de números primos del 1 al 150.

Escribiremos la serie natural de los números del 1 al 150 y aplicaremos el procedimiento anterior:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Los números primos del 1 al 150 son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139 y 149.

En esta tabla la operación termina al llegar al número primo 13, cuyo cuadrado, 169, queda fuera de la tabla.

Este procedimiento se conoce con el nombre de **Criba de Eratóstenes**.⁽¹⁾

Nota

Al escribir los números puede prescindirse de los números pares, excepto el 2, porque como se ve todos los números pares se tachan.

Ejemplo

⁽¹⁾ Se llama *Criba* porque al tachar los números se van formando como agujeros, y de *Eratóstenes* porque fue este célebre matemático griego el creador de este procedimiento.

80

Ejercicio

1. Formar una tabla de números primos del 1 al 50.
2. Ídem del 1 al 100.
3. Ídem del 1 al 200.
4. Ídem del 1 al 300.

295

MANERA DE CONOCER SI UN NÚMERO DADO ES PRIMO O NO

TEOREMA. Para conocer si un número dado es primo o no, se divide dicho número entre todos los números primos menores que él y si se llega, sin obtener cociente exacto, a una división inexacta en que el cociente sea igual o menor que el divisor, el número dado es primo. Si alguna división es exacta, el número dado no es primo.

Ejemplo

Sea el número 179 que queremos averiguar si es o no primo. Lo dividimos entre 2, 3, 5, 7, 11 y 13 sin obtener cociente exacto y al dividirlo entre 13 nos da 13 de cociente. Vamos a demostrar que 179 es primo, para lo cual bastará demostrar que no es divisible entre ningún número primo mayor que 13.

En efecto: si 179 fuera divisible entre algún número primo mayor que 13, por ejemplo 17, el cociente de esta división exacta sería menor que 13, porque si al dividir 179 entre 13 nos dio 13 de cociente, al dividirlo entre 17, mayor que 13, el cociente será menor que 13. Sea a este cociente. Como la división sería exacta, tendríamos:

$$179 = 17 \times a$$

179 sería divisible entre a . Si a fuera primo, como es menor que 13, 179 sería divisible entre un número primo menor que 13, lo cual por hipótesis, es falso. Si a fuera compuesto, como es menor que 13, forzosamente tendría un factor primo menor que 13, que dividiría a 179, lo cual es imposible. Luego, si 179 no es divisible entre ningún número primo, es primo, ya que si fuera compuesto tendría por lo menos un factor primo mayor que 1. (287)

Ejemplos

- 1) Averiguar si 191 es o no primo.

$$\begin{array}{r} 95 \\ 2 \overline{) 191} \\ 11 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ 3 \overline{) 191} \\ 11 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 5 \overline{) 191} \\ 41 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 7 \overline{) 191} \\ 51 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 11 \overline{) 191} \\ 81 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 13 \overline{) 191} \\ 61 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 17 \overline{) 191} \\ 21 \\ 4 \end{array}$$

En esta última división el cociente 11 es menor que el divisor 17 y la división es inexacta, luego 191 es primo.

2) Averiguar si 853 es o no primo.

En la práctica no vamos a hacer las divisiones entre 2, 3, 5, 7 ni 11 (siempre que se vea que el cociente ha de ser mayor que el divisor) sino que aplicaremos los caracteres de divisibilidad que conocemos para ver si el número dado es o no divisible entre estos números.

Así, en este caso, tenemos: 853 no es divisible entre 2, porque no termina en cifra par; no es divisible entre 3 porque $8 + 5 + 3 = 16$ no es múltiplo de 3; tampoco lo es entre 5 porque no termina en 0 ni en 5; no lo es entre 7 porque:

$$\begin{array}{r} 85'3 \times 2 = 6 \\ - 6 \\ \hline 7'9 \times 2 = 18 \\ - 18 \\ \hline 11 \text{ no da } 0 \text{ ni múltiplo de } 7. \end{array}$$

Tampoco es divisible entre 11 porque $(3 + 8) - 5 = 11 - 5 = 6$ no da cero ni múltiplo de 11.

En cada uno de estos casos, si se hubiera dividido, el cociente evidentemente no hubiera sido igual ni menor que el divisor.

Ahora procedemos a dividir entre 13, 17, 19, etc.:

$$\begin{array}{r} 65 \\ 13 \overline{) 853} \\ \underline{73} \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 17 \overline{) 853} \\ \underline{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 19 \overline{) 853} \\ \underline{93} \\ 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 23 \overline{) 853} \\ \underline{163} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 29 \overline{) 853} \\ \underline{273} \\ 12 \end{array}$$

En esta última división *inexacta* el cociente es igual al divisor, luego 853 es primo.

3) Averiguar si 391 es primo.

Aplicando los caracteres de divisibilidad, vemos que no es divisible entre 2, 3, 5, 7 ni 11. Tendremos:

$$\begin{array}{r} 30 \\ 13 \overline{) 391} \\ \underline{01} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 17 \overline{) 391} \\ \underline{51} \\ 0 \end{array}$$

Esta última división es exacta, luego 391 es compuesto.

Averiguar si son o no primos los números siguientes:

- | | | | | |
|--------|---------|---------|-----------|-----------|
| 1. 97 | 8. 239 | 15. 541 | 22. 841 | 29. 1,207 |
| 2. 139 | 9. 259 | 16. 529 | 23. 881 | 30. 1,301 |
| 3. 169 | 10. 271 | 17. 601 | 24. 961 | 31. 1,309 |
| 4. 197 | 11. 289 | 18. 683 | 25. 997 | 32. 2,099 |
| 5. 211 | 12. 307 | 19. 713 | 26. 1,009 | |
| 6. 221 | 13. 361 | 20. 751 | 27. 1,099 | |
| 7. 229 | 14. 397 | 21. 811 | 28. 1,201 | |

81

Ejercicio

TEOREMA

Si un número es divisible entre dos o más factores primos entre sí dos a dos, es también divisible entre su producto.

296

Sea el número N divisible entre los factores a , b y c , que son primos entre sí dos a dos. Vamos a probar que N es divisible entre el producto ab y entre el producto abc .

En efecto: como N es divisible entre a , llamando q al cociente de dividir N entre a , tendremos:

$$N = aq \quad (1)$$

El factor b divide a N por hipótesis, luego divide a su igual aq , pero como es primo con a por hipótesis, dividirá a q , porque todo número que divide al producto de dos factores y es primo con uno de ellos, tiene que dividir al otro factor (290). Llamando q' al cociente de dividir q entre b , tendremos:

$$q = bq' \quad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades (1) y (2), tendremos:

$$Nq = aqbq'$$

Dividiendo ambos miembros entre q , para lo cual basta suprimir ese factor en cada producto, la igualdad no varía y tendremos:

$$N = abq' \text{ o sea } N = (ab)q'$$

igualdad que demuestra la primera parte del teorema, pues ella nos dice que el número N contiene al producto ab un número exacto de veces, q' veces, o sea, que N es divisible entre el producto ab , que era lo primero que queríamos demostrar.

Ahora bien: c divide a N por hipótesis, luego dividirá a su igual aq , pero como es primo con a dividirá a q ; si divide a q dividirá a su igual bq' , pero como es primo con b dividirá a q' . Llamando q'' al cociente de dividir q' entre c , tendremos:

$$q' = cq'' \quad (3)$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades (1), (2) y (3), tendremos:

$$Nqq' = aqbq'cq''$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad entre q y entre q' , para lo cual basta suprimir esos factores en ambos productos, la igualdad no varía y tendremos:

$$N = abcq'' \text{ o sea } N = (abc)q''$$

igualdad que demuestra la segunda parte del teorema, pues ella nos indica que el número N contiene al producto abc un número exacto de veces, q'' veces, o sea que N es divisible entre el producto abc , que era lo que queríamos demostrar.

DIVISIBILIDAD ENTRE NÚMEROS COMPUESTOS

De acuerdo con lo demostrado en el teorema anterior, si un número es divisible entre dos factores primos entre sí, será divisible entre su producto, luego:

Un número es divisible entre 6 cuando es divisible a la vez entre 2 y entre 3, o sea, cuando termina en cero o cifra par y la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3.

Un número es divisible entre 12 cuando es divisible a la vez entre 3 y entre 4, o sea, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3 y sus dos últimas cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de 4.

Un número es divisible entre 14 cuando es divisible a la vez entre 2 y entre 7; entre 15 cuando es divisible a la vez entre 3 y 5; entre 18 cuando es divisible a la vez entre 2 y 9; entre 20 cuando es divisible a la vez entre 4 y 5, etcétera.

82

Ejercicio

1. Enunciar los caracteres de divisibilidad entre 6, 12, 15, 18, 22, 24, 26, 28, 30, 45, 90.
2. Decir si los números 14, 18, 24, 36 y 27 son divisibles entre 6.
3. Decir entre cuáles de los números 12, 15 y 18 son divisibles los números 36, 45, 72, 300, 450, 1,200, 3,945 y 9,972.
4. Decir entre cuáles de los números 14, 22 y 35 son divisibles los números 98, 968, 455, 448 y 6,919.
5. Si un número es divisible entre 4 y 6, ¿ha de ser necesariamente divisible entre 24?
6. Si 20 es divisible entre 2 y 4, ¿por qué no es divisible entre $2 \times 4 = 8$?
7. Si un número es divisible entre 2, 3 y 6, ¿ha de ser necesariamente divisible entre $2 \times 3 \times 6 = 36$?
8. ¿Cómo es que 90 no divide a 120 si este número es divisible entre 3, 6 y 5 y $3 \times 6 \times 5 = 90$?

TEOREMA

298

Todo número primo mayor que 3 equivale a un múltiplo de 6 aumentado o disminuido en una unidad.

Sea N un número primo mayor que 3. Vamos a demostrar que

$$N = m. \text{ de } 6 \pm 1$$

En efecto: dividamos N entre 6, sea q el cociente y R el residuo. Tendremos:

$$N = 6q + R$$

Siendo 6 el divisor, necesariamente $R < 6$. R no puede ser cero, porque si fuera cero, N sería divisible entre 6, lo cual es imposible porque N es primo; luego R tiene que ser 1, 2, 3, 4 o 5.

R no puede ser 2 porque tendríamos:

$$N = 6q + 2$$

y siendo estos dos sumandos divisibles entre 2, su suma N sería divisible entre 2 (**238**), lo cual es imposible porque N es primo.

R no puede ser 3 porque tendríamos:

$$N = 6q + 3$$

y siendo estos dos sumandos divisibles entre 3, su suma N sería divisible entre 3, lo cual es imposible porque N es primo.

R no puede ser 4 porque tendríamos:

$$N = 6q + 4$$

y siendo estos dos sumandos divisibles entre 2, N sería divisible entre 2, lo cual es imposible.

Luego, si R tiene que ser 1, 2, 3, 4 o 5 y no puede ser 2, 3 ni 4, necesariamente tiene que ser 1 o 5.

Si R es 1, tendremos:

$$N = 6q + 1 = \text{m. de } 6 + 1$$

Si R es 5, tendremos:

$$N = 6q + 5 = \text{m. de } 6 + 5 = \text{m. de } 6 + (6 - 1) = \text{m. de } 6 - 1$$

Luego, queda demostrado lo que nos proponíamos.

Ejemplos

$$11 = 12 - 1 = \text{m. de } 6 - 1$$

$$19 = 18 + 1 = \text{m. de } 6 + 1$$

299

TEOREMA

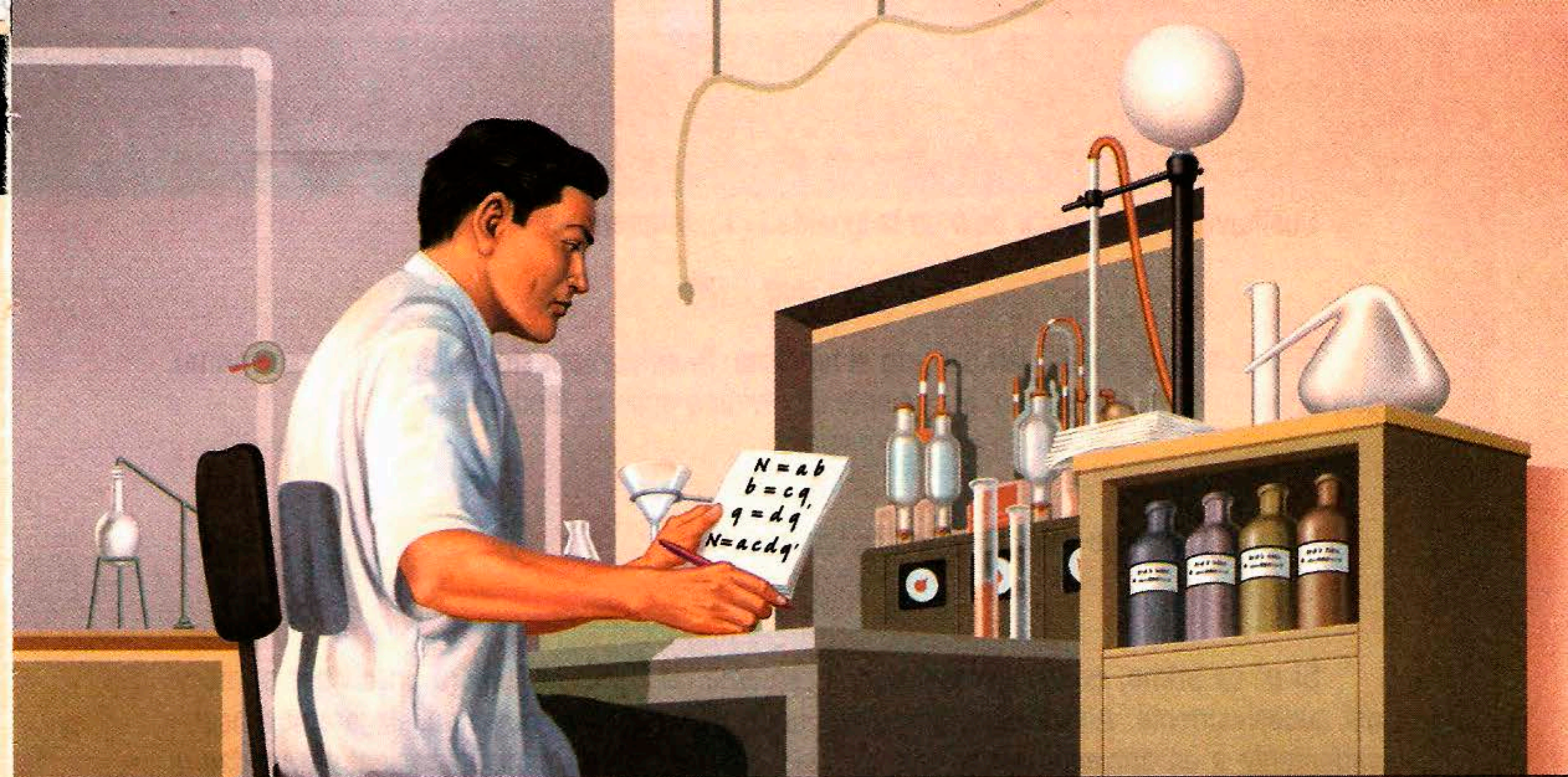
El producto de tres números enteros consecutivos es siempre divisible entre 6.

Sean los números enteros consecutivos n , $n + 1$ y $n + 2$ y P su producto. Tendremos:

$$n(n + 1)(n + 2) = P$$

De tres números enteros consecutivos, uno al menos necesariamente es par, y uno, necesariamente, es múltiplo de 3.

Si 2 divide por lo menos a uno de estos factores, dividirá a P , que es múltiplo de ese factor, y si 3 divide a uno de estos factores, dividirá a P , que es múltiplo de ese factor. Ahora bien, siendo P divisible entre 2 y 3, que son primos entre sí, será divisible entre 6, porque (**296**) si un número es divisible entre dos factores primos entre sí, es divisible entre su producto. Luego, P es divisible entre 6, que era lo que queríamos demostrar.



Con los trabajos de **Fermat (1601-1665)**, **Euler (1707-1783)** y **Gauss (1777-1855)** sobre la teoría de los números, se echaron las bases de la Aritmética moderna o superior. En 1850, **Tchebycheff** realizó un notable progreso sobre los números primos.

En 1932, el francés **Landau** completó el trabajo de aquél sobre la distribución de los números primos, demostrando lo que el inglés **Hardy** llamó **teorema de Tauber**.

Capítulo **XX**

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Descomponer un número en sus factores primos es convertirlo en un producto indicado de factores primos.

300

TEOREMA

301

Todo número compuesto es igual a un producto de factores primos.

Sea el número compuesto N . Vamos a demostrar que N es igual a un producto de factores primos.

En efecto: N tendrá por lo menos un divisor primo que llamaremos a , porque todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que la unidad (287).

Dividiendo N entre a nos dará un cociente exacto que llamaremos b , y como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tendremos:

$$N = ab \quad (1)$$

Si b fuera primo, el teorema estaría demostrado. Si b no es primo, tendrá por lo menos un divisor primo que llamaremos c , y llamando q al cociente de dividir b entre c , tendremos:

$$b = cq$$

Sustituyendo este valor de b en la igualdad (1), tendremos:

$$N = acq \quad (2)$$

Si q es primo, queda demostrado el teorema. Si es compuesto, tendrá un divisor primo que llamaremos d , y siendo q' el cociente de dividir q entre d , tendremos:

$$q = dq'$$

Sustituyendo este valor de q en (2), tendremos:

$$N = acdq'$$

Si q' es primo, queda demostrado el teorema. Si no lo es, tendrá un divisor primo y así sucesivamente. Ahora bien, como los cocientes van disminuyendo, llegaremos necesariamente a un cociente primo, que dividido entre sí mismo dará de cociente la unidad y entonces el número N será igual a un producto de factores primos; que era lo que queríamos demostrar.

302

REGLA PARA DESCOMPONER UN NÚMERO COMPUESTO EN SUS FACTORES PRIMOS

Se divide el número dado entre el menor de sus divisores primos; el cociente se divide también entre el menor de sus divisores primos y así sucesivamente con los demás cocientes, hasta hallar un cociente primo, que se dividirá entre sí mismo.

Ejemplos

- 1) Descomponer 204 en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$204 = 2^2 \times 3 \times 17 \quad \text{R.}$$

Los factores primos de 204 son 2, 3 y 17.

- 2) Descomponer 25,230 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 25,230 & 2 \\ 12,615 & 3 \\ 4,205 & 5 \\ 841 & 29 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

$$25,230 = 2 \times 3 \times 5 \times 29^2 \quad \text{R.}$$

Los divisores primos de 25,230 son 2, 3, 5 y 29.

OBSERVACIÓN

La experiencia nos dice que los alumnos, cuando están descomponiendo y se encuentran un número, como 841 en el ejemplo anterior, que no es divisible entre los números primos pequeños 2, 3, 5, 7 y 11, tienden a creer que es *primo*, con una gran probabilidad de equivocarse. Lo que hay que hacer en estos casos es aplicar la regla estudiada en el número 295 para averiguar si el número es primo o no.

83

Ejercicio

Descomponer en sus factores primos los números siguientes:

1. 64	11. 341	21. 2,401	31. 13,690
2. 91	12. 377	22. 2,093	32. 15,700
3. 96	13. 408	23. 2,890	33. 20,677
4. 121	14. 441	24. 3,249	34. 21,901
5. 160	15. 507	25. 3,703	35. 47,601
6. 169	16. 529	26. 3,887	36. 48,763
7. 182	17. 686	27. 5,753	37. 208,537
8. 289	18. 861	28. 5,887	38. 327,701
9. 306	19. 906	29. 9,410	39. 496,947
10. 385	20. 1,188	30. 12,740	

TEOREMA

303

Un número compuesto no puede descomponerse más que en un solo sistema de factores primos.

Sea el número N , que descompuesto en sus factores primos es igual a $abcd$. Supongamos que el mismo número N admitiera otra descomposición en factores primos y sea ésta $a'b'c'd'$. Vamos a demostrar que la primera descomposición $abcd$ es igual a la segunda $a'b'c'd'$.

En efecto. Tenemos:

$$N = abcd$$

$$N = a'b'c'd'$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

$$abcd = a'b'c'd'$$

Ahora bien: el factor primo a divide al producto $abcd$ por ser factor suyo, luego dividirá al producto $a'b'c'd'$, que es igual al anterior. Si a divide a este producto, tiene que dividir a uno de sus factores, porque hay un teorema que dice que todo número primo que divide a un producto de varios factores tiene que dividir por lo menos a uno de ellos, por ejemplo a a' , luego $a = a'$, porque para que un número primo divida a otro número primo es necesario que sean iguales. Por tanto, dividiendo el producto $abcd$ entre a , para lo cual basta suprimir este factor y el producto $a'b'c'd'$ entre a' , para lo cual bastará suprimir este factor, la igualdad subsistirá y tendremos:

$$bcd = b'c'd'$$

El factor primo b divide al producto bcd por ser uno de sus factores, luego dividirá a su igual $b'c'd'$; pero si b divide al producto $b'c'd'$, tiene que dividir a uno de sus factores, por

ejemplo, a b' , luego $b = b'$, por ser ambos números primos. Si dividimos el producto bcd entre b y el producto $b'c'd'$ entre b' , la igualdad subsistirá y tendremos:

$$cd = c'd'$$

El factor primo c divide al producto cd , luego dividirá a su igual $c'd'$, y si c divide a $c'd'$, dividirá a uno de sus factores, por ejemplo, a c' , luego $c = c'$. Dividiendo el producto cd entre c y el producto $c'd'$ entre c' , la igualdad subsistirá y tendremos:

$$d = d'$$

Por tanto, si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ y $d = d'$, o sea, si los factores de la primera descomposición son iguales a los de la segunda, ambas descomposiciones son iguales y no hay dos descomposiciones, sino una sola, que era lo que queríamos demostrar.

DIVISORES SIMPLES Y COMPUESTOS DE UN NÚMERO COMPUESTO

304

HALLAR CUÁNTOS DIVISORES SIMPLES Y COMPUESTOS TIENE UN NÚMERO COMPUESTO

REGLA

Para conocer cuántos divisores simples y compuestos ha de tener un número, se descompone en sus factores primos. Hecho esto, se escriben los exponentes de los factores primos teniendo en cuenta que si un factor no tiene exponente se considera que tiene de exponente la unidad; se suma a cada exponente la unidad y los números que resulten se multiplican entre sí. El producto indicará el número total de divisores.

Ejemplos

- 1) Sea el número 900. Para saber cuántos divisores simples y compuestos tiene, lo descompondremos en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

Escribiremos los exponentes 2, 2 y 2. A cada uno le sumamos la unidad y multiplicamos los números que resulten:

$$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) = 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ divisores}$$

entre simples o primos y compuestos tendrá el número 900.

- 2) Averiguar cuántos divisores tendrá el número 1,008.

$$\begin{array}{r|l}
 1,008 & 2 \\
 504 & 2 \\
 252 & 2 \\
 126 & 2 \\
 63 & 3 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$1,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$$

Tendrá:

$$(4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 5 \times 3 \times 2 = 30 \text{ divisores entre primos y compuestos.}$$

Ya sabemos hallar *cuántos* divisores tiene un número compuesto; ahora vamos a encontrar cuáles son esos divisores.

HALLAR TODOS LOS FACTORES SIMPLES Y COMPUESTOS DE UN NÚMERO

305

REGLA

Se descompone el número compuesto dado en sus factores primos. Hecho esto, se escriben en una línea la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo, y se pasa una raya. Se multiplica esta primera fila de divisores por las potencias del segundo factor primo y al terminar se pasa una raya. Se multiplican todos los divisores así hallados por las potencias del tercer factor primo y así sucesivamente hasta haber multiplicado por las potencias del último factor primo.

- 1) Hallar todos los divisores de 1,800.

$$\begin{array}{r|l}
 1,800 & 2 \\
 900 & 2 \\
 450 & 2 \\
 225 & 3 \\
 75 & 3 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$1,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\begin{array}{c|cc}
 2^3 & 2 & 2^2 & 2^3 \\
 3^2 & 3 & 3^2 & \\
 5^2 & 5 & 5^2 &
 \end{array}$$

Ahora escribimos en una línea la unidad y las potencias del primer factor primo que son $2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$; pasamos una raya y multiplicamos esos factores por 3; $3 \times 1 = 3, 3 \times 2 = 6, 3 \times 4 = 12, 3 \times 8 = 24$, y después esos mismos factores de la primera fila por $3^2 = 9$ obteniendo: $9 \times 1 = 9, 9 \times 2 = 18, 9 \times 4 = 36, 9 \times 8 = 72$, hecho esto pasamos otra raya y multiplicamos todos los divisores que hemos obtenido hasta ahora, primero por 5 y luego por $5^2 = 25$ y tendremos:

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360
25	50	100	200
75	150	300	600
225	450	900	1,800

Ejemplos

Aquí tenemos todos los divisores simples y compuestos de 1,800. Los simples o primos son 1, 2, 3 y 5 y todos los demás son compuestos.

El último divisor que se halle siempre tiene que ser igual al número dado.

- 2) Hallar todos los factores simples y compuestos de 15,925 hallando antes el número de divisores.

$$\begin{array}{r|l} 15,925 & 5 \\ 3,185 & 5 \\ 637 & 7 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$15,925 = 5^2 \times 7^2 \times 13$$

Tendrá $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$ div.

Hallando los divisores:

$$\begin{array}{r|l} 5^2 & 5 \quad 5^2 \\ 7^2 & 7 \quad 7^2 \\ 13 & 13 \end{array}$$

Tendremos:

7 por la 1ª fila
 $7^2 = 49$ por la 1ª fila
 13 por todos los anteriores.....

1	5	25
7	35	175
49	245	1,225
13	65	325
91	455	2,275
637	3,185	15,925

Contando los divisores obtenidos veremos que son 18, que es el número que hallamos antes.

84

Hallar todos los divisores simples y compuestos de los números siguientes, hallando primero el número de divisores:

Ejercicio

1. 54 R. 8 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.
2. 162 R. 10 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162.
3. 150 R. 12 fact.: 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 25, 50, 75, 150.
4. 1,029 R. 8 fact.: 1, 3, 7, 21, 49, 147, 343, 1,029.
5. 210 R. 16 fact.: 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210.
6. 315 R. 12 fact.: 1, 3, 9, 5, 15, 45, 7, 21, 63, 35, 105, 315.
7. 130 R. 8 fact.: 1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130.
8. 340 R. 12 fact.: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 17, 34, 68, 85, 170, 340.
9. 216 R. 16 fact.: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 27, 54, 108, 216.
10. 1,521 R. 9 fact.: 1, 3, 9, 13, 39, 117, 169, 507, 1,521.
11. 108 R. 12 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108.
12. 204 R. 12 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 17, 34, 68, 51, 102, 204.
13. 540 R. 24 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180, 135, 270, 540.

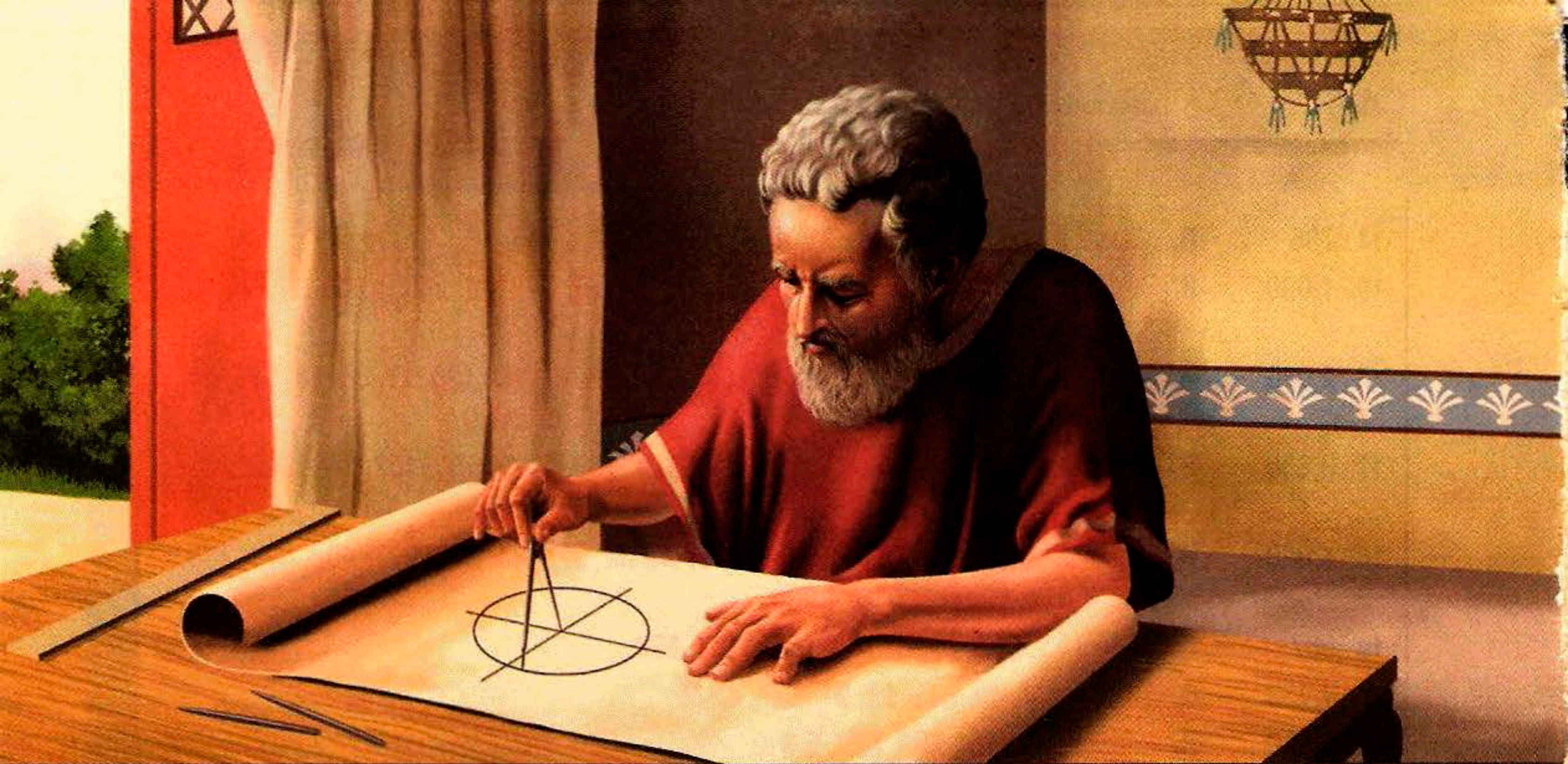
- | | |
|------------|---|
| 14. 735 | R. 12 fact.: 1, 3, 5, 15, 7, 21, 35, 105, 49, 147, 245, 735. |
| 15. 1,080 | R. 32 fact.: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 27, 54, 108, 216, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360, 135, 270, 540, 1,080. |
| 16. 2,040 | R. 32 fact.: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 17, 34, 68, 136, 51, 102, 204, 408, 85, 170, 340, 680, 255, 510, 1,020, 2,040. |
| 17. 3,366 | R. 24 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 11, 22, 33, 66, 99, 198, 17, 34, 51, 102, 153, 306, 187, 374, 561, 1,122, 1,683, 3,366. |
| 18. 4,020 | R. 24 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 67, 134, 268, 201, 402, 804, 335, 670, 1,340, 1,005, 2,010, 4,020. |
| 19. 567 | R. 10 fact.: 1, 3, 9, 27, 81, 7, 21, 63, 189, 567. |
| 20. 4,459 | R. 8 fact.: 1, 7, 49, 343, 13, 91, 637, 4,459. |
| 21. 5,819 | R. 6 fact.: 1, 11, 23, 253, 529, 5,819. |
| 22. 6,727 | R. 6 fact.: 1, 7, 31, 217, 961, 6,727. |
| 23. 3,159 | R. 12 fact.: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 13, 39, 117, 351, 1,053, 3,159. |
| 24. 5,929 | R. 9 fact.: 1, 7, 49, 11, 77, 539, 121, 847, 5,929. |
| 25. 5,915 | R. 12 fact.: 1, 5, 7, 35, 13, 65, 91, 455, 169, 845, 1,183, 5,915. |
| 26. 6,006 | R. 32 fact.: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462, 13, 26, 39, 78, 91, 182, 273, 546, 143, 286, 429, 858, 1,001, 2,002, 3,003, 6,006. |
| 27. 3,025 | R. 9 fact.: 1, 5, 25, 11, 55, 275, 121, 605, 3,025. |
| 28. 6,591 | R. 8 fact.: 1, 3, 13, 39, 169, 507, 2,197, 6,591. |
| 29. 9,702 | R. 36 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 7, 14, 21, 42, 63, 126, 49, 98, 147, 294, 441, 882, 11, 22, 33, 66, 99, 198, 77, 154, 231, 462, 693, 1,386, 539, 1,078, 1,617, 3,234, 4,851, 9,702. |
| 30. 14,161 | R. 9 fact.: 1, 7, 49, 17, 119, 833, 289, 2,023, 14,161. |

NÚMEROS PERFECTOS son los números que son iguales a la suma de todos sus factores, excepto el mismo número. 6, 28 y 496 son números perfectos.

306

NÚMEROS AMIGOS son dos números tales que cada uno de ellos es igual a la suma de los divisores del otro, como 220 y 284.

307



En el siglo IV a. C., **Euclides**, un genial griego, logró reunir los principales conocimientos matemáticos de su época. Todo lo relacionado con la Aritmética, lo expuso en los libros VII, VIII, IX y X de sus *Elementos*. Entre los curiosos datos aritméticos

que se encuentran en esa portentosa obra, aparece el método de resolución del máximo común divisor, que hoy llamamos de divisiones sucesivas.

Capítulo **XXI**

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

308 **MÁXIMO COMÚN DIVISOR** de dos o más números es el **mayor** número que los divide a todos exactamente.

Se designa por las iniciales *m. c. d.*

Ejemplos

- 1) 18 y 24 son divisibles entre 2, 3 y 6. ¿Hay algún número mayor que 6 que divida a 18 y a 24? No. Entonces, 6 es el m. c. d. de 18 y 24.
- 2) 60, 100 y 120 son divisibles entre 2, 4, 5, 10 y 20. No hay ningún número mayor que 20 que los divida a los tres. Entonces 20 es el m. c. d. de 60, 100 y 120.

309 M. C. D. POR INSPECCIÓN

Cuando los números son pequeños, puede hallarse muy fácilmente el m. c. d. por simple inspección.

Como el m. c. d. de varios números tiene que ser divisor del **menor** de ellos, procederemos así:

Nos fijamos en el número **menor** de los dados. Si éste divide a **todos** los demás, será el m. c. d. Si no, buscamos cuál es el **mayor** de los divisores del menor que los divide a todos y éste será el m. c. d. buscado.

- 1) Hallar el m. c. d. de 18, 12 y 6.

El número menor 6 divide a 18 y a 12 luego **6** es el m. c. d. de 18, 12 y 6. **R.**

- 2) Hallar el m. c. d. de 20, 90 y 70.

20 no divide a 70, 10 es el mayor divisor de 20 que divide a 90 y a 70. **10** es el m. c. d. de 20, 90 y 70. **R.**

- 3) Hallar el m. c. d. de 48, 72 y 84.

48 no divide a los demás. De los divisores de 48, 24 no divide a 84; 12 divide a 72 y a 84. **12** es el m. c. d. de 48, 72 y 84. **R.**

Hallar por simple inspección el m.c.d. de:

1. 15 y 30	R. 15	7. 24 y 32	R. 8	13. 16, 24 y 40	R. 8
2. 8 y 12	R. 4	8. 3, 6 y 9	R. 3	14. 22, 33 y 44	R. 11
3. 9 y 18	R. 9	9. 7, 14 y 21	R. 7	15. 20, 28, 36 y 40	R. 4
4. 20 y 16	R. 4	10. 18, 27 y 36	R. 9	16. 15, 20, 30 y 60	R. 5
5. 18 y 24	R. 6	11. 24, 36 y 72	R. 12	17. 28, 42, 56 y 70	R. 14
6. 21 y 28	R. 7	12. 30, 42 y 54	R. 6	18. 32, 48, 64 y 80	R. 16

MÉTODOS PARA HALLAR EL M. C. D.

Cuando no es fácil hallar el m. c. d. por inspección, éste puede hallarse por dos métodos:

- 1) por divisiones sucesivas. • 2) por descomposición en factores primos.

I. M. C. D. POR DIVISIONES SUCESIVAS

Se pueden considerar dos casos: a) que se trate de dos números; b) que se trate de más de dos números.

M. C. D. DE DOS NÚMEROS POR DIVISIONES SUCESIVAS

La regla para este caso se funda en el siguiente teorema.

TEOREMA

El m. c. d. del dividendo y el divisor de una división inexacta es igual al del divisor y el residuo.

En efecto: en los principios fundamentales de la divisibilidad demostramos que todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta divide al residuo (246) y que todo número que divide al divisor y al residuo de una división inexacta divide al dividendo (247). Por tanto, todo factor común del dividendo y el divisor será factor común del divisor y el

residuo; luego el m. c. d., que no es sino el mayor de estos factores comunes, será igual para el dividendo y el divisor que para el divisor y el residuo.

Ejemplo

En la división $80 \overline{) 350}^4$ el m. c. d. de 350 y 80 es 10 que también es el m. c. d. de 80 y 30.

312

REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL M. C. D. DE DOS NÚMEROS POR DIVISIONES SUCESIVAS

Se divide el mayor de los números dados entre el menor. Si la división es exacta, el menor es el m. c. d. Si la división es inexacta, se divide el divisor entre el primer residuo; el primer residuo entre el segundo, éste entre el tercero y así sucesivamente hasta obtener una división exacta. El último divisor será el m. c. d.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. d. de 150 y 25.

El m. c. d. de 150 y 25 es **25**. R.

	6
25	150
	0

2) Hallar el m. c. d. de 2,227 y 2,125.

El m. c. d. de 2,227 y 2,125 es **17**. R.

	5	1	20	1
17	85	102	2,125	2,227
	0	17	85	102

Si al hallar el m. c. d. encontramos *un residuo que sea primo y la división siguiente no es exacta*, no es necesario continuar la operación; podemos afirmar que el m. c. d. es 1 o sea que los números son primos entre sí.

Así, al hallar el m. c. d. de 1,471 y 462, tenemos:

	2	5	3
37	85	462	1,471
	11	37	85

Hemos encontrado el residuo primo 37 y la división siguiente no es exacta. Digo que el m. c. d. es 1. En efecto: el m. c. d. de 1,471 y 462 es el de 462 y 85 y éste es el de 85 y 37. Ahora bien, como 37 es primo, el m. c. d. de 85 y 37 sólo puede ser 37 o 1; 37 no lo es porque la división de 85 entre 37 no es exacta, luego tiene que ser 1, es decir que 1,471 y 462 son primos entre sí.

86

Hallar por divisiones sucesivas el m.c.d. de:

Ejercicio

1. 137 y 2,603

R. **137**

7. 111 y 518

R. **37**

2. 1,189 y 123,656

R. **1,189**

8. 212 y 1,431

R. **53**

3. 144 y 520

R. **8**

9. 948 y 1,975

R. **79**

4. 51 y 187

R. **17**

10. 1,164 y 3,686

R. **194**

5. 76 y 1,710

R. **38**

11. 303 y 1,313

R. **101**

6. 93 y 2,387

R. **31**

12. 19,578 y 47,190

R. **78**

13. 19,367 y 33,277	R. 107	17. 77,615 y 108,661	R. 15,523
14. 207,207 y 479,205	R. 207	18. 65,880 y 92,415	R. 915
15. 9,879 y 333,555	R. 111	19. 1,002,001 y 2,136,134	R. 11,011
16. 35,211 y 198,803	R. 121	20. 4,008,004 y 4,280,276	R. 4,004

TEOREMA

313

Todo divisor de dos números divide a su m. c. d.

Sea el número N que divide a A y B . Hallemos el m. c. d. de A y B llamando Q , Q' y Q'' a los cocientes, R y R' a los residuos:

	Q''	Q'	Q
R'	R	B	A
	0	R'	R

Vamos a demostrar que N divide a R' , que es el m. c. d. de A y B .

En efecto: si N divide a A y B , dividiendo y divisor de la primera división, dividirá al residuo R , porque hay un teorema que dice que todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta divide al residuo (246). En la segunda división de B entre R , N que divide al dividendo y al divisor, dividirá al residuo R' , que es el m. c. d. de A y B .

El m. c. d. de 80 y 60 es 20. Todos los divisores comunes de 80 y 60 como 2, 4, 5 y 10 dividen a 20.

Ejemplo

TEOREMA

314

Si dos números se multiplican, o dividen entre un mismo número, su m. c. d. queda multiplicado o dividido entre el mismo número.

Sean A y B los números. Hallemos su m. c. d.:

	Q''	Q'	Q
R'	R	B	A
	0	R'	R

Vamos a demostrar que si A y B se multiplican o dividen entre un mismo número n , R' , que es su m. c. d., también quedará multiplicado o dividido entre n .

En efecto: si A y B se multiplican o dividen entre n , el residuo R quedará multiplicado o dividido entre n , porque si el dividendo y el divisor de una división inexacta se multiplican o dividen entre un mismo número, el residuo queda multiplicado o dividido entre dicho número (188). En la segunda división, el dividendo B y el divisor R están multiplicados o divididos entre n , luego el residuo R' también quedará multiplicado o dividido entre n . Pero R' es el m. c. d. de A y B ; luego, queda demostrado lo que nos proponíamos.

El m. c. d. de 80 y 24 es 8. Si multiplicamos $80 \times 3 = 240$ y $24 \times 3 = 72$ y hallamos el m. c. d. de 240 y 72 encontraremos que es 24 o sea 8×3 .

Ejemplo

M. C. D. DE MÁS DE DOS NÚMEROS POR DIVISIONES SUCESIVAS

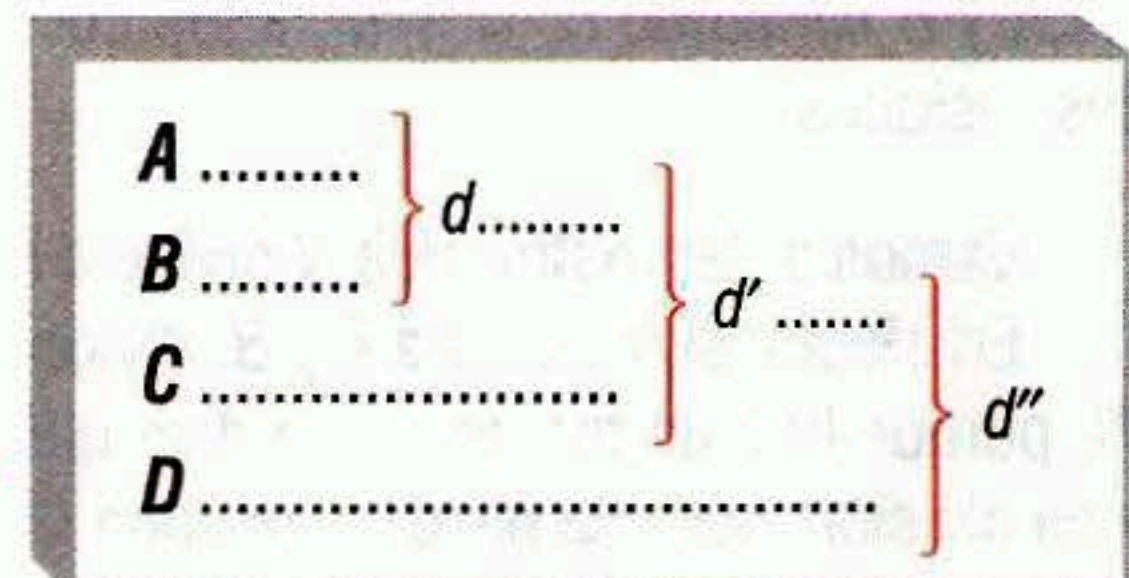
La regla para resolver este caso es la contenida en el siguiente teorema.

315

TEOREMA

Para hallar el m. c. d. de más de dos números por divisiones sucesivas se halla primero el de dos de ellos; después el de otro de los números dados y el m. c. d. hallado; después el de otro número y el segundo m. c. d., y así sucesivamente hasta el último número. El último m. c. d. es el m. c. d. de todos los números dados.

Sean los números A, B, C y D . Hallemos el m. c. d. de A y B y sea éste d ; hallemos el de d y C y sea éste d' ; hallemos el de d' y D y sea éste d'' . Vamos a demostrar que d'' es el m. c. d. de A, B, C y D .



En efecto: el m. c. d. de A, B, C y D divide a todos estos números, luego si divide a A y a B dividirá a su m. c. d., que es d , porque todo divisor de dos números divide a su m. c. d. (313); si divide a d , como también divide a C , por ser uno de los números dados dividirá al m. c. d. de d y C , que es d' , y si divide a d' , como también divide a D , dividirá al m. c. d. de d' y D , que es d'' ; luego d'' no puede ser menor que el m. c. d. de A, B, C y D , porque si fuera menor, éste no podría dividirlo.

Por otra parte, d'' divide a D y a d' por ser su m. c. d.; si divide a d' , dividirá a C y a d , que son múltiplos de d' , y si divide a d , dividirá a A y a B , que son múltiplos de d , luego d'' es divisor común de A, B, C y D ; pero no puede ser mayor que el m. c. d. de estos números porque éste, como su nombre lo indica, es el mayor divisor común de estos números.

Ahora bien: si d'' no es menor ni mayor que el m. c. d. de A, B, C y D , será igual a dicho m. c. d. Luego, d'' es el m. c. d. de A, B, C y D .

Ejemplo

Hallar el m. c. d. de 4,940; 4,420, 2,418 y 1,092 por divisiones sucesivas.

Conviene empezar por los dos números menores ya que se termina más rápidamente.

Hallemos el m. c. d. de 2,418 y 1,092: →

	2	1	4	2
78	156	234	1,092	2,418
	0	78	156	234

Ahora hallamos el m. c. d. de 4,420 y 78: →

	1	1	56
26	52	78	4,420
	0	26	520
			52

Ahora hallamos el m. c. d. de 4,940 y 26: \longrightarrow

	190
26	4,940
	234
	0

El m. c. d. de 4,940; 4,420; 2,418 y 1,092 es **26**. R.

OBSERVACIÓN

Al hallar el m. c. d. de varios números *si alguno de los números dados es múltiplo de otro puede prescindirse del mayor*.

Así, si queremos hallar el m. c. d. de 529, 1,058, 690 y 2,070, como 1,058 es múltiplo de 529 prescindimos de 1,058 y como 2,070 es múltiplo de 690 prescindimos de 2,070. Nos quedamos con 529 y 690 y hallamos el m. c. d. de estos números que es 23.

23 será el m. c. d. de 529, 1,058, 690 y 2,070.

Hallar por divisiones sucesivas el m.c.d. de:

- | | | | |
|-------------------------|--------|--|-----------|
| 1. 2,168; 7,336 y 9,184 | R. 8 | 10. 770; 990; 1,265 y 3,388 | R. 11 |
| 2. 425, 800 y 950 | R. 25 | 11. 1,240; 1,736; 2,852 y 3,131 | R. 31 |
| 3. 1,560; 2,400 y 5,400 | R. 120 | 12. 31,740; 47,610; 95,220 y 126,960 | R. 15,870 |
| 4. 78, 130 y 143 | R. 13 | 13. 45,150; 51,600; 78,045 y 108,489 | R. 129 |
| 5. 153, 357 y 187 | R. 17 | 14. 63,860; 66,340; 134,385 y 206,305 | R. 155 |
| 6. 236; 590 y 1,239 | R. 59 | 15. 500; 560; 725; 4,350 y 8,200 | R. 5 |
| 7. 465, 651 y 682 | R. 31 | 16. 432; 648; 756; 702 y 621 | R. 27 |
| 8. 136, 204, 221 y 272 | R. 17 | 17. 3,240; 5,400; 5,490; 6,300 y 7,110 | R. 90 |
| 9. 168, 252, 280 y 917 | R. 7 | 18. 486; 729; 891; 1,944 y 4,527 | R. 9 |

87

Ejercicio

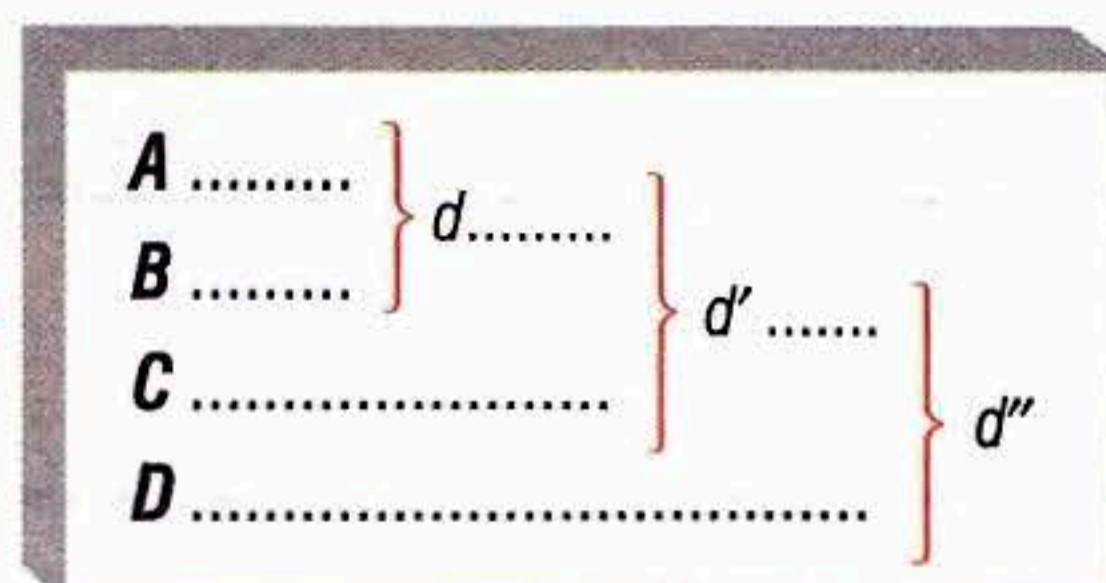
TEOREMA

316

Todo divisor de varios números divide a su m. c. d.

Sea el número N que divide a A , B , C y D . Vamos a demostrar que N divide al m. c. d. de A , B , C y D .

Hallémoslo: \longrightarrow



En efecto: como N divide a todos los números dados, dividirá a A y a B , y si divide a estos dos números dividirá a su m. c. d., que es d , porque todo divisor de dos números divide a su m. c. d. (313). Si N divide a d , como también divide a C , por ser uno de los números dados,

dividirá al m. c. d. de d y C , que es d' , y si divide a d' , como también divide a D , dividirá al m. c. d. de d' y D , que es d'' . Pero d'' es el m. c. d. de A, B, C y D ; luego, queda demostrado lo que nos proponíamos.

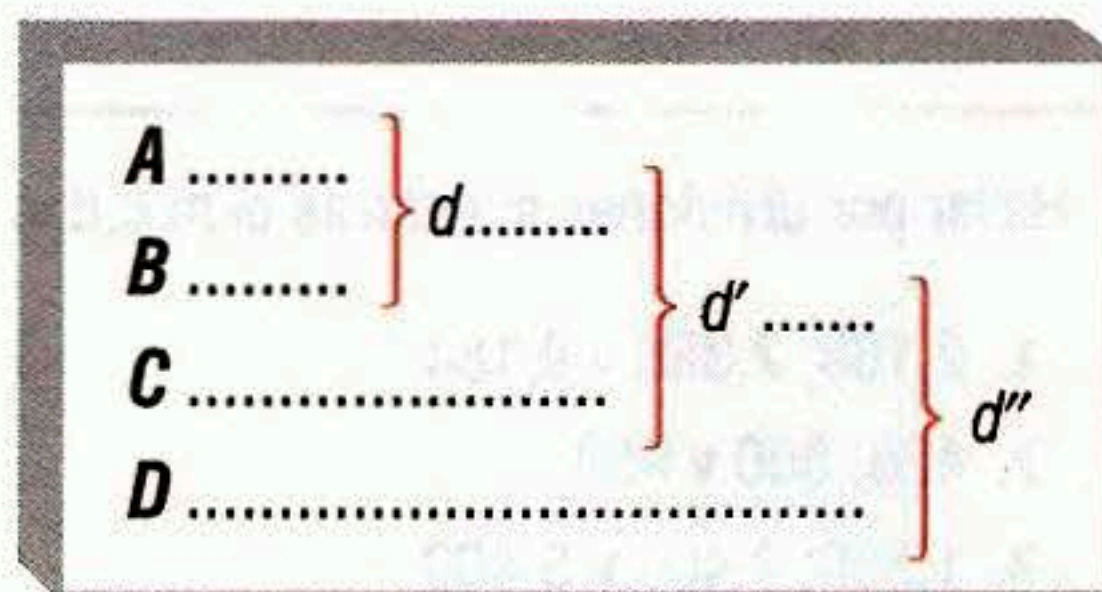
Ejemplo

El m. c. d. de 100, 150 y 75 es 25. El 5 que es divisor común de estos números divide también a 25.

317**TEOREMA**

Si más de dos números se multiplican o dividen entre un mismo número, su m. c. d. quedará multiplicado o dividido entre el mismo número:

Sean los números A, B, C y D . Hallemos su m. c. d.:



Vamos a demostrar que si A, B, C y D se multiplican o dividen entre un mismo número n , su m. c. d., que es d'' , también quedará multiplicado o dividido entre n .

En efecto: si A y B se multiplican o dividen entre n , su m. c. d. d también, quedará multiplicado o dividido entre n (314). Si d queda multiplicado o dividido entre n , como C también lo está, el m. c. d. de d y C , que es d' , también quedará multiplicado o dividido entre n , y si d' queda multiplicado o dividido entre n , como D también lo está, el m. c. d. de d' y D , que es d'' , también quedará multiplicado o dividido entre n . Pero d'' es el m. c. d. de A, B, C y D ; luego, queda demostrado lo que nos proponíamos.

Ejemplo

El m. c. d. de 36, 48 y 60 es 12.

Si dividimos $36 \div 6 = 6$, $48 \div 6 = 8$ y $60 \div 6 = 10$ y hallamos el m. c. d. de 6, 8 y 10 encontraremos que es 2 o sea $12 \div 6$.

318**TEOREMA**

Los cocientes que resultan de dividir dos o más números entre su m. c. d. son primos entre sí.

Sean los números A, B y C , cuyo m. c. d. es d . Al dividir estos números entre su m. c. d., que es d , también d quedará dividido entre sí mismo, porque si varios números se dividen entre

un mismo número su m. c. d. queda dividido entre dicho número (317). Pero $\frac{d}{d} = 1$; luego, 1 será el m. c. d. de los cocientes, o sea, que estos cocientes serán primos entre sí.

Dividiendo 30 y 45 entre su m. c. d. 15, los cocientes $30 \div 15 = 2$ y $45 \div 15 = 3$ son primos entre sí.

Ejemplo

1. Citar tres divisores comunes de los números 12, 24 y 48.
2. Decir, por inspección, cuál es el m. c. d. de 7 y 11; de 8, 9 y 10; de 25, 27 y 36.
3. Si 24 es el divisor y 8 el residuo de una división inexacta, ¿será 4 factor común del dividendo y el divisor? ¿Por qué?
4. Si 18 es el dividendo y 12 el divisor, ¿será 3 factor común del divisor y el residuo? ¿Por qué?
5. Siendo 7 divisor común de 35 y 140, ¿será divisor del m. c. d. de estos dos números? ¿Por qué?
6. ¿Será 11 divisor del m. c. d. de 33 y 45?
7. ¿Será 9 divisor del m. c. d. de 18, 36, 54 y 108? ¿Por qué?
8. 8 es el m. c. d. de 32 y 108. ¿Cuál será el m. c. d. de 64 y 216?
9. 9 es el m. c. d. de 18, 54 y 63. ¿Cuál será el m. c. d. de 6, 18 y 21? ¿Por qué?
10. ¿Pueden ser 4 y 6 los cocientes de dividir dos números entre su m. c. d.?

88

Ejercicio

II. M. C. D. POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

TEOREMA

El m. c. d. de varios números descompuestos en sus factores primos es el producto de sus factores primos comunes, afectados de su menor exponente.

Sean los números A , B y C , cuyo m. c. d. es D . Dividamos estos números entre el producto de sus factores primos comunes afectados de su menor exponente, que llamaremos P , y sean a , b y c los cocientes:

$$\frac{A}{P} = a, \quad \frac{B}{P} = b, \quad \frac{C}{P} = c$$

Es evidente que los cocientes a , b y c serán primos entre sí, porque al dividir los números dados entre P , que es el producto de los factores primos comunes con su menor exponente, los cocientes no tendrán más factor común que la unidad.

Ahora bien: al dividir los números A , B y C entre P , su m. c. d. D también ha quedado dividido entre P , porque si se dividen varios números entre otro, su m. c. d. queda dividido

319

entre dicho número (317); luego, el m. c. d. de los cocientes a , b y c será $\frac{D}{P}$; pero sabemos que el m. c. d. de estos cocientes es la unidad; luego, $\frac{D}{P} = 1$ y por tanto $D = P$, o sea que D , el m. c. d. de los números dados A , B y C , es igual a P , el producto de los factores primos comunes afectados de su menor exponente.

320

REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL M. C. D. DE VARIOS NÚMEROS POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Se descomponen los números dados en sus factores primos. El m. c. d. se forma con el producto de los factores primos comunes con su menor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. d. de 1,800; 420; 1,260 y 108.

$$\begin{array}{r|l} 1,800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1,260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$1,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$1,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

Para hallar el m. c. d. multiplicamos el 2 que es factor común por estar en las cuatro descomposiciones, afectado del exponente 2 que es el menor; por 3 que también está en las cuatro descomposiciones, afectado del exponente 1 que es el menor; los demás factores no se toman por no estar en todas las descomposiciones. Luego:

$$\text{m. c. d. de } 1,800; 420; 1,260 \text{ y } 108 = 2^2 \times 3 = 12 \quad \text{R.}$$

2) Hallar el m. c. d. de 170; 2,890; 204 y 5,100 por descomposición en factores. Como 2,890 es múltiplo de 170 porque $2,890 \div 170 = 17$ y como 5,100 es múltiplo de 204 porque $5,100 \div 204 = 25$ prescindimos de 2,890 y 5,100 y hallamos el m. c. d. de 170 y 204. Tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 170 & 2 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{m. c. d.} = 2 \times 17 = 34$$

34 es el m. c. d. de 170; 2,890; 204 y 5,100. R.

MÉTODO ABREVIADO

321

El m.c.d. de varios números por descomposición en factores primos puede hallarse con rapidez **dividiendo al mismo tiempo todos los números dados entre un factor común, los cocientes nuevamente entre un factor común y así sucesivamente hasta que los cocientes sean primos entre sí. El m. c. d. es el producto de los factores comunes.**

- 1) Hallar el m. c. d. de 208, 910 y 1,690 por el método abreviado.

208	910	1,690	2
104	455	845	13
8	35	65	

$$\text{m. c. d.} = 2 \times 13 = 26$$

208, 910 y 1,690 tenían el factor común 2. Los dividimos entre 2 y obtuvimos los cocientes 104, 455 y 845. Estos cocientes tenían el factor común 13, los dividimos entre 13 y obtuvimos los cocientes 8, 35 y 65 que no tienen ningún divisor común. El m. c. d. es $2 \times 13 = 26$. **R.**

- 2) Hallar el m. c. d. de 3,430; 2,450; 980 y 4,410 por el método abreviado.

3,430	2,450	980	4,410	10
343	245	98	441	7
49	35	14	63	7
7	5	2	9	

$$\text{m. c. d.} = 10 \times 7^2 = 490 \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Hallar por descomposición en factores primos (puede usarse el método abreviado) el m. c. d. de:

89

- | | | | |
|---------------------------------|---------------|--|-----------------|
| 1. 20 y 80 | R. 20 | 14. 840; 960; 7,260 y 9,135 | R. 15 |
| 2. 144 y 520 | R. 8 | 15. 3,174; 4,761; 9,522 y 12,696 | R. 1,587 |
| 3. 345 y 850 | R. 5 | 16. 171; 342; 513 y 684 | R. 171 |
| 4. 19,578 y 47,190 | R. 78 | 17. 500; 560; 725; 4,350 y 8,200 | R. 5 |
| 5. 33, 77 y 121 | R. 11 | 18. 850; 2,550; 4,250 y 12,750 | R. 850 |
| 6. 425, 800 y 950 | R. 25 | 19. 465; 744; 837 y 2,511 | R. 93 |
| 7. 2,168; 7,336 y 9,184 | R. 8 | 20. 600; 1,200; 1,800 y 4,800 | R. 600 |
| 8. 54, 76, 114 y 234 | R. 2 | 21. 57; 133; 532 y 1,824 | R. 19 |
| 9. 320, 450, 560 y 600 | R. 10 | 22. 2,645; 4,232; 4,761 y 5,819 | R. 529 |
| 10. 858; 2,288 y 3,575 | R. 143 | 23. 2,523; 5,046; 5,887 y 7,569 | R. 841 |
| 11. 464, 812 y 870 | R. 58 | 24. 961; 2,821; 2,418 y 10,571 | R. 31 |
| 12. 98, 294, 392 y 1,176 | R. 98 | 25. 2,738; 9,583; 15,059; 3,367 y 12,691 | R. 37 |
| 13. 1,560; 2,400; 5,400 y 6,600 | R. 120 | | |

Ejercicio

90

Ejercicio

- Hallar el m. c. d. de los siguientes grupos de números:
a) 540 y 1,050 b) 910; 490 y 560 c) 690; 5,290 y 920
hallando previamente todos los factores simples y compuestos de cada número.
R. a) 30 b) 70 c) 230
- ¿Se podrán dividir tres varillas de 20 cm, 24 cm y 30 cm en pedazos de 4 cm de longitud sin que sobre ni falte nada entre cada varilla?
- Se tienen tres varillas de 60 cm, 80 cm y 100 cm de longitud respectivamente. Se quieren dividir en pedazos de la misma longitud sin que sobre ni falte nada. Decir tres longitudes posibles para cada pedazo.
- Si quiero dividir cuatro varillas de 38, 46, 57 y 66 cm de longitud en pedazos de 9 cm de longitud, ¿cuántos cm habría que desperdiciar en cada varilla y cuántos pedazos obtendríamos de cada una?
- Un padre da a un hijo \$80, a otro \$75 y a otro \$60, para repartir entre los pobres, de modo que todos den a cada pobre la misma cantidad. ¿Cuál es la mayor cantidad que podrán dar a cada pobre y cuántos los pobres socorridos? **R. \$5; 43 pobres.**
- Dos cintas de 36 m y 48 m de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo? **R. 12 m**
- ¿Cuál será la mayor longitud de una medida con la que se puedan medir exactamente tres dimensiones de 140 metros, 560 metros y 800 metros? **R. 20 m**
- Se tienen tres cajas que contienen 1,600 libras, 2,000 libras y 3,392 libras de jabón respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos bloques hay en cada caja? **R. 16 lb; en la 1ª, 100; en la 2ª, 125; en la 3ª, 212.**
- Un hombre tiene tres rollos de billetes de banco. En uno tiene \$4,500, en otro \$5,240 y en el tercero \$6,500. Si todos los billetes son iguales y de la mayor denominación posible, ¿cuánto vale cada billete y cuántos billetes hay en cada rollo? **R. \$20; en el 1º, 225; en el 2º, 262; en el 3º, 325**
- Se quieren envasar 161 kg, 253 kg y 207 kg de plomo en tres cajas, de modo que los bloques de plomo de cada caja tengan el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo y cuántos caben en cada caja? **R. 23 kg; en la 1ª, 7; en la 2ª, 11; en la 3ª, 9**
- Una persona camina un número exacto de pasos andando 650 cm, 800 cm y 1,000 cm. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso? **R. 50 cm**
- ¿Cuál es la mayor longitud de una regla con la que se puede medir exactamente el largo y el ancho de una sala que tiene 850 cm de largo y 595 cm de ancho? **R. 85 cm**
- Compré cierto número de trajes por \$20,500. Vendí una parte por \$15,000, cobrando por cada traje lo mismo que me había costado. Hallar el mayor valor posible de cada traje y en ese supuesto, ¿cuántos trajes me quedan? **R. \$500; quedan 11**
- Se tienen tres extensiones de 3,675; 1,575 y 2,275 metros cuadrados de superficie respectivamente y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea el menor posible? **R. 175 m²**

HALLAR LOS DIVISORES COMUNES A DOS O MÁS NÚMEROS

322

Los divisores comunes de dos o más números son divisores del m. c. d. de estos números, porque todo divisor de dos o más números divide a su m. c. d. (**313** y **316**). Por tanto, para hallar los divisores comunes a dos o más números, hallaremos el m. c. d. de estos números y luego los factores simples y compuestos de este m. c. d., y estos factores serán los divisores comunes a los números dados.

Hallar los factores comunes a 180 y 252.

Hallemos el m. c. d. de estos números: →

	2	2	1
36	72	180	252
	0	36	72

Ahora hallamos los factores simples y compuestos de 36:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 36 = 2^2 \times 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 2^2 & 2 \\ 3^2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2^2 & 2 \\ 3^2 & 3 \end{array}$$

1	2	4
3	6	12
9	18	36

Los factores comunes a 180 y 252 son **1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36** R.

Ejemplo

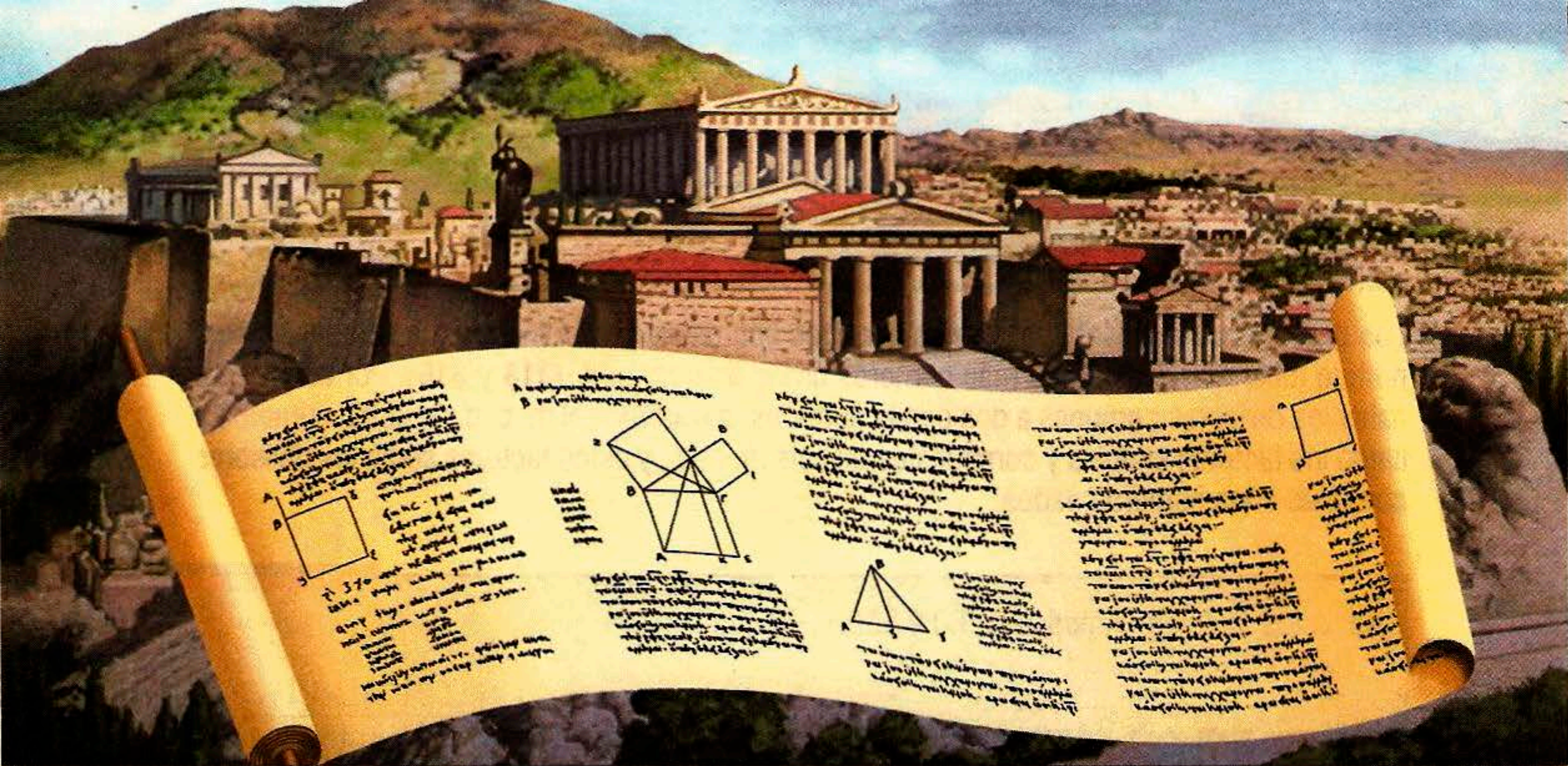
Hallar los factores comunes a:

- 18 y 72
- 40 y 200
- 48 y 72
- 60 y 210
- 90 y 225
- 147 y 245
- 320 y 800
- 315 y 525
- 450 y 1,500
- 56, 84 y 140
- 120, 300 y 360
- 204, 510 y 459
- 400, 500, 350 y 250
- 243; 1,215; 2,430 y 8,100

- R. 1, 2, 3, 6, 9 y 18
 R. 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40
 R. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48
 R. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30
 R. 1, 3, 5, 9, 15 y 45
 R. 1, 7 y 49
 R. 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80 y 160
 R. 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 y 105
 R. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75 y 150
 R. 1, 2, 4, 7, 14 y 28
 R. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60
 R. 1, 3, 17 y 51
 R. 1, 2, 5, 10, 25 y 50
 R. 1, 3, 9, 27 y 81

91

Ejercicio



No se olvidó Euclides, en sus *Elementos*, de ofrecer un método para la resolución del mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos números. Para resolver el m. c. m., Euclides propuso la siguiente regla: "El producto de dos números dividido entre el m. c. d.

de ambos números, da el mínimo común múltiplo". Como se verá, este procedimiento resultaba más complicado que el que utilizamos en la actualidad.

Capítulo **XXII**

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

323 **MÚLTIPLO COMÚN** de dos o más números es todo número que contiene exactamente a cada uno de ellos.

Así, 40 es múltiplo común de 20 y 8 porque 40 contiene a 20 dos veces y a 8 cinco veces exactamente.

90 es múltiplo común de 45, 18 y 15 porque $90 \div 45 = 2$, $90 \div 18 = 5$ y $90 \div 15 = 6$, sin que sobre residuo en ningún caso.

324 **MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO** de dos o más números es el **menor** número que contiene un número exacto de veces a cada uno de ellos. Se designa por las iniciales **m. c. m.**

Ejemplos

1) 36 contiene exactamente a 9 y a 6; 18 también contiene exactamente a 9 y a 6.

¿Hay algún número menor que 18 que contenga exactamente a 9 y a 6? No. Entonces 18 es el m. c. m. de 9 y 6.

2) 60 es divisible entre 2, 3 y 4; 48, 24 y 12 también. Como no hay ningún número menor que 12 que sea divisible entre 2, 3 y 4 tendremos que 12 es el m. c. m. de 2, 3 y 4.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO POR INSPECCIÓN

325

La teoría del m. c. m. es de gran importancia por sus numerosas aplicaciones.

Cuando se trata de hallar el m. c. m. de números pequeños éste puede hallarse muy fácilmente por simple inspección, de este modo:

Como el m. c. m. de varios números tiene que ser múltiplo del **mayor** de ellos, **se mira a ver si el mayor de los números dados contiene exactamente a los demás. Si es así, el mayor es el m. c. m. Si no los contiene, se busca cuál es el menor múltiplo del número mayor que los contenga exactamente y éste será el m. c. m. buscado.**

1) Hallar el m. c. m. de 8 y 4.

Como el mayor 8 contiene exactamente a 4, **8** es el m. c. m. de 8 y 4. **R.**

2) Hallar el m. c. m. de 8, 6 y 4.

8 contiene exactamente a 4 pero no a 6. De los múltiplos de 8, $8 \times 2 = 16$ no contiene exactamente a 6, $8 \times 3 = 24$ contiene exactamente a 6 y 4. **24** es el m. c. m. de 8, 6 y 4. **R.**

3) Hallar el m. c. m. de 10, 12 y 15.

15 no contiene a los demás; $15 \times 2 = 30$ no contiene a 12; $15 \times 3 = 45$ tampoco; $15 \times 4 = 60$ contiene cinco veces a 12 y 6 veces a 10. **60** es el m. c. m. de 10, 12 y 15. **R.**

Ejemplos

Decir, por simple inspección, cuál es el m. c. m. de:

1. 7 y 14	R. 14	16. 30, 15 y 60	R. 60
2. 9 y 18	R. 18	17. 121, 605 y 1,210	R. 1,210
3. 3, 6 y 12	R. 12	18. 2, 6 y 9	R. 18
4. 5, 10 y 20	R. 20	19. 5, 10 y 15	R. 30
5. 4, 8, 16 y 32	R. 32	20. 3, 5 y 6	R. 30
6. 10, 20, 40 y 80	R. 80	21. 2, 3 y 9	R. 18
7. 2, 6, 18 y 36	R. 36	22. 2, 3, 4 y 6	R. 12
8. 3, 15, 75 y 375	R. 375	23. 2, 3, 5 y 6	R. 30
9. 4 y 6	R. 12	24. 3, 4, 10 y 15	R. 60
10. 8 y 10	R. 40	25. 4, 5, 8 y 20	R. 40
11. 9 y 15	R. 45	26. 2, 5, 10 y 25	R. 50
12. 14 y 21	R. 42	27. 4, 10, 15, 20 y 30	R. 60
13. 12 y 15	R. 60	28. 5, 10, 15, 30 y 45	R. 90
14. 16 y 24	R. 48	29. 2, 4, 10, 20, 25 y 30	R. 300
15. 21 y 28	R. 84	30. 7, 14, 21, 35 y 70	R. 210

92

Ejercicio

MÉTODOS PARA HALLAR EL M. C. M.

326

Cuando no es fácil hallar el m. c. m. por simple inspección por no ser pequeños los números, éste puede ser hallado por dos métodos:

1) por el m. c. d.

2) por descomposición en factores primos.

I. M. C. M. POR EL M. C. D.

Se pueden considerar dos casos: a) Que se trate de dos números. b) Que se trate de más de dos números.

M. C. M. DE DOS NÚMEROS ENTRE EL M. C. D.

La regla para este caso se funda en el siguiente teorema.

327**TEOREMA**

El m.c.m. de dos números es igual a su producto dividido entre su m. c. d.

En efecto: el producto de los dos números dados será múltiplo común de ambos, pues contendrá a cada factor tantas veces como unidades tenga el otro. Si dividimos este producto entre un factor común a los dos números dados, el cociente seguirá siendo múltiplo común de los dos números dados, aunque menor que el anterior; luego, si dividimos el producto entre el mayor factor común de los dos números dados, que es su m. c. d., el cociente será también múltiplo común de los dos y el menor posible.

328**REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL M. C. M. DE DOS NÚMEROS POR EL M. C. D.**

Se multiplican los números dados y se divide este producto entre el m. c. d. de ambos. El cociente será el m. c. m.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de 84 y 120 entre el m. c. d.

Hallemos el m. c. d.:

	3	2	1
12	36	84	120
	0	12	36

m. c. d. = 12

El m. c. m. será: $\frac{120 \times 84}{12} = 120 \times 7 = \mathbf{840}$ **R.**

Obsérvese que para dividir el producto 120×84 entre 12 basta dividir uno de los factores, por ejemplo el 84, entre 12.

2) Hallar el m. c. m. de 238 y 340.

Hallemos el m. c. d.:

	3	2	1
34	102	238	340
	0	34	102

m. c. d. = 34

El m. c. m. de 238 y 340 será: $\frac{238 \times 340}{34} = 238 \times 10 = \mathbf{2,380}$ **R.**

CASO ESPECIAL

329

Si los dos números dados son primos entre sí, el m. c. m. es su producto, porque siendo su m. c. d. la unidad, al dividir su producto entre 1 queda igual.

Así, el m. c. m. de 15 y 16, que son primos entre sí, será $15 \times 16 = 240$. R.

El m. c. m. de 123 y 143 será $123 \times 143 = 17,589$. R.

Hallar, por medio del m. c. d., el m. c. m. de:

93

Ejercicio

- | | | | |
|--------------|-----------|---------------------|---------------|
| 1. 8 y 9 | R. 72 | 13. 80 y 120 | R. 240 |
| 2. 36 y 37 | R. 1,332 | 14. 96 y 108 | R. 864 |
| 3. 96 y 97 | R. 9,312 | 15. 104 y 200 | R. 2,600 |
| 4. 101 y 102 | R. 10,302 | 16. 125 y 360 | R. 9,000 |
| 5. 14 y 21 | R. 42 | 17. 124 y 160 | R. 4,960 |
| 6. 15 y 45 | R. 45 | 18. 140 y 343 | R. 6,860 |
| 7. 45 y 90 | R. 90 | 19. 254 y 360 | R. 45,720 |
| 8. 105 y 210 | R. 210 | 20. 320 y 848 | R. 16,960 |
| 9. 109 y 327 | R. 327 | 21. 930 y 3,100 | R. 9,300 |
| 10. 12 y 40 | R. 120 | 22. 7,856 y 9,293 | R. 73,005,808 |
| 11. 16 y 30 | R. 240 | 23. 9,504 y 14,688 | R. 161,568 |
| 12. 12 y 44 | R. 132 | 24. 10,108 y 15,162 | R. 30,324 |
25. El m. c. d. de dos números es 2 y el m. c. m. 16. Hallar el producto de los dos números. R. 32
26. El m. c. d. de dos números es 115 y el m. c. m. 230. ¿Cuál es el producto de los dos números? R. 26,450
27. El m. c. m. de dos números es 450 y el m. c. d. 3. Si uno de los números es 18, ¿cuál es el otro? R. 75
28. El m. c. m. de dos números primos entre sí es 240. Si uno de los números es 15, ¿cuál es el otro? R. 16

M. C. M. DE MÁS DE DOS NÚMEROS ENTRE EL M. C. D.

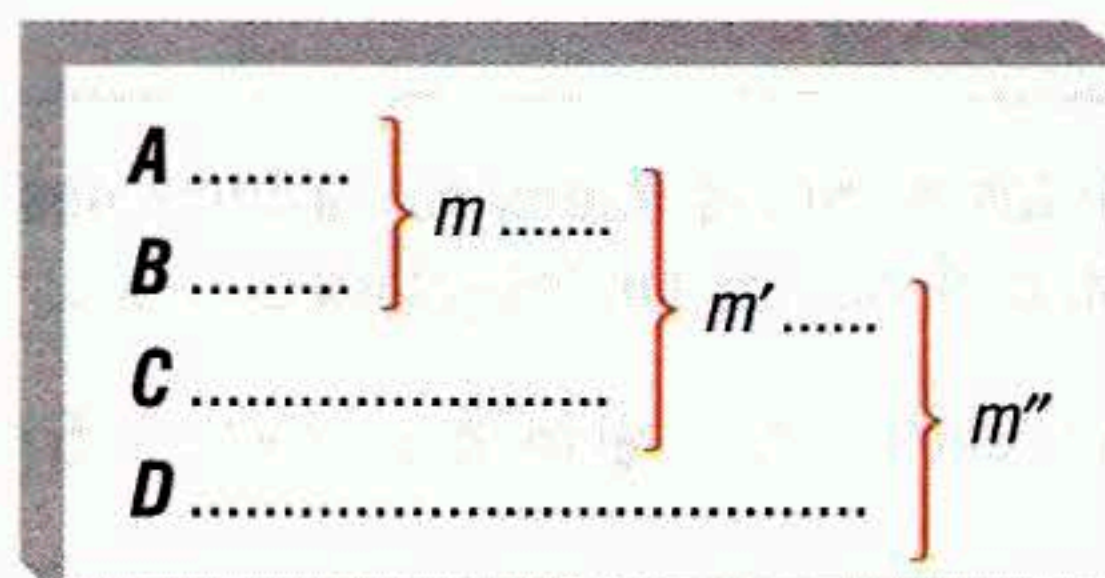
La regla para este caso se funda en el siguiente teorema.

TEOREMA

330

El m. c. m. de varios números no se altera porque se sustituyan dos de ellos por su m. c. m.

Sean los números A, B, C y D . Hallemos el m. c. m. de A y B y sea éste m ; hallemos el de m y C y sea éste m' ; hallemos el de m' y D y sea éste m'' . Vamos a demostrar que m'' es el m. c. m. de A, B, C y D .



En efecto: todo múltiplo común de A , B , C y D , por serlo en particular de A y B , será múltiplo de su m. c. m. m , porque todo múltiplo de dos números es múltiplo de su m. c. m. Por otra parte, todo múltiplo común de m , C y D , por serlo en particular de m , lo será de sus divisores A y B , luego será múltiplo común de A , B , C y D . Por tanto, A , B , C y D tienen los mismos múltiplos comunes que m , C y D ; luego el m. c. m., que no es sino el menor de estos múltiplos comunes, será el mismo para A , B , C y D que para m , C y D .

Según esto, podemos sustituir A y B por su m. c. m., que es m ; m y C los podemos sustituir por su m. c. m., que es m' , quedando solamente m' y D . El m. c. m. de m' y D , que es m'' , será el m. c. m. de A , B , C y D .

331

REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL M. C. M. DE MÁS DE DOS NÚMEROS ENTRE EL M. C. D.

Se halla primero el m. c. m. de dos de ellos, luego el de otro de los números dados y el m. c. m. hallado, después el de otro de los números dados y el segundo m. c. m. hallado y así sucesivamente hasta el último número. El último m. c. m. será el m. c. m. de todos los números dados.

Si alguno de los números dados es divisor de otro, puede suprimirse al hallar el m. c. m. La operación con los restantes se debe empezar por los mayores, ya que se termina más rápido.

Ejemplos

Hallar el m. c. m. de 400, 360, 180, 54 y 18.

Como 18 es divisor de 54 y 180 de 360, prescindimos de ambos y nos quedamos con 400, 360 y 54.

Hallemos el m. c. m. de 400 y 360:

$$\frac{400 \times 360}{40} = 10 \times 360 = 3,600$$

	9	1
40	360	400
	0	40

m. c. d. = 40

Hallemos el m. c. m. de 3,600 y 54:

$$\frac{3,600 \times 54}{18} = 3,600 \times 3 = 10,800$$

	2	1	66
18	36	54	3,600
	0	18	360
			36

m. c. d. = 18

10,800 es el m.c.m. de 400, 360, 180, 54 y 18. **R.**

332

CASO ESPECIAL

Si los números dados son primos dos a dos, el m. c. m. es su producto, porque 1 es el m. c. d. de dos cualesquiera de ellos.

Así, por ejemplo, el m. c. m. de 2, 3, 5 y 17 será:

$$2 \times 3 \times 5 \times 17 = \mathbf{510} \quad \mathbf{R.}$$

Hallar, por medio del m.c.d., el m.c.m. de:

1. 2, 3 y 11	R. 66	12. 9, 12, 16 y 25	R. 3,600
2. 7, 8, 9 y 13	R. 6,552	13. 16, 84 y 114	R. 6,384
3. 15, 25 y 75	R. 75	14. 110, 115 y 540	R. 136,620
4. 2, 4, 8 y 16	R. 16	15. 210, 360 y 548	R. 345,240
5. 5, 10, 40 y 80	R. 80	16. 100; 500; 2,100 y 3,000	R. 21,000
6. 7, 14, 28 y 56	R. 56	17. 56, 72, 124 y 360	R. 78,120
7. 15, 30, 45 y 60	R. 180	18. 105, 306, 405 y 504	R. 385,560
8. 3, 5, 15, 21 y 42	R. 210	19. 13, 91, 104 y 143	R. 8,008
9. 100, 300, 800 y 900	R. 7,200	20. 58, 85, 121, 145 y 154	R. 4,175,710
10. 15, 30, 60 y 180	R. 180	21. 108; 216; 306; 2,040 y 4,080	R. 36,720
11. 8, 10, 15 y 32	R. 480	22. 33, 49, 165, 245 y 343	R. 56,595

II. M. C. M. POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

TEOREMA

333

El m. c. m. de varios números descompuestos en sus factores primos es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

Sean los números A , B y C que descompuestos en sus factores primos equivalen:

$$\begin{aligned} A &= 2^3 \times 3^3 \times 5 \\ B &= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \\ C &= 2 \times 3^2 \times 11 \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que el m. c. m. de A , B y C será $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$. Para demostrar que $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ es el m. c. m. tenemos que demostrar dos cosas: **1)** que es común múltiplo de A , B y C ; **2)** que es el menor común múltiplo de estos números.

En efecto: el producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ es **común múltiplo** de A , B y C porque contiene todos los factores primos de estos números con iguales o mayores exponentes, y es el **menor múltiplo común** de A , B y C porque cualquier otro producto menor habría de tener o algún factor primo de menos, en cuyo caso no sería múltiplo del número que contuviera a ese factor; por ejemplo, el producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ será menor que $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, pero no será múltiplo de C porque no contiene el factor primo 11 que se halla en la descomposición de C ; o teniendo los mismos factores primos, alguno estaría elevado a un exponente menor, en cuyo caso no sería múltiplo del número que contuviera ese factor elevado a un exponente mayor; por ejemplo, $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ no sería múltiplo de B porque el factor primo 2 está elevado en este producto a la tercera potencia, y en el número B está a la cuarta potencia. Luego, si ningún otro número menor que el producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ puede ser común múltiplo de A , B y C , el producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ es el m. c. m. de los números dados.

334

REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL M. C. M. DE VARIOS NÚMEROS POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Se descomponen los números en sus factores primos y el m. c. m. se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de 50, 80, 120 y 300.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$50 = 2 \times 5^2$$

$$80 = 2^4 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

El m. c. m. estará formado por el factor primo 2 elevado a su mayor exponente que es 4, multiplicado por el factor primo 5 elevado a su mayor exponente que es 2, multiplicado por el factor primo 3, elevado a su mayor exponente que es 1. Luego

$$\text{m. c. m. de } 50, 80, 120 \text{ y } 300 = 2^4 \times 5^2 \times 3 = \mathbf{1,200} \quad \text{R.}$$

2) Hallar el m. c. m. de 24, 48, 56 y 168.

Como el 24 es divisor de 48 y 56 de 168, prescindimos de 24 y 56 y hallaremos solamente el m. c. m. de 48 y 168, porque todo múltiplo común de estos números será múltiplo de sus divisores 24 y 56:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

$$\text{m. c. m.} = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$$

336 será el m. c. m. de 24, 48, 56 y 168. **R.**

335

MÉTODO ABREVIADO

El m. c. m. por descomposición en factores se puede hallar más rápidamente de este modo:

Se divide cada uno de los números dados entre su menor divisor; lo propio se hace con los cocientes hasta obtener que todos los cocientes sean 1. El m. c. m. es el producto de todos los divisores primos.

- 1) Hallar el m. c. m. de 30, 60 y 190 por el método abreviado. Prescindimos de 30 divisor de 60 y tenemos:

60	190	2
30	95	2
15	95	3
5	95	5
1	19	19
	1	

$$\text{m. c. m.} = 2^2 \times 3 \times 5 \times 19 \\ = 1,140 \text{ R.}$$

El número que no es divisible entre un factor primo se repite debajo como se ha hecho dos veces con 95.

- 2) Hallar el m. c. m. de 360, 480, 500 y 600 por el método abreviado.

360	480	500	600	2
180	240	250	300	2
90	120	125	150	2
45	60	125	75	2
45	30	125	75	2
45	15	125	75	3
15	5	125	25	3
5	5	125	25	5
1	1	25	5	5
		5	1	5
		1		

$$\text{m. c. m.} = 2^5 \times 3^2 \times 5^3 \\ = 32 \times 9 \times 125 \\ = 36,000 \text{ R.}$$

Ejemplos

Hallar por descomposición en factores primos (puede emplearse el método abreviado), el m. c. m. de:

- | | | | |
|--------------------------|----------|---|------------|
| 1. 32 y 80 | R. 160 | 12. 96, 102, 192 y 306 | R. 9,792 |
| 2. 46 y 69 | R. 138 | 13. 108, 216, 432 y 500 | R. 54,000 |
| 3. 18, 24 y 40 | R. 360 | 14. 21, 39, 60 y 200 | R. 54,600 |
| 4. 32, 48 y 108 | R. 864 | 15. 81, 100, 300, 350 y 400 | R. 226,800 |
| 5. 5, 7, 10 y 14 | R. 70 | 16. 98; 490; 2,401 y 4,900 | R. 240,100 |
| 6. 2, 3, 6, 12 y 50 | R. 300 | 17. 91; 845; 1,690 y 2,197 | R. 153,790 |
| 7. 100, 500, 700 y 1,000 | R. 7,000 | 18. 529; 1,058; 1,587 y 5,290 | R. 15,870 |
| 8. 14, 38, 56 y 114 | R. 3,192 | 19. 841; 1,682; 2,523 y 5,887 | R. 35,322 |
| 9. 13, 19, 39 y 342 | R. 4,446 | 20. 5,476; 6,845; 13,690; 16,428 y 20,535 | R. 82,140 |
| 10. 15, 16, 48 y 150 | R. 1,200 | | |
| 11. 14, 28, 30 y 120 | R. 840 | | |

95

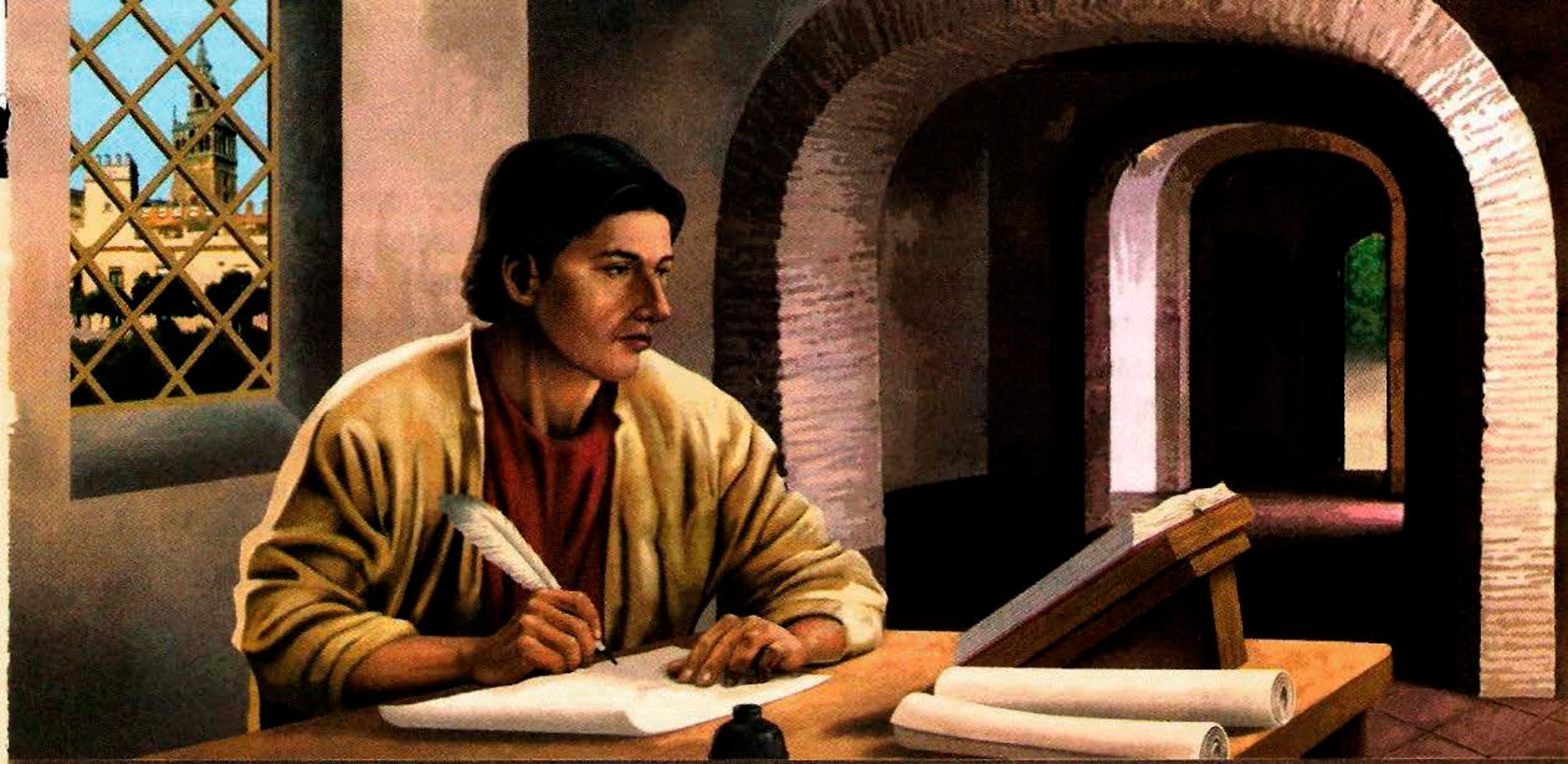
Ejercicio

- Con \$10, ¿podré comprar un número exacto de lápices de \$3 y de \$5?
- Con \$30, ¿podré comprar un número exacto de lápices de \$3, \$5 y \$6 cada uno? ¿Cuántos de cada precio?
- ¿Con qué cantidad, menor que \$40, podré comprar un número exacto de manzanas de \$4, \$6 y \$9 cada una?

96

Ejercicio

4. ¿Se pueden tener 50¢ en monedas de cinco, diez y veinte centavos?
5. ¿Cuál es la menor suma de dinero que se puede tener en monedas de cinco, diez y veinte centavos?
6. ¿Cuál es la menor suma de dinero que se puede tener en billetes de \$20, de \$50 o de \$200 y cuántos billetes de cada denominación harían falta en cada caso?
7. Hallar la menor distancia que se puede medir exactamente con una regla de 2, de 5 o de 8 pies de largo. **R. 40 p.**
8. ¿Cuál es la menor suma de dinero con que se puede comprar un número exacto de libros de \$30, \$40, \$50 u \$80 cada uno y cuántos libros de cada precio podría comprar con esa suma?
R. \$1,200; 40 de \$30, 30 de \$40, 24 de \$50 y 15 de \$80
9. Para comprar un número exacto de docenas de pelotas de \$8 la docena o un número exacto de docenas de lápices a \$6 la docena, ¿cuál es la menor suma de dinero necesaria? **R. \$24**
10. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que necesito para comprar un número exacto de trajes de \$300, \$450 o \$500 cada uno si quiero que en cada caso me sobren \$250? **R. \$4,750**
11. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de tres llaves que vierten: la 1ª, 12 litros por minuto; la 2ª, 18 litros por minuto y la 3ª, 20 litros por minuto? **R. 180 litros.**
12. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de segundos por cualquiera de tres llaves que vierten: la 1ª, 2 litros por segundo; la 2ª, 30 litros en 2 segundos y la 3ª, 48 litros en 3 segundos? **R. 240 litros.**
13. Hallar la menor capacidad posible de un depósito que se puede llenar en un número exacto de minutos abriendo simultáneamente tres llaves que vierten: la 1ª, 10 litros por minuto; la 2ª, 12 litros por minuto y la 3ª, 30 litros por minuto, y cuántos minutos tardaría en llenarse.
R. 52 litros; 1 min.
14. ¿Cuál será la menor longitud de una varilla que se puede dividir en pedazos de 8 cm, 9 cm o 15 cm de longitud sin que sobre ni falte nada y cuántos pedazos de cada longitud se podrían sacar de esa varilla? **R. 360 cm; 45 de 8, 40 de 9 y 24 de 15**
15. Hallar el menor número de bombones necesario para repartir entre tres clases de 20 alumnos, 25 alumnos o 30 alumnos, de modo que cada alumno reciba un número exacto de bombones y cuántos bombones recibirá cada alumno de la 1ª, de la 2ª o de la 3ª clase.
R. 300 bomb.; de la 1ª, 15; de la 2ª, 12; de la 3ª, 10
16. Tres galgos arrancan juntos en una carrera en que la pista es circular. Si el primero tarda 10 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo 11 segundos y el tercero 12 segundos, ¿al cabo de cuántos segundos pasarán juntos por la línea de salida y cuántas vueltas habrá dado cada uno en ese tiempo? **R. 660 s u 11 min; el 1º, 66; el 2º, 60; el 3º, 55**
17. Tres aviones salen de una misma ciudad, el 1º cada 8 días, el 2º cada 10 días y el 3º cada 20 días. Si salen juntos de ese aeropuerto el día 2 de enero, ¿cuáles serán las dos fechas más próximas en que volverán a salir juntos? (el año no es bisiesto). **R. 11 de febrero y 23 de marzo.**



El origen de las fracciones comunes o quebrados es muy remoto. Los babilonios, egipcios y griegos han dejado pruebas de que conocían las fracciones. Cuando **Juan de Luna** tradujo al latín, en el siglo XII, la *Aritmética* de **Al-Juarizmi**, empleó

fractio para traducir la palabra árabe *al-kasr*, que significa quebrar, romper. Este uso se generalizó junto con la forma *ruptus*, que prefería **Leonardo de Pisa**.

Capítulo **XXIII**

NÚMEROS FRACCIONARIOS. PROPIEDADES GENERALES

AMPLIACIÓN DEL CAMPO DE LOS NÚMEROS. NÚMEROS FRACCIONARIOS

336

Hemos visto (12) que las cantidades **discontinuas** o pluralidades, como las manzanas de un cesto, están constituidas por elementos naturalmente separados unos de otros, mientras que las cantidades **continuas**, como la longitud de una sala, constituyen un todo cuyos elementos no están naturalmente separados entre sí.

La medición de las cantidades continuas y las divisiones inexactas han hecho que se amplíe el campo de los números con la introducción de los **números fraccionarios**.

MEDIDA DE CANTIDADES CONTINUAS. UNIDAD PRINCIPAL Y UNIDADES SECUNDARIAS

337

Para medir una cantidad continua, por ejemplo la longitud del segmento AB (Fig. 34), se elige una longitud cualquiera, por ejemplo, la longitud del segmento CD como unidad de medida, y ésta es la **unidad principal**.

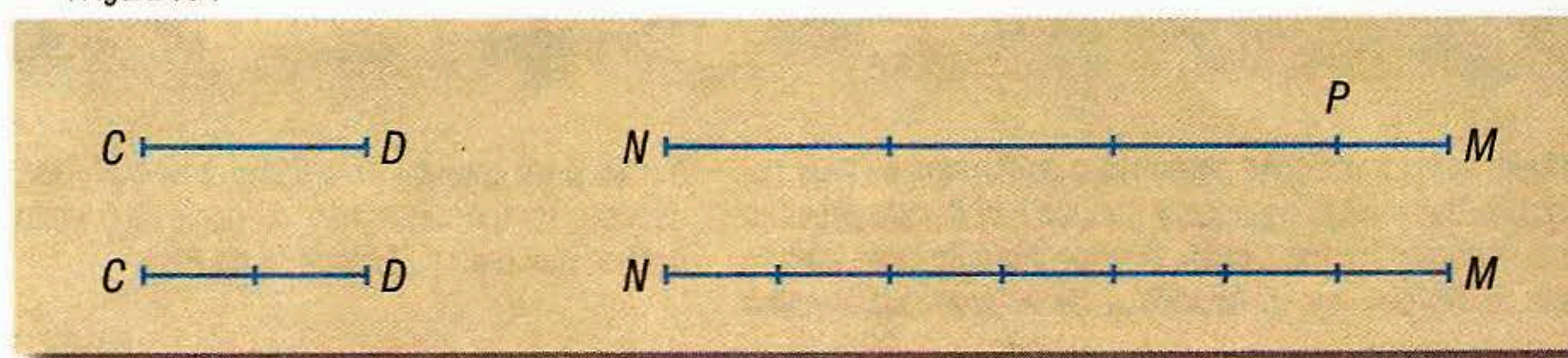
Figura 34



Para realizar la medida transportamos el segmento unidad CD consecutivamente sobre el segmento AB a partir de uno de sus extremos y encontramos que el segmento AB contiene tres veces exactamente al segmento CD , o sea, que la medida del segmento AB es 3 veces la unidad principal o segmento CD . Pero no siempre sucede que la unidad principal esté contenida un número exacto de veces en la cantidad que se mide.

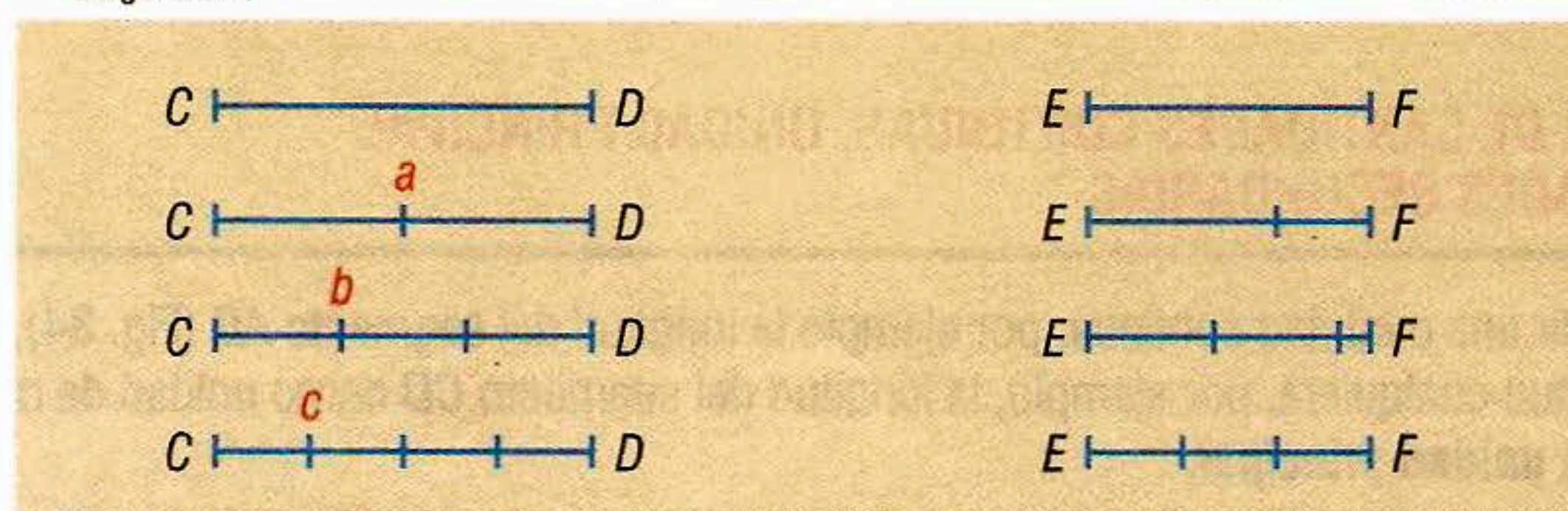
Así, por ejemplo, si queremos medir la longitud del segmento NM (Fig. 35) siendo la unidad principal el segmento CD , nos encontramos, al transportar CD sobre NM , que éste contiene 3 veces a CD y nos sobra el segmento PM . Entonces tomamos como unidad de medida la mitad de CD (**unidad secundaria**) y llevándola sobre NM a partir del extremo N , vemos que está contenida 7 veces exactamente en NM . Entonces decimos que la medida del segmento NM es 7 veces la mitad del segmento CD o sea, $7/2$ de CD .

Figura 35



Como se ve, hubo necesidad de introducir un nuevo número, el número fraccionario $7/2$, en el cual el 2 (**denominador**) indica que la unidad principal que es la longitud de CD se ha dividido en dos partes iguales, y el 7 (**numerador**), que NM contiene siete de estas partes. Del propio modo, si queremos medir la longitud del segmento EF (Fig. 36) siendo CD la unidad principal, nos encontramos, al transportar CD sobre EF , que este segmento es menor que la unidad principal CD . Si tomamos como unidad la mitad de CD , (línea a), o tercera parte (línea b) y las llevamos sobre EF , vemos que este segmento no contiene exactamente a estas **unidades secundarias**. Tomando como unidad de medida la cuarta parte de CD (línea c) vemos que ésta está contenida tres veces exactamente en EF . Entonces decimos que la medida del segmento EF es 3 veces la cuarta parte de CD , o sea, $3/4$ de CD . Véase que en el número fraccionario $3/4$ el denominador 4 indica que la **unidad secundaria** que se ha empleado es la cuarta parte de la unidad principal, y el numerador 3 indica las veces que EF contiene a dicha unidad secundaria.

Figura 36



En resumen: **unidad principal** es la unidad elegida y **unidades secundarias** son cada una de las partes iguales en que se divide la unidad principal.

NECESIDAD DEL NÚMERO FRACCIONARIO EN LAS DIVISIONES INEXACTAS

338

Otra necesidad del empleo de los números fraccionarios la tenemos en las divisiones inexactas.

La división exacta no siempre es posible, porque muchas veces no existe ningún número entero que multiplicado por el divisor dé el dividendo. Así, la división de 3 entre 5 no es exacta porque no hay ningún número entero que multiplicado por 5 dé 3.

Entonces ¿cómo expresar el cociente exacto de 3 entre 5? Pues únicamente por medio del número fraccionario $\frac{3}{5}$.

Del propio modo, el cociente exacto de 4 entre 7 se expresa $\frac{4}{7}$ y el de 9 entre 5 se expresa $\frac{9}{5}$.

Lo anterior nos dice que **todo número fraccionario representa el cociente exacto de una división en la cual el numerador representa el dividendo y el denominador el divisor.**

NÚMERO FRACCIONARIO O QUEBRADO es el que expresa una o varias partes iguales de la unidad principal.

339

Si la unidad se divide en **dos** partes iguales, estas partes se llaman **medios**; si se divide en **tres** partes iguales, estas partes se llaman **tercios**; en **cuatro** partes iguales, **cuartos**; en **cinco** partes iguales, **quintos**; en **seis** partes iguales, **sextos**; etcétera.

TÉRMINOS DEL QUEBRADO. SU CONCEPTO

340

Un quebrado consta de dos términos, llamados **numerador** y **denominador**.

El **denominador** indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal, y el **numerador**, cuántas de esas partes se toman.

Así, en el quebrado **tres cuartos**, $\frac{3}{4}$, el denominador 4 indica que la unidad se ha dividido en cuatro partes iguales, y el numerador 3, que se han tomado tres de esas partes iguales.

En el quebrado **siete novenos**, $\frac{7}{9}$, el denominador 9 indica que la unidad se ha dividido en nueve partes iguales, y el numerador 7, que se han tomado siete de esas partes.

NOTACIÓN

341

Para escribir un quebrado se escribe el numerador arriba separado por una raya oblicua u horizontal del denominador. Así, cuatro quintos se escribe $\frac{4}{5}$ o $\frac{4}{5}$, cinco octavos se escribe $\frac{5}{8}$ o $\frac{5}{8}$.

342

NOMENCLATURA

Para leer un quebrado se enuncia primero el numerador y después el denominador. Si el denominador es 2, se lee medios; si es 3, tercios; si es 4, cuartos; si es 5, quintos; si es 6, sextos; si es 7, séptimos; si es 8, octavos; si es 9, novenos, y si es 10, décimos.

Si el denominador es mayor que 10, se añade al número la terminación **avo**.

Así, $\frac{3}{8}$ se lee tres octavos; $\frac{5}{7}$ se lee cinco séptimos; $\frac{3}{11}$ se lee tres onceavos; $\frac{4}{15}$ se lee cuatro quinceavos.

343

INTERPRETACIÓN

Todo quebrado puede considerarse como el **cociente** de una división en la cual el numerador representa el dividendo y el denominador el divisor.

Así, $\frac{2}{3}$ representa el cociente de una división en la cual el numerador 2 es el dividendo y el denominador 3 el divisor.

En efecto: si $\frac{2}{3}$ es el cociente de la división de 2 entre 3, multiplicando este cociente $\frac{2}{3}$ por el divisor 3, debe darnos el dividendo 2, y efectivamente:

$$2 \text{ tercios} \times 3 = 2 \text{ tercios} + 2 \text{ tercios} + 2 \text{ tercios} = 6 \text{ tercios} = 2$$

porque si 3 tercios constituyen una unidad, 6 tercios, que es el doble, formarán 2 unidades.

344

CLASES DE QUEBRADOS

Los quebrados se dividen en **comunes** y **decimales**.

Quebrados comunes son aquellos cuyo denominador no es la unidad seguida de ceros, como $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{13}$.

Quebrados decimales son aquellos cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, como $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{11}{1,000}$.

Los quebrados, tanto comunes como decimales, pueden ser **propios**, **iguales a la unidad** o **impropios**.

Quebrado **propio** es aquel cuyo numerador es menor que el denominador. Ejemplos: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$.

Todo quebrado propio es **menor** que la unidad. Así, $\frac{3}{4}$ es menor que la unidad porque la unidad la hemos dividido en 4 partes iguales y sólo hemos tomado 3 de esas partes; por tanto, a $\frac{3}{4}$ le falta $\frac{1}{4}$ para ser igual a $\frac{4}{4}$ o sea la unidad.

Quebrado **igual a la unidad** es aquel cuyo numerador es igual al denominador. Ejemplos: $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$.

Quebrado **impropio** es aquel cuyo numerador es mayor que el denominador. Ejemplos: $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{5}$

Todo quebrado impropio es **mayor** que la unidad. Así, $\frac{7}{5}$ es mayor que la unidad porque la unidad la hemos dividido en 5 partes iguales y hemos tomado 7 de estas partes; por tanto, $\frac{7}{5}$ excede en $\frac{2}{5}$ a $\frac{5}{5}$ o sea la unidad.

NÚMERO MIXTO es el que consta de entero y quebrado. Ejemplos: $1\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{5}$

Todo número mixto contiene un número exacto de unidades y además una o varias partes iguales de la unidad.

345

97

Ejercicio

1. ¿Cómo se llaman las partes iguales en que se divide la unidad si se divide en 12 partes, 15 partes, 27 partes, 56 partes iguales?
2. ¿Cuántos tercios hay en una unidad, en 2 unidades, en 3 unidades?
3. ¿Cuántos novenos hay en una unidad, en 4 unidades, en 7 unidades?
4. ¿Cuántos treceavos hay en 2 unidades, en 5 unidades?
5. ¿Cuántos medios hay en la mitad de una unidad; cuántos tercios en la tercera parte de una unidad; cuántos octavos en la octava parte de una unidad?
6. ¿Cuántos cuartos, sextos y décimos hay en media unidad?
7. ¿Cuántos medios y cuartos hay en dos unidades y media?
8. Si divido una manzana en 5 partes iguales y a un muchacho le doy tres de esas partes y a otro el resto, ¿cómo se llaman las partes que he dado a cada uno?
9. En los quebrados $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{23}$, $\frac{11}{15}$ y $\frac{18}{43}$, decir lo que significan el numerador y el denominador.
10. ¿Cómo pueden interpretarse los quebrados $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{12}$? Demostrar.
11. Leer los quebrados $\frac{17}{10}$, $\frac{37}{108}$, $\frac{125}{316}$, $\frac{211}{819}$, $\frac{1,504}{97,654}$.
12. Escribir los quebrados: siete décimos; catorce diecinueavos, doscientos cincuenta, ciento treinta y dosavos; cincuenta y nueve, cuatrocientos ochenta y nueveavos; mil doscientos cincuenta y tres, tres mil novecientos ochenta y nueveavos.
13. De los quebrados siguientes, decir cuáles son mayores, cuáles menores y cuáles iguales a la unidad: $\frac{5}{7}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{15}{15}$, $\frac{31}{96}$, $\frac{114}{113}$, $\frac{19}{14}$, $\frac{103}{103}$, $\frac{1,350}{887}$, $\frac{95}{162}$, $\frac{162}{95}$, $\frac{95}{95}$.
14. Decir cuánto hay que añadir a cada uno de los quebrados siguientes para que sean iguales a la unidad: $\frac{8}{11}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{18}{19}$, $\frac{106}{231}$, $\frac{245}{897}$.
15. Decir en cuánto excede cada uno de los quebrados siguientes a la unidad: $\frac{9}{7}$, $\frac{15}{11}$, $\frac{23}{14}$, $\frac{89}{7}$, $\frac{314}{237}$, $\frac{1,089}{1,000}$.

16. ¿Cuál es el menor y el mayor quebrado propio de denominador 23, 25, 32, 89?
17. Decir en cuánto aumenta cada uno de los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}$, al añadir 3 al numerador.
18. Decir en cuánto disminuye cada uno de los quebrados $\frac{7}{8}, \frac{10}{9}, \frac{17}{35}$ al restar 6 al numerador.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES COMUNES

346 TEOREMA

De varios quebrados que tengan igual denominador es mayor el que tenga mayor numerador.

Sean los quebrados $\frac{7}{4}, \frac{5}{4}$ y $\frac{3}{4}$. Decimos que $\frac{7}{4}$ es el mayor de estos tres quebrados.

En efecto: todos estos quebrados representan partes iguales de la unidad, o sea cuartos; luego será el mayor el que contenga mayor número de partes, que es $\frac{7}{4}$.

347 TEOREMA

De varios quebrados que tengan igual numerador, es mayor el que tenga menor denominador.

Sean los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}$ y $\frac{2}{7}$. Decimos que $\frac{2}{3}$ es el mayor de estos tres quebrados.

En efecto: estos tres quebrados contienen el mismo número de partes de la unidad, dos cada uno; pero las partes del primero son mayores que las del segundo o tercero, pues en el primero la unidad está dividida en tres partes iguales; en el segundo, en cinco, y en el tercero, en siete; luego, $\frac{2}{3}$ es el mayor.

348 TEOREMA

Si a los dos términos de un quebrado propio se suma un mismo número, el quebrado que resulta es mayor que el primero.

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$. Sumemos un mismo número, 2 por ejemplo, a sus dos términos y tendremos $\frac{5+2}{7+2} = \frac{7}{9}$. Decimos que $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$.

En efecto: a $\frac{7}{9}$ le faltan $\frac{2}{9}$ para ser igual a $\frac{9}{9}$, o sea la unidad, y a $\frac{5}{7}$ le faltan $\frac{2}{7}$ para ser igual a $\frac{7}{7}$, o sea la unidad; pero $\frac{2}{9}$ es menor que $\frac{2}{7}$; luego, a $\frac{7}{9}$ le falta menos para ser igual a la unidad que a $\frac{5}{7}$ o sea, $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$.

TEOREMA

349

Si a los dos términos de un quebrado propio se resta un mismo número, el quebrado que resulta es menor que el primero.

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$. Restemos un mismo número, 2 por ejemplo, a sus dos términos y tendremos $\frac{5-2}{7-2} = \frac{3}{5}$. Decimos que $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$.

En efecto: a $\frac{3}{5}$ le faltan $\frac{2}{5}$ para ser igual a $\frac{5}{5}$ o sea la unidad, y a $\frac{5}{7}$ le faltan $\frac{2}{7}$ para ser igual a $\frac{7}{7}$, o sea la unidad; pero $\frac{2}{5}$ es mayor que $\frac{2}{7}$; luego, a $\frac{3}{5}$ le falta más para ser igual a la unidad que a $\frac{5}{7}$, o sea, $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$.

TEOREMA

350

Si a los dos términos de un quebrado impropio se suma un mismo número, el quebrado que resulta es menor que el primero.

Sea el quebrado $\frac{7}{5}$. Sumemos un mismo número, 2 por ejemplo, a sus dos términos y tendremos: $\frac{7+2}{5+2} = \frac{9}{7}$. Decimos que $\frac{9}{7} < \frac{7}{5}$.

En efecto: $\frac{9}{7}$ excede a la unidad en $\frac{2}{7}$ y $\frac{7}{5}$ excede a la unidad en $\frac{2}{5}$; pero $\frac{2}{7}$ es menor que $\frac{2}{5}$; luego, $\frac{9}{7} < \frac{7}{5}$.

TEOREMA

351

Si a los dos términos de un quebrado impropio se resta un mismo número, el quebrado que resulta es mayor que el primero.

Sea el quebrado $\frac{7}{5}$. Restemos un mismo número, 2 por ejemplo, a sus dos términos y tendremos: $\frac{7-2}{5-2} = \frac{5}{3}$. Decimos que $\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$.

En efecto: $\frac{5}{3}$ excede a la unidad en $\frac{2}{3}$, y $\frac{7}{5}$ excede a la unidad en $\frac{2}{5}$; pero $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{2}{5}$; luego, $\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$.

98

1. Decir cuál de los quebrados siguientes es el mayor, cuál el menor y por qué: $\frac{7}{10}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{19}$ y $\frac{7}{23}$.
2. Decir cuál de los quebrados siguientes es el mayor, cuál el menor y por qué: $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{13}{6}$ y $\frac{19}{6}$.

Ejercicio

3. ¿Cuánto falta a $\frac{3}{5}$ para ser la unidad? ¿Y a $\frac{5}{7}$? ¿Cuál será mayor $\frac{3}{5}$ o $\frac{5}{7}$?
4. ¿En cuánto exceden $\frac{4}{3}$ y $\frac{17}{14}$ a la unidad? ¿Cuál será mayor de los dos?
5. Escribir de menor a mayor los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{13}$ y $\frac{5}{7}$.
6. Escribir de mayor a menor los quebrados $\frac{21}{17}$, $\frac{9}{5}$ y $\frac{7}{3}$.
7. ¿Aumenta o disminuye $\frac{8}{13}$ si se suma 5 a sus dos términos; si se resta 3?
8. ¿Cuál es mayor $\frac{11}{15}$ o $\frac{7}{11}$; $\frac{7}{9}$ u $\frac{11}{13}$?
9. ¿Disminuye o aumenta $\frac{16}{11}$ si se suma 6 a sus dos términos; si se resta 5?
10. ¿Cuál es mayor $\frac{17}{12}$ o $\frac{14}{9}$; $\frac{6}{5}$ o $\frac{9}{8}$?

352

TEOREMA

Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número, sin variar el denominador, el quebrado queda multiplicado por dicho número, y si se divide, el quebrado queda dividido entre dicho número.

En efecto: ya sabemos que el quebrado representa el cociente de una división en la cual el numerador es el dividendo y el denominador el divisor. Ahora bien, si el dividendo de una división se multiplica o divide entre un número, el cociente queda multiplicado o dividido entre dicho número (187); luego, al multiplicar o dividir el numerador, que es el dividendo, entre un número, el quebrado, que es el cociente, quedará multiplicado o dividido entre el mismo número.

353

TEOREMA

Si el denominador de un quebrado se multiplica o divide entre un número, el quebrado queda dividido en el primer caso y multiplicado en el segundo por el mismo número.

En efecto: hay un teorema que dice que si el divisor se multiplica o divide entre un número el cociente queda dividido en el primer caso y multiplicado en el segundo por dicho número (187); luego, al multiplicar o dividir el denominador, que es el divisor, entre un número, el quebrado, que es el cociente, quedará dividido en el primer caso y multiplicado en el segundo por el mismo número.

354

TEOREMA

Si los dos términos de un quebrado se multiplican o dividen entre un mismo número, el quebrado no varía.

En efecto: al multiplicar el numerador por un número, el quebrado queda multiplicado por ese mismo número (352), pero al multiplicar el denominador por dicho número, el quebrado queda dividido entre el mismo número (353), luego no varía.

Del mismo modo, al dividir el numerador entre un número, el quebrado queda dividido entre dicho número (352), pero al dividir el denominador entre el mismo número el quebrado queda multiplicado por el mismo número (353), luego no varía.

99

Ejercicio

1. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{8}{11}$ si multiplicamos el numerador por 2; si lo dividimos entre 4?
2. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{16}{19}$ sustituyendo el 16 por 32, por 2?
3. ¿Es $\frac{20}{31}$ mayor o menor que $\frac{4}{31}$ y cuántas veces?
4. ¿Qué alteración experimenta $\frac{5}{6}$ si multiplicamos el denominador por 3; si lo dividimos entre 2?
5. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{7}{8}$ si sustituimos el 8 por 2, por 24?
6. ¿Es $\frac{7}{51}$ mayor o menor que $\frac{7}{17}$ y cuántas veces?
7. ¿Qué sucede al quebrado $\frac{22}{105}$ si sustituimos el denominador por 5, por 35?
8. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{14}{28}$ si multiplicamos sus dos términos por 3, si lo dividimos entre 2?
9. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{9}{15}$ sustituyendo el 9 por 3 y el 15 por 5?
10. ¿Cuál de los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{12}$ y $\frac{16}{24}$ es el mayor?
11. ¿Cuál de los quebrados $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{27}{135}$ y $\frac{6}{30}$ es el menor?
12. Dado el quebrado $\frac{7}{9}$ hallar tres quebrados equivalentes de términos mayores.
13. Dado el quebrado $\frac{75}{125}$, hallar dos quebrados equivalentes de términos mayores y dos de términos menores.
14. Hacer los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{4}$ y $\frac{5}{6}$ tres veces mayores sin que varíe el denominador.
15. Hacer los quebrados $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{11}{12}$ dos veces mayores sin que varíe el numerador.
16. Hacer los quebrados $\frac{8}{9}$, $\frac{16}{31}$ y $\frac{32}{45}$ ocho veces menores sin que varíe el denominador.
17. Hacer los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ cinco veces menores sin que varíe el numerador.



Los números fraccionarios tuvieron su origen en las medidas. Los babilonios utilizaban como único denominador el 60. Los egipcios empleaban la unidad como numerador; para representar $7/8$, escribían $1/2$, $1/4$, $1/8$. Los griegos marcaban

el numerador con un acento y el denominador con dos, o colocaban el denominador como un exponente. **Hiparco** introdujo las fracciones babilónicas en la astronomía griega.

Capítulo **XXIV**

REDUCCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE QUEBRADOS

355

CONVERTIR UN MIXTO EN QUEBRADO

REGLA

Se multiplica el entero por el denominador, al producto se añade el numerador y esta suma se divide entre el denominador.

Ejemplo

Convertir $5\frac{2}{3}$ en quebrado impropio:

$$5\frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{17}{3} \quad \text{R.}$$

Una unidad equivale a 3 tercios, luego en 5 unidades hay 15 tercios, más los dos tercios que ya tenemos suman 17 tercios.

100

Ejercicio

Convertir en quebrados, por simple inspección.

1. $1\frac{1}{2}$

2. $1\frac{1}{4}$

3. $1\frac{1}{8}$

4. $2\frac{1}{2}$

5. $3\frac{1}{4}$

6. $4\frac{1}{5}$

9. $8\frac{1}{2}$

12. $9\frac{5}{6}$

15. $10\frac{5}{7}$

18. $15\frac{2}{3}$

7. $6\frac{2}{5}$

10. $8\frac{3}{7}$

13. $10\frac{1}{3}$

16. $11\frac{2}{5}$

19. $16\frac{1}{4}$

8. $7\frac{3}{4}$

11. $9\frac{2}{3}$

14. $10\frac{3}{8}$

17. $12\frac{3}{4}$

20. $18\frac{2}{3}$

Convertir en quebrados:

1. $15\frac{3}{8}$

5. $20\frac{3}{19}$

9. $42\frac{7}{25}$

13. $5\frac{3}{106}$

17. $90\frac{19}{37}$

2. $12\frac{3}{11}$

6. $17\frac{5}{18}$

10. $53\frac{9}{17}$

14. $8\frac{1}{102}$

18. $101\frac{13}{18}$

3. $16\frac{7}{8}$

7. $23\frac{4}{23}$

11. $60\frac{3}{17}$

15. $25\frac{7}{73}$

19. $102\frac{15}{17}$

4. $19\frac{3}{11}$

8. $31\frac{5}{31}$

12. $60\frac{7}{80}$

16. $90\frac{19}{31}$

20. $500\frac{8}{67}$

101

Ejercicio

HALLAR LOS ENTEROS CONTENIDOS EN UN QUEBRADO IMPROPIO

356

REGLA

Se divide el numerador entre el denominador. Si el cociente es exacto, éste representa los enteros; si no es exacto, se añade al entero un quebrado que tenga por numerador el residuo y por denominador el divisor.

1) Hallar los enteros contenidos en $\frac{32}{4}$.

Una unidad contiene $\frac{4}{4}$, luego en $\frac{32}{4}$ habrá tantas unidades como veces esté contenido 4 en 32 o sea 8.

$$4 \overline{) 32} \quad \frac{32}{4} = 8 \quad \text{R.}$$

2) Convertir en quebrado $\frac{335}{228}$.

$$228 \overline{) 335} \quad \frac{335}{228} = 1 \frac{107}{228} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Hallar por simple inspección, los enteros contenidos en:

1. $\frac{12}{3}$

5. $\frac{108}{12}$

9. $\frac{8}{5}$

13. $\frac{63}{10}$

17. $\frac{95}{18}$

2. $\frac{21}{7}$

6. $\frac{125}{25}$

10. $\frac{19}{7}$

14. $\frac{80}{11}$

18. $\frac{100}{11}$

3. $\frac{32}{8}$

7. $\frac{7}{2}$

11. $\frac{25}{8}$

15. $\frac{85}{19}$

19. $\frac{102}{19}$

4. $\frac{81}{9}$

8. $\frac{5}{2}$

12. $\frac{31}{4}$

16. $\frac{93}{30}$

20. $\frac{112}{11}$

102

Ejercicio

103

Hallar los enteros contenidos en:

Ejercicio

1. $\frac{115}{35}$

6. $\frac{354}{61}$

11. $\frac{815}{237}$

16. $\frac{4,200}{954}$

21. $\frac{54,137}{189}$

2. $\frac{174}{53}$

7. $\frac{401}{83}$

12. $\frac{1,001}{184}$

17. $\frac{8,632}{1,115}$

22. $\frac{60,185}{419}$

3. $\frac{195}{63}$

8. $\frac{563}{54}$

13. $\frac{1,563}{315}$

18. $\frac{9,732}{2,164}$

23. $\frac{89,356}{517}$

4. $\frac{215}{73}$

9. $\frac{601}{217}$

14. $\frac{2,134}{289}$

19. $\frac{12,485}{3,284}$

24. $\frac{102,102}{1,111}$

5. $\frac{318}{90}$

10. $\frac{743}{165}$

15. $\frac{3,115}{417}$

20. $\frac{34,136}{7,432}$

25. $\frac{184,236}{17,189}$

357

REDUCIR UN ENTERO A QUEBRADO

El modo más sencillo de reducir un entero a quebrado es ponerle por denominador la unidad.

Ejemplos

$$5 = \frac{5}{1}; 17 = \frac{17}{1}$$

358

REDUCIR UN ENTERO A QUEBRADO DE DENOMINADOR DADO**REGLA**

Se multiplica el entero por el denominador y el producto se divide entre el denominador.

Ejemplos

1) Reducir 6 a quebrado equivalente de denominador 7.

$$6 = \frac{6 \times 7}{7} = \frac{42}{7} \quad \text{R.}$$

Si una unidad equivale a 7 séptimos, 6 unidades serán $6 \times 7 = 42$ séptimos.

2) Reducir 17 a novenos.

$$17 = \frac{17 \times 9}{9} = \frac{153}{9} \quad \text{R.}$$

Si una unidad contiene 9 novenos, 17 unidades contendrán $17 \times 9 = 153$ novenos.

104

Reducir:

Ejercicio

1. $2 = \frac{\quad}{2}$

5. $5 = \frac{\quad}{8}$

9. $9 = \frac{\quad}{6}$

13. $11 = \frac{\quad}{9}$

17. $20 = \frac{\quad}{4}$

2. $3 = \frac{\quad}{2}$

6. $6 = \frac{\quad}{4}$

10. $7 = \frac{\quad}{11}$

14. $12 = \frac{\quad}{10}$

18. $25 = \frac{\quad}{5}$

3. $4 = \frac{\quad}{3}$

7. $7 = \frac{\quad}{2}$

11. $5 = \frac{\quad}{12}$

15. $13 = \frac{\quad}{11}$

19. $30 = \frac{\quad}{9}$

4. $5 = \frac{\quad}{1}$

8. $8 = \frac{\quad}{5}$

12. $6 = \frac{\quad}{13}$

16. $18 = \frac{\quad}{7}$

20. $36 = \frac{\quad}{3}$

105

Ejercicio

Reducir:

- | | | | |
|-------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|
| 1. 2 a tercios | R. $\frac{6}{3}$ | 11. 84 a 92avos | R. $\frac{7,728}{92}$ |
| 2. 3 a cuartos | R. $\frac{12}{4}$ | 12. 95 a 95avos | R. $\frac{9,025}{95}$ |
| 3. 4 a cuartos | R. $\frac{16}{4}$ | 13. 101 a 12avos | R. $\frac{1,212}{12}$ |
| 4. 5 a tercios | R. $\frac{15}{3}$ | 14. 153 a 14avos | R. $\frac{2,142}{14}$ |
| 5. 9 a novenos | R. $\frac{81}{9}$ | 15. 201 a 32avos | R. $\frac{6,432}{32}$ |
| 6. 15 a onceavos | R. $\frac{165}{11}$ | 16. 306 a 53avos | R. $\frac{16,218}{53}$ |
| 7. 26 a treceavos | R. $\frac{338}{13}$ | 17. 1,184 a 15avos | R. $\frac{17,760}{15}$ |
| 8. 31 a 22avos | R. $\frac{682}{22}$ | 18. 2,134 a 17avos | R. $\frac{36,278}{17}$ |
| 9. 43 a 51avos | R. $\frac{2,193}{51}$ | 19. 3,216 a 40avos | R. $\frac{128,640}{40}$ |
| 10. 61 a 84avos | R. $\frac{5,124}{84}$ | 20. 5,217 a 32avos | R. $\frac{166,944}{32}$ |

106

Ejercicio

Reducir:

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. 96 a quebrado equivalente de denominador 15. | R. $\frac{1,440}{15}$ |
| 2. 99 " " " " " | 23. R. $\frac{2,277}{23}$ |
| 3. 104 " " " " " | 19. R. $\frac{1,976}{19}$ |
| 4. 186 " " " " " | 22. R. $\frac{4,092}{22}$ |
| 5. 201 " " " " " | 41. R. $\frac{8,241}{41}$ |
| 6. 255 " " " " " | 39. R. $\frac{9,945}{39}$ |
| 7. 301 " " " " " | 27. R. $\frac{8,127}{27}$ |
| 8. 405 " " " " " | 28. R. $\frac{11,340}{28}$ |
| 9. 999 " " " " " | 14. R. $\frac{13,986}{14}$ |
| 10. 1,000 " " " " " | 56. R. $\frac{56,000}{56}$ |

11. 2,356	a quebrado equivalente de denominador 19.	R. $\frac{44,764}{19}$
12. 3,789	" " " " " 17.	R. $\frac{64,413}{17}$
13. 4,444	" " " " " 15.	R. $\frac{66,660}{15}$
14. 8,888	" " " " " 11.	R. $\frac{97,768}{11}$

359

REDUCIR UNA FRACCIÓN A TÉRMINOS MAYORES O MENORES

Se pueden considerar dos casos:

- 1) Reducir una fracción a otra fracción equivalente de denominador dado, cuando el nuevo denominador es múltiplo del primero, o reducir una fracción a términos mayores.

REGLA

El denominador de la nueva fracción será el dado. Para hallar el numerador se multiplica el numerador del quebrado dado por el cociente que resulta de dividir los dos denominadores.

Ejemplos

- 1) Convertir $\frac{3}{4}$ en quebrado equivalente de denominador 24. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 6}{24} = \frac{18}{24}$ R.

Para que 4 se convierta en 24 hay que multiplicarlo por 6, luego para que el quebrado no varíe hay que multiplicar el numerador por 6, $3 \times 6 = 18$. (354)

- 2) Convertir $\frac{2}{7}$ en treinta y cincoavos. $\frac{2}{7} = \frac{2 \times 5}{35} = \frac{10}{35}$ R.

Para que 7 se convierta en 35 hay que multiplicarlo por 5; luego, para que el quebrado no varíe hay que multiplicar el numerador por 5, $2 \times 5 = 10$.

107

Reducir, por simple inspección:

Ejercicio

- | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}$ | 5. $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{12}$ | 9. $\frac{2}{7} = \frac{\quad}{21}$ | 13. $\frac{2}{11} = \frac{\quad}{33}$ | 17. $\frac{2}{16} = \frac{\quad}{45}$ |
| 2. $\frac{1}{3} = \frac{\quad}{6}$ | 6. $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{20}$ | 10. $\frac{1}{8} = \frac{\quad}{24}$ | 14. $\frac{5}{12} = \frac{\quad}{24}$ | 18. $\frac{7}{16} = \frac{\quad}{80}$ |
| 3. $\frac{1}{4} = \frac{\quad}{12}$ | 7. $\frac{3}{5} = \frac{\quad}{25}$ | 11. $\frac{2}{9} = \frac{\quad}{36}$ | 15. $\frac{1}{13} = \frac{\quad}{39}$ | 19. $\frac{11}{20} = \frac{\quad}{100}$ |
| 4. $\frac{1}{5} = \frac{\quad}{20}$ | 8. $\frac{1}{6} = \frac{\quad}{18}$ | 12. $\frac{1}{10} = \frac{\quad}{40}$ | 16. $\frac{1}{14} = \frac{\quad}{56}$ | 20. $\frac{13}{30} = \frac{\quad}{180}$ |

108

Ejercicio

Reducir:

- | | | | | | |
|--------------------|-----------|---------------------|---------------------|-------------|--------------------------|
| 1. $\frac{3}{5}$ | a 35avos | R. $\frac{21}{35}$ | 11. $\frac{24}{25}$ | a 200avos | R. $\frac{192}{200}$ |
| 2. $\frac{1}{6}$ | a 42avos | R. $\frac{7}{42}$ | 12. $\frac{23}{26}$ | a 104avos | R. $\frac{92}{104}$ |
| 3. $\frac{6}{7}$ | a 63avos | R. $\frac{54}{63}$ | 13. $\frac{33}{29}$ | a 174avos | R. $\frac{198}{174}$ |
| 4. $\frac{7}{8}$ | a 96avos | R. $\frac{84}{96}$ | 14. $\frac{79}{83}$ | a 415avos | R. $\frac{395}{415}$ |
| 5. $\frac{5}{11}$ | a 121avos | R. $\frac{55}{121}$ | 15. $\frac{9}{114}$ | a 798avos | R. $\frac{63}{798}$ |
| 6. $\frac{4}{13}$ | a 130avos | R. $\frac{40}{130}$ | 16. $\frac{1}{11}$ | a 1,331avos | R. $\frac{121}{1,331}$ |
| 7. $\frac{8}{17}$ | a 102avos | R. $\frac{48}{102}$ | 17. $\frac{3}{13}$ | a 1,690avos | R. $\frac{390}{1,690}$ |
| 8. $\frac{12}{19}$ | a 133avos | R. $\frac{84}{133}$ | 18. $\frac{5}{23}$ | a 5,290avos | R. $\frac{1,150}{5,290}$ |
| 9. $\frac{5}{21}$ | a 105avos | R. $\frac{40}{105}$ | 19. $\frac{7}{29}$ | a 841avos | R. $\frac{203}{841}$ |
| 10. $\frac{9}{22}$ | a 176avos | R. $\frac{72}{176}$ | 20. $\frac{11}{31}$ | a 9,610avos | R. $\frac{3,410}{9,610}$ |

109

Ejercicio

Reducir:

- | | | |
|----------------------|--|--------------------------|
| 1. $\frac{11}{76}$ | a quebrado equivalente de denominador 684. | R. $\frac{99}{684}$ |
| 2. $\frac{7}{65}$ | " " " " " 520. | R. $\frac{56}{520}$ |
| 3. $\frac{13}{72}$ | " " " " " 576. | R. $\frac{104}{576}$ |
| 4. $\frac{7}{81}$ | " " " " " 729. | R. $\frac{63}{729}$ |
| 5. $\frac{11}{91}$ | " " " " " 637. | R. $\frac{77}{637}$ |
| 6. $\frac{7}{94}$ | " " " " " 752. | R. $\frac{56}{752}$ |
| 7. $\frac{13}{98}$ | " " " " " 882. | R. $\frac{117}{882}$ |
| 8. $\frac{7}{102}$ | " " " " " 816. | R. $\frac{56}{816}$ |
| 9. $\frac{113}{123}$ | " " " " " 1,107. | R. $\frac{1,017}{1,107}$ |
| 10. $\frac{7}{12}$ | " " " " " 1,296. | R. $\frac{756}{1,296}$ |
| 11. $\frac{5}{18}$ | " " " " " 3,600. | R. $\frac{1,000}{3,600}$ |

- | | | | | |
|-----|-----------------|--|----|-----------------------|
| 12. | $\frac{19}{23}$ | a quebrado equivalente de denominador 1,058. | R. | $\frac{874}{1,058}$ |
| 13. | $\frac{32}{41}$ | " " " " " | R. | $\frac{2,880}{3,690}$ |
| 14. | $\frac{7}{81}$ | " " " " " | R. | $\frac{630}{7,290}$ |

- 2) Reducir una fracción dada a otra fracción equivalente de denominador dado, cuando el nuevo denominador es divisor del primero o reducir una fracción a términos menores.

REGLA

El denominador de la nueva fracción será el dado. Para hallar el numerador se divide el numerador del quebrado dado entre el cociente que resulta de dividir los dos denominadores.

Ejemplos

- 1) Convertir $\frac{15}{24}$ en quebrado equivalente de denominador 8. $\frac{15}{24} = \frac{15 \div 3}{8} = \frac{5}{8}$ R.

Para que 24 se convierta en 8 hay que dividirlo entre 3; luego, para que el quebrado no varíe hay que dividir el numerador entre 3, $15 \div 3 = 5$. (354).

- 2) Convertir $\frac{49}{91}$ en treceavos. $\frac{49}{91} = \frac{49 \div 7}{13} = \frac{7}{13}$ R.

Para que 91, se convierta en 13 hay que dividirlo entre 7; luego, para que el quebrado no varíe hay que dividir el numerador entre 7, $49 \div 7 = 7$.

110

Reducir, por simple inspección:

Ejercicio

- | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1. $\frac{2}{4} = \frac{\quad}{2}$ | 5. $\frac{9}{24} = \frac{\quad}{8}$ | 9. $\frac{8}{22} = \frac{\quad}{11}$ | 13. $\frac{9}{27} = \frac{\quad}{3}$ | 17. $\frac{24}{32} = \frac{\quad}{4}$ |
| 2. $\frac{4}{6} = \frac{\quad}{3}$ | 6. $\frac{10}{18} = \frac{\quad}{9}$ | 10. $\frac{32}{24} = \frac{\quad}{3}$ | 14. $\frac{6}{27} = \frac{\quad}{9}$ | 18. $\frac{12}{33} = \frac{\quad}{11}$ |
| 3. $\frac{4}{8} = \frac{\quad}{2}$ | 7. $\frac{15}{20} = \frac{\quad}{4}$ | 11. $\frac{15}{25} = \frac{\quad}{5}$ | 15. $\frac{20}{28} = \frac{\quad}{7}$ | 19. $\frac{20}{34} = \frac{\quad}{17}$ |
| 4. $\frac{6}{10} = \frac{\quad}{5}$ | 8. $\frac{16}{20} = \frac{\quad}{5}$ | 12. $\frac{13}{26} = \frac{\quad}{2}$ | 16. $\frac{20}{30} = \frac{\quad}{3}$ | 20. $\frac{30}{60} = \frac{\quad}{2}$ |

111

Reducir:

Ejercicio

- | | | | |
|-----------------------------|------------------|-----------------------------|------------------|
| 1. $\frac{7}{14}$ a medios | R. $\frac{1}{2}$ | 3. $\frac{8}{20}$ a quintos | R. $\frac{2}{5}$ |
| 2. $\frac{6}{15}$ a quintos | R. $\frac{2}{5}$ | 4. $\frac{20}{24}$ a sextos | R. $\frac{5}{6}$ |

5.	$\frac{25}{35}$	a séptimos	R. $\frac{5}{7}$	13.	$\frac{225}{335}$	a 67avos	R. $\frac{45}{67}$
6.	$\frac{54}{27}$	a novenos	R. $\frac{18}{9}$	14.	$\frac{126}{729}$	a 81avos	R. $\frac{14}{81}$
7.	$\frac{27}{36}$	a cuartos	R. $\frac{3}{4}$	15.	$\frac{512}{776}$	a 97avos	R. $\frac{64}{97}$
8.	$\frac{50}{55}$	a 11avos	R. $\frac{10}{11}$	16.	$\frac{640}{816}$	a 102avos	R. $\frac{80}{102}$
9.	$\frac{60}{90}$	a 18avos	R. $\frac{12}{18}$	17.	$\frac{999}{1,179}$	a 131avos	R. $\frac{111}{131}$
10.	$\frac{96}{126}$	a 21avos	R. $\frac{16}{21}$	18.	$\frac{343}{1,771}$	a 253avos	R. $\frac{49}{253}$
11.	$\frac{84}{128}$	a 32avos	R. $\frac{21}{32}$	19.	$\frac{192}{4,488}$	a 561avos	R. $\frac{24}{561}$
12.	$\frac{119}{364}$	a 52avos	R. $\frac{17}{52}$	20.	$\frac{490}{7,007}$	a 1,001avos	R. $\frac{70}{1,001}$

Reducir:

1.	$\frac{84}{595}$	a quebrado equivalente de denominador 85.	R. $\frac{12}{85}$
2.	$\frac{91}{672}$	" " " " "	96. R. $\frac{13}{96}$
3.	$\frac{480}{824}$	" " " " "	103. R. $\frac{60}{103}$
4.	$\frac{343}{924}$	" " " " "	132. R. $\frac{49}{132}$
5.	$\frac{365}{990}$	" " " " "	198. R. $\frac{73}{198}$
6.	$\frac{516}{816}$	" " " " "	204. R. $\frac{129}{204}$
7.	$\frac{915}{1,430}$	" " " " "	286. R. $\frac{183}{286}$
8.	$\frac{912}{1,204}$	" " " " "	301. R. $\frac{228}{301}$
9.	$\frac{729}{1,395}$	" " " " "	465. R. $\frac{243}{465}$
10.	$\frac{654}{3,006}$	" " " " "	501. R. $\frac{109}{501}$
11.	$\frac{726}{3,828}$	" " " " "	638. R. $\frac{121}{638}$
12.	$\frac{93}{961}$	" " " " "	31. R. $\frac{3}{31}$
13.	$\frac{1,300}{1,690}$	" " " " "	13. R. $\frac{10}{13}$
14.	$\frac{320}{2,720}$	" " " " "	17. R. $\frac{2}{17}$

112

Ejercicio

360 **FRACCIÓN IRREDUCIBLE** es toda fracción cuyos dos términos son primos entre sí.

Así, $\frac{13}{14}$ es una fracción irreducible porque sus dos términos, 13 y 14, son primos entre sí; $\frac{17}{23}$ es otra fracción irreducible.

Quando una fracción es irreducible se dice que está **reducida a su más simple expresión** o a su **mínima expresión**.

361 **TEOREMA**

Si los dos términos de una fracción irreducible se elevan a una potencia, la fracción que resulta es también irreducible.

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$. Vamos a demostrar que si elevamos los dos términos de este quebrado a una misma potencia, por ejemplo a n , la fracción que resulta, $\frac{a^n}{b^n}$, es también irreducible.

En efecto: que la fracción $\frac{a^n}{b^n}$ es irreducible significa que sus dos términos a y b son primos entre sí. Ahora bien: hay un teorema (293) que dice que si dos números son primos entre sí, sus potencias de cualquier grado también lo son; luego, a^n y b^n son primos entre sí; luego $\frac{a^n}{b^n}$ es un quebrado irreducible, que era lo que queríamos demostrar.

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

362 **SIMPLIFICAR UNA FRACCIÓN** es convertirla en otra fracción equivalente cuyos términos sean menores.

REGLA

Para simplificar una fracción se dividen sus dos términos sucesivamente entre los factores comunes que tengan.

Ejemplos

1) Reducir a su más simple expresión $\frac{1,350}{2,550}$. $\frac{1,350^{(10)}}{2,550} = \frac{135^{(3)}}{255} = \frac{45^{(5)}}{85} = \frac{9}{17}$ R.

Primero dividimos 1,350 y 2,550 entre su factor común 10 y obtenemos 135 y 255; dividimos 135 y 255 entre su factor común 3 y obtenemos 45 y 85; dividimos 45 y 85 entre su factor común 5 y obtenemos 9 y 17. Como 9 y 17 son primos entre sí, la fracción $\frac{9}{17}$ es irreducible y es equivalente a $\frac{1,350}{2,550}$ porque no hemos hecho más que dividir los dos términos de cada fracción entre el mismo número con lo cual el valor de la fracción no se altera (354).

2) Reducir a su mínima expresión $\frac{12,903}{16,269}$.

$$\frac{12,903}{16,269} = \frac{4,301}{5,423} = \frac{391}{493}$$

Como 391 y 493 no son números pequeños no podemos asegurar, a simple vista, que son primos entre sí. Para convencernos *hallamos el m. c. d. de 391 y 493*. Si son primos entre sí su m. c. d. será 1; si no lo son, el factor o los factores comunes que aún tengan aparecerán en el m. c. d.:

	5	1	3	1	
17	85	102	391	493	m. c. d. = 17
	0	17	85	102	

391 y 493 no son primos entre sí porque tienen el factor común 17.

Ahora dividimos 391 y 493 por su m. c. d. 17 y tendremos:

$$\frac{391 \div 17}{493 \div 17} = \frac{23}{29}$$

Esta fracción $\frac{23}{29}$, sin duda alguna es irreducible (**318**), luego:

$$\frac{12,903}{16,269} = \frac{23}{29} \quad \text{R.}$$

Reducir a su más simple expresión:

1. $\frac{28}{36}$ R. $\frac{7}{9}$

2. $\frac{54}{108}$ R. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{54}{96}$ R. $\frac{9}{16}$

4. $\frac{72}{144}$ R. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{84}{126}$ R. $\frac{2}{3}$

6. $\frac{99}{165}$ R. $\frac{3}{5}$

7. $\frac{162}{189}$ R. $\frac{6}{7}$

8. $\frac{114}{288}$ R. $\frac{19}{48}$

9. $\frac{343}{539}$ R. $\frac{7}{11}$

10. $\frac{121}{143}$ R. $\frac{11}{13}$

11. $\frac{306}{1,452}$ R. $\frac{51}{242}$

12. $\frac{168}{264}$ R. $\frac{7}{11}$

13. $\frac{72}{324}$ R. $\frac{2}{9}$

14. $\frac{98}{105}$ R. $\frac{14}{15}$

15. $\frac{594}{648}$ R. $\frac{11}{12}$

16. $\frac{539}{833}$ R. $\frac{11}{17}$

17. $\frac{260}{286}$ R. $\frac{10}{11}$

18. $\frac{2,004}{3,006}$ R. $\frac{2}{3}$

19. $\frac{1,955}{3,910}$ R. $\frac{1}{2}$

20. $\frac{286}{1,859}$ R. $\frac{2}{13}$

21. $\frac{1,470}{4,200}$ R. $\frac{7}{20}$

22. $\frac{7,854}{9,922}$ R. $\frac{357}{451}$

23. $\frac{4,459}{4,802}$ R. $\frac{13}{14}$

24. $\frac{1,798}{4,495}$ R. $\frac{2}{5}$

25. $\frac{1,690}{3,549}$ R. $\frac{10}{21}$

26. $\frac{2,016}{3,584}$ R. $\frac{9}{16}$

27. $\frac{1,598}{1,786}$ R. $\frac{17}{19}$

28. $\frac{4,235}{25,410}$ R. $\frac{1}{6}$

29. $\frac{1,573}{11,011}$ R. $\frac{1}{7}$

30. $\frac{2,535}{20,280}$ R. $\frac{1}{8}$

113

Ejercicio

363

REDUCIR UNA FRACCIÓN A SU MÁS SIMPLE EXPRESIÓN POR MEDIO DE UNA SOLA OPERACIÓN

REGLA

Hállese el m. c. d. de los dos términos de la fracción y divídanse numerador y denominador entre su m. c. d.

Ejemplo

Reducir a su mínima expresión $\frac{7,293}{17,017}$.

	3	2
2,431	7,293	17,017
	0	2,431

Ahora dividimos 7,293 y 17,017 entre su m. c. d. 2,431: $\frac{7,293 \div 2,431}{17,017 \div 2,431} = \frac{3}{7}$ R.

114

Reducir a su mínima expresión por medio de una sola operación.

Ejercicio

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\frac{98}{147}$ R. $\frac{2}{3}$ | 11. $\frac{1,503}{2,338}$ R. $\frac{9}{14}$ | 21. $\frac{2,401}{19,208}$ R. $\frac{1}{8}$ |
| 2. $\frac{273}{637}$ R. $\frac{3}{7}$ | 12. $\frac{343}{7,007}$ R. $\frac{7}{143}$ | 22. $\frac{12,460}{21,805}$ R. $\frac{4}{7}$ |
| 3. $\frac{332}{415}$ R. $\frac{4}{5}$ | 13. $\frac{411}{685}$ R. $\frac{3}{5}$ | 23. $\frac{8,505}{13,365}$ R. $\frac{7}{11}$ |
| 4. $\frac{285}{513}$ R. $\frac{5}{9}$ | 14. $\frac{6,170}{7,404}$ R. $\frac{5}{6}$ | 24. $\frac{16,005}{18,139}$ R. $\frac{15}{17}$ |
| 5. $\frac{252}{441}$ R. $\frac{4}{7}$ | 15. $\frac{2,478}{3,186}$ R. $\frac{7}{9}$ | 25. $\frac{32,828}{35,092}$ R. $\frac{29}{31}$ |
| 6. $\frac{623}{979}$ R. $\frac{7}{11}$ | 16. $\frac{1,727}{1,884}$ R. $\frac{11}{12}$ | 26. $\frac{40,620}{69,054}$ R. $\frac{10}{17}$ |
| 7. $\frac{370}{444}$ R. $\frac{5}{6}$ | 17. $\frac{2,006}{7,021}$ R. $\frac{2}{7}$ | 27. $\frac{154,508}{170,772}$ R. $\frac{19}{21}$ |
| 8. $\frac{2,002}{5,005}$ R. $\frac{2}{5}$ | 18. $\frac{4,359}{11,624}$ R. $\frac{3}{8}$ | 28. $\frac{126,014}{162,018}$ R. $\frac{7}{9}$ |
| 9. $\frac{3,003}{6,006}$ R. $\frac{1}{2}$ | 19. $\frac{7,075}{11,320}$ R. $\frac{5}{8}$ | 29. $\frac{150,025}{210,035}$ R. $\frac{5}{7}$ |
| 10. $\frac{1,212}{1,515}$ R. $\frac{4}{5}$ | 20. $\frac{2,138}{19,242}$ R. $\frac{1}{9}$ | 30. $\frac{691,320}{881,433}$ R. $\frac{40}{51}$ |

364

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES COMPUESTAS

Para simplificar expresiones fraccionarias cuyo numerador sea un producto indicado y su denominador otro producto, se van dividiendo los factores del numerador y denomi-

nador entre sus factores comunes hasta que no haya factores comunes al numerador y denominador.

Simplificar

$$\frac{12 \times 10 \times 35}{16 \times 14 \times 21}$$

Tendremos:

$$\frac{12 \times 10 \times 35}{16 \times 14 \times 21} = \frac{1 \times 5 \times 5}{4 \times 7 \times 1} = \frac{25}{28} \quad \text{R.}$$

Dividimos 12 y 16 entre 4 y obtenemos de cocientes 3 y 4; 10 y 14 entre 2 y obtenemos de cocientes 5 y 7; 35 y 21 entre 7 y obtenemos de cocientes 5 y 3; 3 y 3 entre 3 y obtenemos los cocientes 1 y 1. En el numerador queda $1 \times 5 \times 5$ y en el denominador $4 \times 7 \times 1$ o sea $\frac{25}{28}$.

Ejemplo

Simplificar:

1. $\frac{2 \times 6}{6 \times 8}$

R. $\frac{1}{4}$

2. $\frac{10 \times 7}{7 \times 5}$

R. 2

3. $\frac{9 \times 8}{18 \times 6}$

R. $\frac{2}{3}$

4. $\frac{2 \times 6}{14 \times 8}$

R. $\frac{3}{28}$

5. $\frac{3 \times 2 \times 5}{6 \times 4 \times 10}$

R. $\frac{1}{8}$

6. $\frac{5 \times 20 \times 18}{3 \times 6 \times 10}$

R. 10

7. $\frac{49 \times 56 \times 32}{14 \times 143 \times 84}$

R. $\frac{224}{429}$

8. $\frac{8 \times 9 \times 49 \times 33}{21 \times 28 \times 11 \times 6}$

R. 3

9. $\frac{17 \times 28 \times 204 \times 3,200}{50 \times 100 \times 49 \times 34}$

R. $37\frac{53}{175}$

10. $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 7}{4 \times 12 \times 10 \times 18 \times 14}$

R. $\frac{1}{96}$

11. $\frac{12 \times 9 \times 25 \times 35 \times 34}{16 \times 10 \times 27 \times 49 \times 17}$

R. $\frac{25}{28}$

12. $\frac{350 \times 1,200 \times 4,000 \times 620 \times 340}{1,000 \times 50 \times 200 \times 800 \times 170}$

R. $260\frac{2}{5}$

115

Ejercicio

REDUCCIÓN DE QUEBRADOS AL MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR

REGLA

Se simplifican los quebrados dados. Hecho esto, se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores y éste será el denominador común. Para hallar los numeradores se divide el m. c. m. entre cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

365

Ejemplos

- 1) Reducir al mínimo común denominador $\frac{2}{3}, \frac{35}{60}$ y $\frac{5}{180}$.

Simplificamos los quebrados y queda: $\frac{2}{3}, \frac{7}{12}$ y $\frac{1}{36}$.

Hallaremos el m. c. m. de los denominadores 3, 12 y 36 que será 36 porque 3 y 12 son divisores de 36. 36 será el denominador común.

Para hallar el numerador del primer quebrado dividimos el m. c. m. 36 entre el primer denominador: $36 \div 3 = 12$, y multiplicamos este cociente 12 por el primer numerador 2, $12 \times 2 = 24$.

Para hallar el segundo denominador dividimos el m. c. m. 36 entre el denominador del segundo quebrado 12, $36 \div 12 = 3$ y multiplicamos este cociente 3 por el segundo numerador 7, $3 \times 7 = 21$.

Para hallar el tercer numerador dividimos el m. c. m. 36 entre el tercer denominador 36, $36 \div 36 = 1$, y este cociente 1 lo multiplicamos por el tercer numerador 1, $1 \times 1 = 1$.

$$\text{m. c. m.} = 36$$

$$\begin{array}{ll} 36 \div 3 = 12 & \frac{2}{3} = \frac{2 \times 12}{36} = \frac{24}{36} \\ 36 \div 12 = 3 & \frac{7}{12} = \frac{7 \times 3}{36} = \frac{21}{36} \\ 36 \div 36 = 1 & \frac{1}{36} = \frac{1 \times 1}{36} = \frac{1}{36} \end{array}$$

R.

- 2) Reducir al mínimo común denominador los quebrados $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}$ y $\frac{11}{14}$.

Hallamos el m. c. m. de 8 y 14, pues 4 está contenido en 8 y 7 en 14.

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 2} \\ 4 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 2} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 2} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$$\text{m. c. m.} = 2^3 \times 7 = 56$$

$$\begin{array}{ll} 56 \div 4 = 14 & \frac{3}{4} = \frac{3 \times 14}{56} = \frac{42}{56} \\ 56 \div 7 = 8 & \frac{5}{7} = \frac{5 \times 8}{56} = \frac{40}{56} \\ 56 \div 8 = 7 & \frac{5}{8} = \frac{5 \times 7}{56} = \frac{35}{56} \\ 56 \div 14 = 4 & \frac{11}{14} = \frac{11 \times 4}{56} = \frac{44}{56} \end{array}$$

R.

116

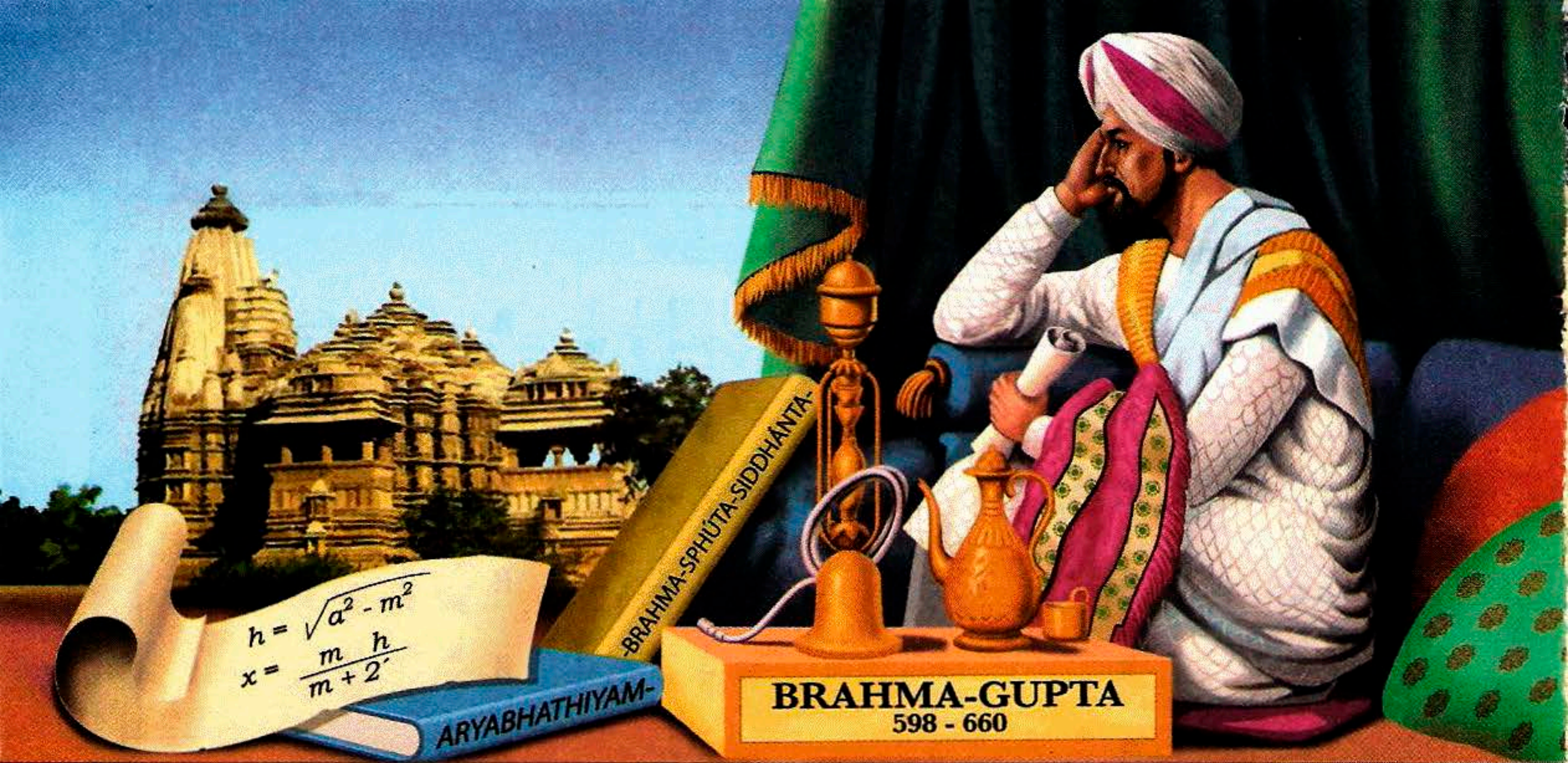
Ejercicio

Reducir al mínimo común denominador, por simple inspección:

- | | | | |
|--|---|--|--|
| 1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ | R. $\frac{2}{4}, \frac{1}{4}$ | 11. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}$ | R. $\frac{8}{16}, \frac{12}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}$ |
| 2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ | R. $\frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ | 12. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{5}{27}, \frac{1}{81}$ | R. $\frac{27}{81}, \frac{18}{81}, \frac{15}{81}, \frac{1}{81}$ |
| 3. $\frac{2}{5}, \frac{1}{15}$ | R. $\frac{6}{15}, \frac{1}{15}$ | 13. $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{7}{20}, \frac{11}{40}$ | R. $\frac{8}{40}, \frac{12}{40}, \frac{14}{40}, \frac{11}{40}$ |
| 4. $\frac{1}{7}, \frac{4}{21}$ | R. $\frac{3}{21}, \frac{4}{21}$ | 14. $\frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{7}{15}, \frac{4}{30}$ | R. $\frac{5}{30}, \frac{9}{30}, \frac{14}{30}, \frac{4}{30}$ |
| 5. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}$ | R. $\frac{3}{9}, \frac{2}{9}$ | 15. $\frac{1}{6}, \frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{7}{36}$ | R. $\frac{6}{36}, \frac{28}{36}, \frac{15}{36}, \frac{7}{36}$ |
| 6. $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{20}$ | R. $\frac{4}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}$ | 16. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ | R. $\frac{4}{12}, \frac{3}{12}$ |
| 7. $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ | R. $\frac{8}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}$ | 17. $\frac{3}{4}, \frac{1}{10}$ | R. $\frac{15}{20}, \frac{2}{20}$ |
| 8. $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ | R. $\frac{4}{16}, \frac{2}{16}, \frac{1}{16}$ | 18. $\frac{7}{10}, \frac{4}{15}$ | R. $\frac{21}{30}, \frac{8}{30}$ |
| 9. $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$ | R. $\frac{4}{24}, \frac{2}{24}, \frac{1}{24}$ | 19. $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ | R. $\frac{3}{18}, \frac{2}{18}$ |
| 10. $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{7}{18}$ | R. $\frac{12}{18}, \frac{10}{18}, \frac{7}{18}$ | 20. $\frac{5}{8}, \frac{11}{12}$ | R. $\frac{15}{24}, \frac{22}{24}$ |

Reducir al mínimo común denominador:

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 1. $\frac{3}{8}, \frac{7}{30}$ | R. $\frac{45}{120}, \frac{28}{120}$ | 9. $\frac{1}{6}, \frac{7}{14}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ | R. $\frac{10}{60}, \frac{30}{60}, \frac{3}{60}, \frac{2}{60}$ |
| 2. $\frac{7}{12}, \frac{11}{15}$ | R. $\frac{35}{60}, \frac{44}{60}$ | 10. $\frac{3}{5}, \frac{1}{12}, \frac{5}{8}, \frac{7}{120}$ | R. $\frac{72}{120}, \frac{10}{120}, \frac{75}{120}, \frac{7}{120}$ |
| 3. $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}$ | R. $\frac{12}{72}, \frac{16}{72}, \frac{27}{72}$ | 11. $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{15}{48}, \frac{1}{64}$ | R. $\frac{56}{64}, \frac{48}{64}, \frac{20}{64}, \frac{1}{64}$ |
| 4. $\frac{1}{10}, \frac{3}{15}, \frac{8}{36}$ | R. $\frac{5}{50}, \frac{10}{50}, \frac{16}{50}$ | 12. $\frac{3}{16}, \frac{1}{21}, \frac{2}{15}, \frac{7}{48}$ | R. $\frac{315}{1,680}, \frac{80}{1,680}, \frac{224}{1,680}, \frac{245}{1,680}$ |
| 5. $\frac{1}{10}, \frac{3}{27}, \frac{7}{30}$ | R. $\frac{9}{90}, \frac{10}{90}, \frac{21}{90}$ | 13. $\frac{5}{11}, \frac{7}{121}, \frac{8}{9}, \frac{5}{44}$ | R. $\frac{1,980}{4,356}, \frac{252}{4,356}, \frac{3,872}{4,356}, \frac{495}{4,356}$ |
| 6. $\frac{5}{6}, \frac{7}{20}, \frac{11}{25}$ | R. $\frac{250}{300}, \frac{105}{300}, \frac{132}{300}$ | 14. $\frac{2}{24}, \frac{18}{48}, \frac{5}{22}, \frac{7}{44}$ | R. $\frac{22}{264}, \frac{99}{264}, \frac{60}{264}, \frac{42}{264}$ |
| 7. $\frac{7}{15}, \frac{2}{45}, \frac{11}{60}$ | R. $\frac{84}{180}, \frac{8}{180}, \frac{33}{180}$ | 15. $\frac{3}{14}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{3}{28}$ | R. $\frac{54}{252}, \frac{28}{252}, \frac{35}{252}, \frac{27}{252}$ |
| 8. $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{7}{12}, \frac{11}{24}$ | R. $\frac{36}{72}, \frac{16}{72}, \frac{42}{72}, \frac{33}{72}$ | 16. $\frac{2}{13}, \frac{3}{21}, \frac{5}{25}, \frac{3}{169}$ | R. $\frac{455}{5,915}, \frac{845}{5,915}, \frac{1,183}{5,915}, \frac{105}{5,915}$ |



Las reglas para la resolución de las operaciones con números fraccionarios o quebrados, datan de la época de **Aryabhata**, siglo VI y **Brahmagupta**, siglo VII, ambos d. C. Un estudio más amplio y sistemático de las operaciones con quebrados lo

ofrecieron los también indios **Mahavira**, en el siglo IX, y **Bhaskara** en el siglo XII. Dichas reglas son las mismas que se emplean en la actualidad.

Capítulo **XXV**

OPERACIONES CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

I. SUMA

366

SUMA DE QUEBRADOS DE IGUAL DENOMINADOR

REGLA

Se suman los numeradores y esta suma se divide entre el denominador común. Se simplifica el resultado y se hallan los enteros si los hay.

Ejemplo

Efectuar $\frac{7}{9} + \frac{10}{9} + \frac{4}{9}$.

$$\frac{7}{9} + \frac{10}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7+10+4}{9} = \frac{21}{9} = (\text{simplif.}) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \quad \text{R.}$$

118

Simplificar:

Ejercicio

1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

R. 1

3. $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{2}{8}$

R. $1\frac{1}{4}$

2. $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}$

R. $1\frac{4}{5}$

4. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{7}{9}$

R. $1\frac{5}{9}$

$$5. \frac{3}{11} + \frac{7}{11} + \frac{12}{11} \quad \text{R. } 2$$

$$6. \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{7}{4} \quad \text{R. } 4$$

$$7. \frac{1}{6} + \frac{7}{6} + \frac{11}{6} + \frac{13}{6} \quad \text{R. } 5\frac{1}{3}$$

$$8. \frac{5}{7} + \frac{8}{7} + \frac{10}{7} + \frac{15}{7} \quad \text{R. } 5\frac{3}{7}$$

$$9. \frac{3}{17} + \frac{8}{17} + \frac{11}{17} + \frac{23}{17} \quad \text{R. } 2\frac{11}{17}$$

$$10. \frac{5}{21} + \frac{10}{21} + \frac{23}{21} + \frac{4}{21} \quad \text{R. } 2$$

$$11. \frac{5}{24} + \frac{7}{24} + \frac{11}{24} + \frac{13}{24} + \frac{17}{24} \quad \text{R. } 2\frac{5}{24}$$

$$12. \frac{18}{53} + \frac{32}{53} + \frac{40}{53} + \frac{1}{53} + \frac{16}{53} \quad \text{R. } 2\frac{1}{53}$$

$$13. \frac{41}{79} + \frac{37}{79} + \frac{25}{79} + \frac{71}{79} + \frac{63}{79} \quad \text{R. } 3$$

$$14. \frac{17}{84} + \frac{3}{84} + \frac{5}{84} + \frac{11}{84} + \frac{6}{84} \quad \text{R. } \frac{1}{2}$$

SUMA DE QUEBRADOS DE DISTINTO DENOMINADOR

367

REGLA

Se simplifican los quebrados dados si es posible. Después de ser irreducibles se reducen al mínimo común denominador y se procede como en el caso anterior.

Efectuar

$$\frac{12}{48} + \frac{21}{49} + \frac{23}{60}$$

Simplificando los quebrados, queda: $\frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{23}{60}$.

Reduzcamos al mínimo común denominador. Hallamos el m. c. m. de los denominadores para lo cual prescindimos de 4 por ser divisor de 60 y como 60 y 7 son primos entre sí, el m. c. m. será su producto: $60 \times 7 = 420$.

420 será el mínimo común denominador. Tendremos:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{23}{60} = \frac{105 + 180 + 161}{420} = \frac{446}{420} = (\text{simplif.}) = \frac{223}{210} = 1\frac{13}{210} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

Simplificar:

$$1. \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \quad \text{R. } 1\frac{1}{2}$$

$$2. \frac{5}{12} + \frac{7}{24} \quad \text{R. } \frac{17}{24}$$

$$3. \frac{5}{8} + \frac{11}{64} \quad \text{R. } \frac{51}{64}$$

$$4. \frac{7}{24} + \frac{11}{30} \quad \text{R. } \frac{79}{120}$$

$$5. \frac{8}{26} + \frac{15}{39} \quad \text{R. } \frac{9}{13}$$

$$6. \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{1}{16} \quad \text{R. } 2\frac{3}{16}$$

$$7. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \text{R. } \frac{7}{8}$$

$$8. \frac{7}{5} + \frac{8}{15} + \frac{11}{60} \quad \text{R. } 2\frac{7}{60}$$

$$9. \frac{9}{10} + \frac{8}{15} + \frac{13}{75} \quad \text{R. } 1\frac{91}{150}$$

$$10. \frac{3}{21} + \frac{1}{2} + \frac{2}{49} \quad \text{R. } \frac{67}{98}$$

$$11. \frac{3}{5} + \frac{7}{4} + \frac{11}{6} \quad \text{R. } 4\frac{11}{60}$$

$$12. \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} \quad \text{R. } \frac{29}{144}$$

$$13. \frac{7}{50} + \frac{11}{40} + \frac{13}{60} \quad \text{R. } \frac{379}{600}$$

$$14. \frac{8}{60} + \frac{13}{90} + \frac{7}{120} \quad \text{R. } \frac{121}{360}$$

119

Ejercicio

- | | | | |
|---|------------------------|---|-------------------------|
| 15. $\frac{5}{14} + \frac{7}{70} + \frac{3}{98}$ | R. $\frac{239}{490}$ | 23. $\frac{7}{90} + \frac{11}{30} + \frac{3}{80} + \frac{7}{40}$ | R. $\frac{473}{720}$ |
| 16. $\frac{13}{121} + \frac{4}{55} + \frac{9}{10}$ | R. $1\frac{97}{1,210}$ | 24. $\frac{8}{72} + \frac{71}{144} + \frac{5}{36} + \frac{8}{27}$ | R. $1\frac{17}{432}$ |
| 17. $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{2}{21} + \frac{4}{63}$ | R. $1\frac{34}{63}$ | 25. $\frac{7}{39} + \frac{11}{26} + \frac{2}{3} + \frac{8}{9}$ | R. $2\frac{37}{234}$ |
| 18. $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10}$ | R. $2\frac{3}{40}$ | 26. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{7}{24} + \frac{11}{30}$ | R. $1\frac{19}{120}$ |
| 19. $\frac{7}{20} + \frac{3}{40} + \frac{1}{80} + \frac{3}{15}$ | R. $\frac{51}{80}$ | 27. $\frac{7}{25} + \frac{8}{105} + \frac{9}{21} + \frac{11}{50} + \frac{1}{63}$ | R. $1\frac{13}{360}$ |
| 20. $\frac{2}{300} + \frac{5}{500} + \frac{2}{1,000} + \frac{7}{250}$ | R. $\frac{7}{150}$ | 28. $\frac{19}{18} + \frac{61}{72} + \frac{13}{216} + \frac{1}{10} + \frac{3}{5}$ | R. $2\frac{179}{270}$ |
| 21. $\frac{5}{16} + \frac{2}{48} + \frac{1}{9} + \frac{3}{18}$ | R. $\frac{91}{144}$ | 29. $\frac{1}{324} + \frac{1}{162} + \frac{5}{108} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$ | R. $\frac{11}{63}$ |
| 22. $\frac{6}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51} + \frac{4}{3}$ | R. $1\frac{25}{34}$ | 30. $\frac{1}{900} + \frac{101}{300} + \frac{13}{60} + \frac{17}{45} + \frac{19}{54}$ | R. $1\frac{767}{2,700}$ |

368

SUMA DE NÚMEROS MIXTOS

La suma de números mixtos puede verificarse por dos procedimientos.

REGLA DEL PRIMER PROCEDIMIENTO

Se suman separadamente los enteros y los quebrados. A la suma de los enteros se añade la suma de los quebrados, y el resultado de esta suma será la suma total.

Ejemplo

Sumar $5\frac{2}{3} + 6\frac{4}{8} + 3\frac{1}{6}$.

Suma de los enteros: $5 + 6 + 3 = 14$

Suma de los quebrados:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{8} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4+3+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

La suma de los enteros 14, se suma con la suma de los quebrados $1\frac{1}{3}$:

$$14 + 1\frac{1}{3} = 15\frac{1}{3} \quad \text{R.}$$

REGLA DEL SEGUNDO PROCEDIMIENTO

Se reducen los mixtos a quebrados y se suman estos quebrados.

Ejemplo

Sumar $5\frac{2}{3} + 6\frac{4}{8} + 3\frac{1}{6}$ (los mismos del ej. anterior).

$$\frac{17}{3} + \frac{13}{2} + \frac{19}{6} = \frac{34+39+19}{6} = \frac{92}{6} = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3} \quad \text{R.}$$

120

Ejercicio

Simplificar:

1. $3\frac{1}{4} + 5\frac{3}{4}$

R. 9

2. $8\frac{3}{7} + 6\frac{5}{7}$

R. $15\frac{1}{7}$

3. $9\frac{3}{5} + 4\frac{1}{10}$

R. $13\frac{7}{10}$

4. $7\frac{1}{8} + 3\frac{5}{24}$

R. $10\frac{1}{3}$

5. $12\frac{5}{6} + 13\frac{7}{9}$

R. $26\frac{11}{18}$

6. $1\frac{1}{10} + 1\frac{1}{100}$

R. $2\frac{11}{100}$

7. $5\frac{1}{8} + 6\frac{3}{20}$

R. $11\frac{11}{40}$

8. $8\frac{7}{20} + 5\frac{11}{25}$

R. $13\frac{79}{100}$

9. $3\frac{1}{65} + 11\frac{1}{26}$

R. $14\frac{7}{130}$

10. $7\frac{9}{55} + 8\frac{13}{44}$

R. $15\frac{101}{220}$

11. $5\frac{4}{5} + 6\frac{2}{5} + 8\frac{3}{5}$

R. $20\frac{4}{5}$

12. $8\frac{1}{9} + 10\frac{7}{9} + 16\frac{1}{9}$

R. 35

13. $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}$

R. 5

14. $5\frac{3}{4} + 6\frac{1}{3} + 8\frac{1}{12}$

R. $20\frac{1}{6}$

15. $2\frac{1}{5} + 4\frac{1}{10} + 8\frac{3}{25}$

R. $14\frac{21}{50}$

16. $3\frac{3}{4} + 5\frac{5}{9} + 7\frac{1}{12}$

R. $16\frac{7}{18}$

17. $4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{10} + 2\frac{1}{15}$

R. $9\frac{1}{3}$

18. $1\frac{1}{8} + 5\frac{3}{20} + 6\frac{5}{10}$

R. $12\frac{23}{40}$

19. $6\frac{1}{27} + 4\frac{1}{18} + 1\frac{1}{54}$

R. $11\frac{1}{9}$

20. $1\frac{1}{42} + 3\frac{1}{14} + 10\frac{11}{84}$

R. $14\frac{19}{84}$

21. $6\frac{1}{11} + 7\frac{5}{11} + 8\frac{2}{11} + 4\frac{3}{11}$

R. 26

22. $4\frac{1}{4} + 5\frac{1}{8} + 7\frac{1}{16} + 1\frac{1}{32}$

R. $17\frac{15}{32}$

23. $3\frac{1}{5} + 4\frac{1}{10} + 1\frac{1}{50} + 2\frac{3}{25}$

R. $10\frac{11}{25}$

24. $1\frac{1}{5} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{15} + 4\frac{1}{60}$

R. $10\frac{8}{15}$

25. $5\frac{3}{7} + 3\frac{1}{14} + 2\frac{1}{6} + 7\frac{1}{2}$

R. $18\frac{1}{6}$

26. $1\frac{1}{5} + 4\frac{1}{80} + 5\frac{1}{16} + 2\frac{1}{40}$

R. $12\frac{3}{10}$

27. $2\frac{1}{18} + 6\frac{7}{15} + 4\frac{1}{45} + 7\frac{1}{90}$

R. $19\frac{5}{9}$

28. $4\frac{1}{31} + 1\frac{1}{62} + 1\frac{3}{93} + 4\frac{1}{4}$

R. $10\frac{119}{372}$

29. $1\frac{1}{10} + 1\frac{1}{100} + 1\frac{1}{1,000} + 1\frac{1}{10,000}$

R. $4\frac{1,111}{10,000}$

30. $3\frac{1}{160} + 2\frac{1}{45} + 4\frac{7}{60} + 1\frac{1}{800}$

R. $10\frac{527}{3,600}$

SUMA DE ENTEROS, MIXTOS Y QUEBRADOS

369

REGLA

Se suman los enteros con los enteros de los números mixtos, se suman los quebrados y a la suma de los enteros se añade la suma de los quebrados.

Efectuar $5 + 4\frac{7}{8} + \frac{3}{9} + 4\frac{1}{12}$.

Sumando los enteros:

$$5 + 4 + 4 = 13$$

Sumando los quebrados:

$$\frac{7}{8} + \frac{3}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{21 + 8 + 2}{24} = \frac{31}{24} = 1\frac{7}{24}$$

$$13 + 1\frac{7}{24} = 14\frac{7}{24} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

121

Simplificar:

Ejercicio

- | | | | |
|--|------------------------|---|------------------------|
| 1. $7 + \frac{8}{7}$ | R. $8\frac{1}{7}$ | 11. $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}$ | R. $1\frac{1}{4}$ |
| 2. $18 + \frac{6}{5}$ | R. $19\frac{1}{5}$ | 12. $\left(\frac{3}{80} + \frac{5}{40}\right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{8}\right)$ | R. $1\frac{43}{80}$ |
| 3. $\frac{14}{12} + 60$ | R. $61\frac{1}{6}$ | 13. $\left(3 + 2\frac{3}{5}\right) + \left(4\frac{1}{3} + \frac{3}{20}\right)$ | R. $10\frac{1}{12}$ |
| 4. $14 + 5\frac{2}{3}$ | R. $19\frac{2}{3}$ | 14. $\left(\frac{7}{8} + \frac{5}{32}\right) + \left(6\frac{1}{6} + 7\frac{1}{4}\right)$ | R. $14\frac{43}{96}$ |
| 5. $8\frac{1}{4} + 6 + \frac{3}{8}$ | R. $14\frac{5}{8}$ | 15. $\left(9 + \frac{1}{18}\right) + \left(\frac{7}{24} + 6\right)$ | R. $15\frac{25}{72}$ |
| 6. $\frac{3}{48} + 10 + 3\frac{1}{5} + 8$ | R. $21\frac{21}{80}$ | 16. $\left(7\frac{3}{5} + 4\frac{1}{12} + 1\frac{1}{24}\right) + \left(6 + \frac{1}{18}\right)$ | R. $18\frac{281}{360}$ |
| 7. $6 + 2\frac{1}{30} + 5 + 7\frac{1}{45}$ | R. $20\frac{1}{18}$ | 17. $\left(\frac{1}{28} + \frac{7}{14} + \frac{5}{56}\right) + \left(1 + \frac{1}{112}\right)$ | R. $1\frac{71}{112}$ |
| 8. $2\frac{1}{20} + 3\frac{5}{40} + 9 + \frac{7}{36}$ | R. $14\frac{133}{360}$ | 18. $\left(6 + \frac{1}{32} + 4\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{16} + 2\frac{1}{10}\right)$ | R. $12\frac{63}{160}$ |
| 9. $\frac{7}{45} + 4 + \frac{11}{60} + 2\frac{1}{90}$ | R. $6\frac{7}{20}$ | 19. $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{25} + \frac{4}{50}\right)$ | R. $1\frac{1}{30}$ |
| 10. $4 + \frac{7}{48} + 8\frac{1}{57} + \frac{1}{114}$ | R. $12\frac{9}{76}$ | 20. $\left(5\frac{1}{6} + 2\frac{1}{9} + 3\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{3} + \frac{2}{15}\right)$ | R. $13\frac{77}{180}$ |

122

Ejercicio

- Un hombre camina $4\frac{1}{2}$ km el lunes, $8\frac{2}{3}$ km el martes, 10 km el miércoles y $\frac{5}{8}$ de km el jueves. ¿Cuánto ha recorrido en los cuatro días? R. $23\frac{19}{24}$ km
- Pedro ha estudiado $3\frac{2}{3}$ horas, Enrique $5\frac{3}{4}$ horas y Juan 6 horas. ¿Cuánto han estudiado los tres juntos? R. $15\frac{5}{12}$ h
- Un campesino ha cosechado 2,500 kilos de papas, $250\frac{1}{8}$ de trigo y $180\frac{2}{9}$ de arroz. ¿Cuántos kilos ha cosechado en conjunto? R. $2,930\frac{25}{72}$ kilos
- Tres varillas tienen: la 1ª, $8\frac{2}{5}$ pies de largo; la 2ª, $10\frac{3}{10}$ pies y la 3ª $14\frac{1}{20}$ pies. ¿Cuál es la longitud de las tres? R. $32\frac{3}{4}$ pies
- El lunes ahorré $\$2\frac{3}{4}$; el martes $\$5\frac{5}{8}$; el miércoles $\$7\frac{1}{12}$ y el jueves $\$1\frac{1}{24}$. ¿Cuánto tengo? R. $\$16\frac{1}{2}$
- Un hombre recorre en la 1ª hora 10 km, en la 2ª $9\frac{2}{7}$ km, en la 3ª $8\frac{3}{14}$ km y en la 4ª $6\frac{1}{56}$ km. ¿Cuánto ha recorrido en las cuatro horas? R. $33\frac{29}{56}$ km

7. Cuatro hombres pesan $150\frac{3}{4}$, $160\frac{5}{8}$, $165\frac{1}{12}$ y 180 libras respectivamente. ¿Cuánto pesan entre los cuatro? **R. $656\frac{11}{24}$ lb**
8. Pedro tiene $22\frac{2}{9}$ años, Juan $6\frac{1}{3}$ años más que Pedro y Matías tanto como Juan y Pedro juntos. ¿Cuánto suman las tres edades? **R. $101\frac{5}{9}$ años**
9. Un muchacho tenía $\$ \frac{3}{5}$ y su padre le dio $\$ \frac{7}{20}$. ¿Qué parte de \$1 tiene? **R. $\frac{19}{20}$**
10. Un cosechero vendió $350\frac{2}{3}$ kilos de papas, $750\frac{5}{12}$ kilos de arroz, $125\frac{3}{8}$ kilos de frijoles y $116\frac{1}{18}$ kilos de café. ¿Cuántos kilos de mercancías ha vendido? **R. $1,342\frac{37}{72}$ kilos**

II. RESTA

RESTA DE QUEBRADOS DE IGUAL DENOMINADOR

370

REGLA

Se restan los numeradores y esta diferencia se divide entre el denominador común. Se simplifica el resultado y se hallan los enteros si los hay.

Efectuar $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$.

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12} = (\text{simplif.}) = \frac{1}{6} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

Simplificar, por simple inspección:

1. $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$

R. $\frac{3}{5}$

6. $\frac{24}{35} - \frac{10}{35}$

R. $\frac{2}{5}$

11. $\frac{46}{51} - \frac{20}{51} - \frac{9}{51}$

R. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{11}{14} - \frac{5}{14}$

R. $\frac{3}{7}$

7. $\frac{19}{42} - \frac{12}{42}$

R. $\frac{1}{6}$

12. $\frac{35}{84} - \frac{19}{84} - \frac{8}{84}$

R. $\frac{2}{21}$

3. $\frac{17}{20} - \frac{7}{20}$

R. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} - \frac{1}{8}$

R. $\frac{1}{8}$

13. $\frac{7}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

R. 1

4. $\frac{8}{15} - \frac{3}{15}$

R. $\frac{1}{3}$

9. $\frac{11}{12} - \frac{7}{12} - \frac{4}{12}$

R. 0

14. $\frac{13}{8} - \frac{3}{8} - \frac{5}{8} - \frac{1}{8}$

R. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{9}{16} - \frac{5}{16}$

R. $\frac{1}{4}$

10. $\frac{23}{25} - \frac{11}{25} - \frac{7}{25}$

R. $\frac{1}{5}$

15. $\frac{19}{21} - \frac{2}{21} - \frac{4}{21} - \frac{6}{21}$

R. $\frac{1}{3}$

123

Ejercicio

RESTA DE QUEBRADOS DE DISTINTO DENOMINADOR

371

REGLA

Se simplifican los quebrados si es posible. Una vez irreducibles, se reducen al mínimo común denominador y se restan como en el caso anterior.

Ejemplo

Efectuar $\frac{5}{40} - \frac{4}{320}$.

Simplificando los quebrados, queda: $\frac{1}{8} - \frac{1}{80}$

Reduciendo al mínimo común denominador:

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{80} = \frac{10-1}{80} = \frac{9}{80} \quad \text{R.}$$

124

Simplificar:

Ejercicio

1. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

R. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{3}{5} - \frac{1}{10}$

R. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{7}{12} - \frac{1}{4}$

R. $\frac{1}{3}$

4. $\frac{11}{8} - \frac{7}{24}$

R. $1\frac{1}{12}$

5. $\frac{3}{7} - \frac{2}{49}$

R. $\frac{19}{49}$

6. $\frac{3}{8} - \frac{1}{12}$

R. $\frac{7}{24}$

7. $\frac{7}{6} - \frac{7}{8}$

R. $\frac{7}{24}$

8. $\frac{11}{10} - \frac{14}{15}$

R. $\frac{1}{6}$

9. $\frac{11}{12} - \frac{7}{16}$

R. $\frac{23}{48}$

10. $\frac{7}{62} - \frac{3}{155}$

R. $\frac{29}{310}$

11. $\frac{7}{80} - \frac{1}{90}$

R. $\frac{11}{144}$

12. $\frac{11}{150} - \frac{2}{175}$

R. $\frac{13}{210}$

13. $\frac{93}{120} - \frac{83}{150}$

R. $\frac{133}{600}$

14. $\frac{101}{114} - \frac{97}{171}$

R. $\frac{109}{342}$

15. $\frac{57}{160} - \frac{17}{224}$

R. $\frac{157}{560}$

16. $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{40}$

R. $\frac{7}{20}$

17. $\frac{3}{15} - \frac{1}{45} - \frac{1}{90}$

R. $\frac{1}{6}$

18. $\frac{3}{2} - \frac{2}{121} - \frac{5}{11}$

R. $1\frac{7}{242}$

19. $\frac{7}{35} - \frac{1}{100} - \frac{11}{1,000}$

R. $\frac{179}{1,000}$

20. $\frac{19}{36} - \frac{7}{80} - \frac{11}{90}$

R. $\frac{229}{720}$

372

RESTA DE ENTERO Y QUEBRADO

REGLA

Se quita una unidad al entero, que se pone en forma de quebrado de igual denominador que el quebrado dado, y se restan ambos quebrados.

Ejemplos

1) Efectuar $15 - \frac{3}{8}$.

$$15 - \frac{3}{8} = 14\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 14\frac{5}{8} \quad \text{R.}$$

2) Efectuar $75 - \frac{11}{126}$.

$$75 - \frac{11}{126} = 74\frac{126}{126} - \frac{11}{126} = 74\frac{115}{126} \quad \text{R.}$$

125

Simplificar, por simple inspección:

Ejercicio

1. $8 - \frac{2}{3}$

R. $7\frac{1}{3}$

3. $13 - \frac{7}{8}$

R. $12\frac{1}{8}$

5. $25 - \frac{2}{13}$

R. $24\frac{11}{13}$

2. $9 - \frac{9}{10}$

R. $8\frac{1}{10}$

4. $16 - \frac{1}{11}$

R. $15\frac{10}{11}$

6. $30 - \frac{7}{24}$

R. $29\frac{17}{24}$

7. $32 - \frac{17}{80}$	R. $31\frac{63}{80}$	11. $125 - \frac{1}{125}$	R. $124\frac{124}{125}$
8. $81 - \frac{1}{90}$	R. $80\frac{89}{90}$	12. $215 - \frac{3}{119}$	R. $214\frac{116}{119}$
9. $93 - \frac{45}{83}$	R. $92\frac{38}{83}$	13. $316 - \frac{11}{415}$	R. $315\frac{404}{415}$
10. $106 - \frac{104}{119}$	R. $105\frac{15}{119}$	14. $819 - \frac{7}{735}$	R. $818\frac{104}{105}$

RESTA DE NÚMEROS MIXTOS

373

Se puede efectuar por dos procedimientos:

REGLA DEL PRIMER PROCEDIMIENTO

Se restan separadamente los enteros y los quebrados y a la resta de los enteros se añade la resta de los quebrados.

1) Efectuar $15\frac{5}{8} - 10\frac{7}{12}$.

Resta de los enteros: $15 - 10 = 5$

Resta de los quebrados: $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{15 - 14}{24} = \frac{1}{24}$

A la diferencia de los enteros, 5, añado la diferencia de los quebrados $\frac{1}{24}$ y tengo:

$$5 + \frac{1}{24} = 5\frac{1}{24} \quad \text{R.}$$

2) Efectuar $9\frac{2}{7} - 5\frac{3}{4}$.

Resta de los enteros: $9 - 5 = 4$

Resta de los quebrados: $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} = \frac{8 - 21}{28}$

No podemos efectuar esta resta, lo que nos indica que el quebrado $\frac{2}{7}$ es menor que $\frac{3}{4}$.

Para efectuar la resta, quitamos una unidad de la diferencia de los enteros 4, quedando $4 - 1 = 3$ enteros y esta unidad la ponemos en forma de $\frac{7}{7}$, se la añadimos a $\frac{2}{7}$ y tendremos:

$$\left(\frac{7}{7} + \frac{2}{7}\right) - \frac{3}{4} = \frac{9}{7} - \frac{3}{4} = \frac{36 - 21}{28} = \frac{15}{28}$$

A los enteros que nos quedaron después de quitar la unidad, o sea 3, añadimos esta diferencia de los quebrados y tenemos:

$$3 + \frac{15}{28} = 3\frac{15}{28} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

REGLA DEL SEGUNDO PROCEDIMIENTO

Se reducen los mixtos a quebrados y se restan como quebrados.

Ejemplo

Efectuar $5\frac{1}{6} - 3\frac{1}{8}$.

$$5\frac{1}{6} - 3\frac{1}{8} = \frac{31}{6} - \frac{25}{8} = \frac{124 - 75}{24} = \frac{49}{24} = 2\frac{1}{24} \quad \text{R.}$$

126

Simplificar:

Ejercicio

1. $6\frac{5}{6} - 3\frac{1}{6}$

R. $3\frac{2}{3}$

2. $7\frac{3}{5} - 4\frac{3}{10}$

R. $3\frac{3}{10}$

3. $8\frac{5}{6} - 5\frac{1}{12}$

R. $3\frac{3}{4}$

4. $9\frac{7}{8} - 2\frac{5}{24}$

R. $7\frac{2}{3}$

5. $10\frac{5}{6} - 2\frac{7}{9}$

R. $8\frac{1}{18}$

6. $12\frac{2}{3} - 7\frac{1}{11}$

R. $5\frac{19}{33}$

7. $6\frac{23}{30} - 2\frac{7}{40}$

R. $4\frac{71}{120}$

8. $11\frac{3}{8} - 5\frac{1}{24}$

R. $6\frac{1}{3}$

9. $19\frac{5}{7} - 12\frac{8}{105}$

R. $7\frac{67}{105}$

10. $14\frac{11}{45} - 5\frac{7}{60}$

R. $9\frac{23}{180}$

11. $9\frac{1}{6} - 7\frac{2}{3}$

R. $1\frac{1}{2}$

12. $8\frac{1}{8} - 2\frac{3}{4}$

R. $5\frac{3}{8}$

13. $25\frac{7}{50} - 14\frac{6}{25}$

R. $10\frac{9}{10}$

14. $80\frac{3}{8} - 53\frac{5}{9}$

R. $26\frac{59}{72}$

15. $115\frac{5}{27} - 101\frac{7}{9}$

R. $13\frac{11}{27}$

16. $182\frac{13}{90} - 116\frac{11}{40}$

R. $65\frac{313}{360}$

17. $215\frac{23}{80} - 183\frac{7}{50}$

R. $32\frac{59}{400}$

18. $312\frac{11}{90} - 219\frac{5}{36}$

R. $92\frac{59}{60}$

19. $301\frac{3}{45} - 300\frac{7}{80}$

R. $\frac{47}{48}$

20. $401\frac{11}{51} - 400\frac{9}{17}$

R. $\frac{35}{51}$

374**RESTA DE ENTERO Y MIXTO****REGLA**

Se quita una unidad al entero, que se pone en forma de quebrado de igual denominador que el quebrado del sustraendo y luego se restan separadamente los enteros y los quebrados.

Ejemplos

1) Efectuar $6 - 4\frac{1}{3}$.

Quitamos una unidad a 6 que la ponemos en forma de $\frac{3}{3}$ y tendremos:

$$6 - 4\frac{1}{3} = 5\frac{3}{3} - 4\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \text{R.}$$

2) Efectuar $50 - 14\frac{3}{5}$.

$$50 - 14\frac{3}{5} = 49\frac{5}{5} - 14\frac{3}{5} = 35\frac{2}{5} \quad \text{R.}$$

Simplificar:

1. $9 - 4\frac{1}{2}$

R. $4\frac{1}{2}$

6. $18 - 3\frac{3}{11}$

R. $14\frac{8}{11}$

11. $50 - 18\frac{18}{19}$

R. $31\frac{1}{19}$

2. $12 - 1\frac{7}{9}$

R. $10\frac{2}{9}$

7. $20 - 4\frac{1}{20}$

R. $15\frac{19}{20}$

12. $60 - 36\frac{41}{45}$

R. $23\frac{4}{45}$

3. $10 - 5\frac{3}{4}$

R. $4\frac{1}{4}$

8. $21 - 5\frac{1}{30}$

R. $15\frac{29}{30}$

13. $70 - 46\frac{104}{113}$

R. $23\frac{9}{113}$

4. $14 - 13\frac{15}{17}$

R. $\frac{2}{17}$

9. $31 - 6\frac{2}{35}$

R. $24\frac{33}{35}$

14. $95 - 51\frac{251}{301}$

R. $43\frac{50}{301}$

5. $16 - 2\frac{7}{10}$

R. $13\frac{3}{10}$

10. $40 - 35\frac{11}{42}$

R. $4\frac{31}{42}$

15. $104 - 79\frac{301}{323}$

R. $24\frac{22}{323}$

127

Ejercicio

RESTA DE MIXTO Y ENTERO

375

REGLA

Se resta el entero de los enteros del número mixto.

Efectuar $14\frac{1}{8} - 9$.Restando 9 del 14 queda $14 - 9 = 5$, luego nos queda $5\frac{1}{8}$ R.

Ejemplo

Simplificar:

1. $16\frac{3}{5} - 6$

3. $18\frac{2}{9} - 6$

5. $27\frac{17}{19} - 16$

7. $40\frac{2}{11} - 17$

9. $42\frac{3}{65} - 19$

2. $1\frac{7}{8} - 1$

4. $20\frac{3}{4} - 14$

6. $35\frac{23}{25} - 18$

8. $31\frac{3}{82} - 30$

10. $53\frac{7}{16} - 49$

128

Ejercicio

III. SUMA Y RESTA COMBINADAS

SUMA Y RESTA COMBINADAS DE QUEBRADOS

376

REGLA

Se simplifican los quebrados dados si es posible. Se reducen al mínimo común denominador y se efectúan operaciones.

Efectuar $\frac{14}{60} - \frac{1}{8} - \frac{16}{64} + \frac{15}{36}$.

Simplificando, queda:

$$\frac{7}{30} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{28 - 15 - 30 + 50}{120} = \frac{78 - 45}{120} = \frac{33}{120} = (\text{simplif.}) = \frac{11}{40} \text{ R.}$$

Ejemplo

129

Simplificar:

Ejercicio

1. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{12}$

R. $1\frac{5}{12}$

2. $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \frac{7}{12}$

R. $\frac{17}{24}$

3. $\frac{7}{12} + \frac{5}{9} - \frac{4}{24}$

R. $\frac{35}{36}$

4. $\frac{11}{15} - \frac{7}{30} + \frac{3}{10}$

R. $\frac{4}{5}$

5. $\frac{6}{9} + \frac{15}{25} - \frac{8}{15}$

R. $\frac{11}{15}$

6. $\frac{5}{6} - \frac{1}{90} + \frac{4}{7}$

R. $1\frac{124}{315}$

7. $\frac{4}{41} + \frac{7}{82} - \frac{1}{6}$

R. $\frac{2}{123}$

8. $\frac{11}{26} + \frac{9}{91} - \frac{3}{39}$

R. $\frac{81}{182}$

9. $\frac{31}{108} - \frac{43}{120} + \frac{59}{150}$

R. $\frac{1,739}{5,400}$

10. $\frac{111}{200} + \frac{113}{300} - \frac{117}{400}$

R. $\frac{767}{1,200}$

11. $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$

R. $\frac{11}{120}$

12. $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14}$

R. $\frac{1}{28}$

13. $\frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$

R. $\frac{2}{45}$

14. $\frac{2}{40} + \frac{7}{80} - \frac{11}{36} + \frac{13}{72}$

R. $\frac{1}{80}$

15. $\frac{1}{50} - \frac{2}{75} + \frac{7}{150} - \frac{1}{180}$

R. $\frac{31}{900}$

16. $\frac{7}{20} + \frac{11}{320} + \frac{1}{160} - \frac{3}{80}$

R. $\frac{113}{320}$

17. $\frac{13}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128}$

R. $6\frac{57}{128}$

18. $\frac{15}{16} - \frac{1}{48} - \frac{1}{96} - \frac{1}{80}$

R. $\frac{143}{160}$

19. $\frac{7}{11} - \frac{1}{121} - \frac{1}{1,331} + \frac{1}{6}$

R. $\frac{6,341}{7,986}$

20. $\frac{8}{7} - \frac{2}{49} - \frac{3}{343} + \frac{5}{2}$

R. $3\frac{407}{686}$

377

SUMA Y RESTA COMBINADAS DE ENTEROS, QUEBRADOS Y MIXTOS**REGLA GENERAL**

A los enteros se les pone por denominador la unidad, los mixtos se reducen a quebrados; se simplifican los quebrados si es posible y se efectúan operaciones con estos quebrados.

Ejemplo

Efectuar $14 - 2\frac{3}{16} - \frac{1}{8} + \frac{5}{6}$.

$$\frac{14}{1} - \frac{35}{16} - \frac{1}{8} + \frac{5}{6} = \frac{672 - 105 - 6 + 40}{48} = \frac{712 - 111}{48} = \frac{601}{48} = 12\frac{25}{48} \quad \text{R.}$$

130

Simplificar:

Ejercicio

1. $3 + \frac{3}{5} - \frac{1}{8}$

R. $3\frac{19}{40}$

2. $6 + 1\frac{1}{3} - \frac{2}{5}$

R. $6\frac{14}{15}$

3. $9 - 5\frac{1}{6} + 4\frac{1}{12}$

R. $7\frac{11}{12}$

4. $35 - \frac{1}{8} - \frac{3}{24}$

R. $34\frac{3}{4}$

5. $80 - 3\frac{3}{5} - 4\frac{3}{10}$

R. $72\frac{1}{10}$

6. $6\frac{1}{15} - 4\frac{1}{30} + \frac{7}{25}$

R. $2\frac{47}{150}$

7. $\frac{7}{20} + 3\frac{1}{16} - 2\frac{1}{5}$

R. $1\frac{17}{80}$

8. $9\frac{2}{3} + 5\frac{7}{48} - \frac{1}{60}$

R. $14\frac{191}{240}$

9. $8\frac{3}{7} + 4\frac{3}{56} - \frac{1}{98}$

R. $12\frac{185}{392}$

10. $9 + \frac{5}{8} - 3 + 2\frac{1}{9}$

R. $8\frac{53}{72}$

11. $16\frac{1}{3} - 14\frac{2}{5} + 7\frac{2}{9}$

R. $9\frac{7}{45}$

12. $9\frac{3}{8} - 4\frac{1}{40} + 6\frac{1}{60}$

R. $11\frac{11}{30}$

13. $14\frac{7}{25} - 6\frac{3}{50} + 8\frac{11}{40}$

R. $16\frac{99}{200}$

14. $16\frac{5}{14} + 7\frac{1}{7} - 5\frac{3}{56}$

R. $18\frac{25}{56}$

15. $4\frac{1}{3} - 2 + 3 - \frac{1}{9}$

R. $5\frac{2}{9}$

16. $9 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3$

R. $11\frac{3}{4}$

17. $6 + 5\frac{1}{3} - 4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{2}$

R. $5\frac{2}{3}$

18. $3\frac{1}{5} - \frac{5}{8} + \frac{7}{40} - 1$

R. $1\frac{3}{4}$

19. $6\frac{1}{19} - 2\frac{3}{38} + 5\frac{1}{76} - \frac{1}{2}$

R. $8\frac{37}{76}$

20. $\frac{3}{8} + \frac{17}{16} + \frac{32}{6} - 2\frac{3}{5}$

R. $4\frac{41}{240}$

21. $9 - \frac{1}{108} - \frac{1}{216} - \frac{1}{144}$

R. $8\frac{47}{48}$

22. $5\frac{1}{6} - 2\frac{1}{32} + \frac{7}{64} - \frac{1}{18}$

R. $3\frac{109}{576}$

23. $9 + 6\frac{1}{20} - 3\frac{1}{75} + \frac{11}{320}$

R. $12\frac{341}{4,800}$

24. $5\frac{7}{9} - 3\frac{1}{3} - \frac{11}{36} + \frac{1}{4}$

R. $2\frac{7}{18}$

25. $16\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8} - 2\frac{4}{7} - \frac{3}{28}$

R. $10\frac{25}{56}$

26. $50\frac{3}{5} - 6 - 8\frac{1}{50} - 2\frac{3}{10}$

R. $34\frac{7}{25}$

27. $\frac{1}{3} + 4\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$

R. $2\frac{4}{45}$

28. $4\frac{7}{15} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} - 1$

R. $3\frac{37}{90}$

29. $7\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4} + 6\frac{1}{8} - 6\frac{1}{6} + 6\frac{1}{9}$

R. $8\frac{23}{72}$

30. $25 - \frac{7}{30} + 4\frac{1}{20} - \frac{1}{50} - \frac{1}{6} - 3$

R. $25\frac{63}{100}$

MISCELÁNEA

Simplificar:

1. $\frac{3}{8} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)$

R. $\frac{1}{8}$

2. $4\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right)$

R. $4\frac{4}{15}$

3. $7\frac{1}{4} - \left(4 - \frac{1}{2}\right)$

R. $3\frac{3}{4}$

4. $3\frac{5}{8} - \left(2\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right)$

R. $\frac{3}{4}$

5. $9 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

R. $8\frac{5}{6}$

6. $\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)$

R. $\frac{13}{24}$

7. $50 - \left(6 - \frac{1}{5}\right)$

R. $44\frac{1}{5}$

8. $27 - \left(3\frac{3}{8} - 2\frac{1}{4}\right)$

R. $25\frac{7}{8}$

9. $7\frac{3}{5} + \left(6\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right)$

R. $13\frac{32}{45}$

10. $14 - \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{5}\right)$

R. $13\frac{1}{10}$

11. $18 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

R. $16\frac{11}{12}$

12. $500 - \left(\frac{1}{8} + \frac{9}{5} - \frac{3}{40}\right)$

R. $498\frac{3}{20}$

13. $16\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right)$

R. $15\frac{19}{20}$

14. $7\frac{2}{5} + \left(3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

R. $9\frac{11}{15}$

15. $\frac{1}{8} + \left(4\frac{1}{15} - \frac{1}{60} + \frac{3}{80}\right)$

R. $4\frac{17}{80}$

16. $6\frac{3}{4} - \left(2\frac{1}{9} - \frac{1}{18} + 1\right)$

R. $3\frac{25}{36}$

17. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{6}$

R. 0

18. $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{12}\right) - 1\frac{1}{2}$

R. 0

19. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}$

R. 0

20. $\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$

R. $1\frac{1}{6}$

21. $\left(\frac{6}{14} + \frac{3}{7}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

R. $\frac{5}{14}$

22. $\left(8\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - 5\right) - 3\frac{1}{3}$

R. $\frac{1}{24}$

23. $\left(6 - \frac{1}{5}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right)$

R. $2\frac{2}{15}$

24. $\left(20 - \frac{1}{10}\right) - \left(8 - \frac{1}{25}\right)$

R. $11\frac{47}{50}$

131

Ejercicio

25. $\left(4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}\right) - \left(6\frac{1}{5} - 5\frac{1}{6}\right)$ **R. $2\frac{17}{60}$**
26. $18 - \left(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4} + 5\frac{1}{5}\right)$ **R. $2\frac{43}{60}$**
27. $\left(6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2} + 1\right)$ **R. $3\frac{1}{3}$**
28. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)$ **R. $\frac{83}{96}$**
29. $\left(\frac{7}{30} - \frac{1}{60} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{5} - \frac{1}{20}\right)$ **R. $3\frac{29}{60}$**
30. $180 - 3\frac{1}{5} - \left(2\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)$ **R. $174\frac{37}{90}$**

132

Ejercicio

- Si tengo $\$7\frac{7}{8}$, ¿cuánto me falta para tener \$1? **R. $\$ \frac{1}{8}$**
- Debo \$183 y pago $\$42\frac{2}{7}$. ¿Cuánto me falta por pagar? **R. $\$140\frac{5}{7}$**
- Una calle tiene $50\frac{2}{3}$ m de longitud y otra $45\frac{5}{8}$ m. ¿Cuántos metros tienen las dos juntas y cuánto falta a cada una de ellas para tener 80 m de largo? **R. $96\frac{7}{24}$ m; $29\frac{1}{3}$ m; $34\frac{3}{8}$ m**
- Tengo $\$6\frac{3}{5}$. ¿Cuánto necesito para tener $\$8\frac{1}{6}$? **R. $\$1\frac{17}{30}$**
- Un hombre gana al mes \$2,000. Gasta $\$500\frac{2}{9}$ en alimentación de su familia; \$600 en alquiler y $\$180\frac{3}{8}$ en otros gastos. ¿Cuánto puede ahorrar cada mes? **R. $\$719\frac{29}{72}$**
- Tenía \$50. Pagué $\$16\frac{2}{9}$ que debía; gasté $\$5\frac{3}{7}$ y después recibí $\$42\frac{1}{6}$. ¿Cuánto tengo ahora? **R. $\$70\frac{65}{126}$**
- Si empleo $\frac{5}{8}$ del día en trabajar; ¿qué parte del día descanso? **R. $\frac{3}{8}$**
- La cuarta parte del día la emplea un niño en estudiar; la sexta parte en hacer ejercicios y la novena en divertirse. ¿Qué parte del día le queda libre? **R. $\frac{17}{36}$**
- Un hombre vende $\frac{1}{8}$ de su finca, alquila $\frac{1}{8}$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca cultiva? **R. $\frac{13}{24}$**
- Un hombre vende $\frac{1}{3}$ de su finca, alquila $\frac{1}{8}$ del resto y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca cultiva? **R. $\frac{7}{12}$**
- Tres obreros tienen que tejer 200 m de tela. Uno teje $53\frac{2}{7}$ m y otro $\frac{15}{34}$ m. ¿Cuánto tiene que tejer el tercero? **R. $146\frac{65}{238}$ m**
- Perdí $\frac{1}{5}$ de mi dinero y presté $\frac{1}{8}$. ¿Qué parte de mi dinero me queda? **R. $\frac{27}{40}$**

13. Perdí $\frac{1}{5}$ de mi dinero y presté $\frac{1}{8}$ de lo que me quedaba. ¿Qué parte de mi dinero me queda?

R. $\frac{7}{10}$

14. Los $\frac{3}{8}$ de una finca se venden, $\frac{2}{5}$ del resto se siembran de caña y el resto de tabaco. ¿Qué parte de la finca se siembra de tabaco?

R. $\frac{3}{8}$

15. ¿Qué número se debe añadir a $3\frac{2}{5}$ para igualar la suma de $6\frac{1}{3}$ y $2\frac{1}{9}$?

R. $5\frac{2}{45}$

IV. MULTIPLICACIÓN

MULTIPLICACIÓN DE QUEBRADOS

378

REGLA

Para multiplicar dos o más quebrados se multiplican los numeradores y este producto se divide entre el producto de los denominadores. El resultado se simplifica y se hallan los enteros si los hay.⁽¹⁾

1) Efectuar $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{17}{8}$.

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{17}{8} = \frac{5 \times 3 \times 17}{7 \times 4 \times 8} = \frac{225}{224} = 1\frac{31}{224}$$

2) Efectuar, cancelando: $\frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{6}$.

$$\frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{6} = \frac{\overset{1}{4} \times \overset{1}{2} \times \overset{1}{3}}{\underset{3}{9} \times \underset{2}{8} \times \underset{3}{6}} = \frac{1 \times 1 \times 1}{3 \times 2 \times 3} = \frac{1}{18}$$

Ejemplos

Simplificar:

1. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$

R. 1

2. $\frac{4}{5} \times \frac{10}{9}$

R. $\frac{8}{9}$

3. $\frac{7}{8} \times \frac{16}{21}$

R. $\frac{2}{3}$

4. $\frac{52}{24} \times \frac{4}{13}$

R. $4\frac{1}{6}$

5. $\frac{18}{15} \times \frac{90}{36}$

R. 3

6. $\frac{21}{22} \times \frac{11}{49}$

R. $\frac{3}{14}$

7. $\frac{13}{4} \times \frac{72}{39}$

R. 6

8. $\frac{24}{102} \times \frac{51}{72}$

R. $\frac{1}{6}$

9. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{4}$

R. $\frac{1}{7}$

10. $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6}$

R. $\frac{1}{2}$

11. $\frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9}$

R. $\frac{2}{3}$

12. $\frac{7}{19} \times \frac{19}{13} \times \frac{26}{21}$

R. $\frac{2}{3}$

13. $\frac{23}{34} \times \frac{17}{28} \times \frac{7}{69}$

R. $\frac{1}{24}$

14. $\frac{90}{51} \times \frac{41}{108} \times \frac{34}{82}$

R. $\frac{5}{18}$

15. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{10}{9} \times \frac{1}{8}$

R. $\frac{1}{9}$

16. $\frac{7}{8} \times \frac{8}{11} \times \frac{22}{14} \times \frac{1}{4}$

R. $\frac{1}{4}$

17. $\frac{5}{6} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{14} \times \frac{1}{5}$

R. $\frac{1}{40}$

18. $\frac{3}{5} \times \frac{17}{19} \times \frac{5}{34} \times \frac{38}{75}$

R. $\frac{1}{25}$

133

Ejercicio

⁽¹⁾ El procedimiento de eliminar uno a uno los numeradores y denominadores, cuando existe un factor común a ellos, se llama cancelación. Debe emplearse siempre que sea posible, puesto que es más rápido y seguro. Al cancelar iremos tachando los numeradores y denominadores que tienen un factor común. Cuando operamos en esta forma, la fracción producto viene dada en su mínima expresión.

379

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS MIXTOS**REGLA**

Se reducen a quebrados y se multiplican como tales.

Ejemplo

Efectuar $5\frac{2}{3} \times 2\frac{4}{5} \times 4\frac{1}{9}$.

$$5\frac{2}{3} \times 2\frac{4}{5} \times 4\frac{1}{9} = \frac{17}{3} \times \frac{14}{5} \times \frac{37}{9} = \frac{17 \times 14 \times 37}{3 \times 5 \times 9} = \frac{8,806}{135} = 65\frac{31}{135} \quad \text{R.}$$

134

Simplificar:

Ejercicio

1. $1\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3}$

R. $2\frac{1}{2}$

2. $3\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{13}$

R. $3\frac{1}{2}$

3. $5\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{9}$

R. $11\frac{2}{3}$

4. $6\frac{2}{7} \times 1\frac{3}{11}$

R. 8

5. $3\frac{1}{6} \times 2\frac{4}{19}$

R. 7

6. $8\frac{1}{9} \times 1\frac{2}{73}$

R. $8\frac{1}{3}$

7. $14\frac{4}{5} \times 5\frac{5}{6}$

R. $86\frac{1}{3}$

8. $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{5}$

R. $2\frac{2}{5}$

9. $2\frac{5}{6} \times 3\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{17}$

R. $11\frac{1}{4}$

10. $9\frac{2}{9} \times 1\frac{1}{83} \times 2\frac{3}{21}$

R. 20

11. $8\frac{1}{3} \times 5\frac{1}{4} \times 1\frac{3}{25}$

R. 49

12. $10\frac{1}{10} \times 3\frac{1}{101} \times 1\frac{3}{152}$

R. 31

13. $1\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{9} \times 1\frac{1}{8} \times 1\frac{3}{5}$

R. $2\frac{2}{5}$

14. $2\frac{1}{7} \times 2\frac{4}{5} \times 3\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{2}$

R. 90

15. $3\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{3} \times 1\frac{11}{26} \times 1\frac{1}{37}$

R. $6\frac{1}{3}$

16. $6\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{19}$

R. $93\frac{3}{5}$

17. $1\frac{2}{7} \times 1\frac{5}{9} \times 2\frac{1}{6} \times 2\frac{4}{7}$

R. $11\frac{1}{7}$

18. $8\frac{2}{5} \times 2\frac{4}{7} \times 7\frac{1}{9} \times 2\frac{7}{10}$

R. $414\frac{18}{25}$

19. $8\frac{8}{7} \times 1\frac{47}{108} \times 3\frac{33}{61} \times 15\frac{1}{2} \times 1\frac{19}{31}$

R. $1,107\frac{1}{7}$

20. $2\frac{4}{39} \times 2\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{41} \times 4\frac{1}{3} \times 2\frac{4}{7}$

R. 52

380

MULTIPLICACIÓN DE ENTERO, MIXTO Y QUEBRADO**REGLA**

A los enteros se pone por denominador la unidad; los mixtos se reducen a quebrados y se multiplican todos como quebrados.

Ejemplo

Efectuar $14 \times 3\frac{4}{5} \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{14}$.

$$14 \times 3\frac{4}{5} \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{14} = \frac{14}{1} \times \frac{19}{5} \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{14} = \frac{14 \times 19 \times 1 \times 3}{5 \times 12 \times 14} = \frac{19}{20} \quad \text{R.}$$

135

Ejercicio

Simplificar:

1. $3 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$

R. $\frac{3}{5}$

2. $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 2$

R. 1

3. $3\frac{1}{4} \times \frac{2}{13} \times \frac{1}{3}$

R. $\frac{1}{6}$

4. $\frac{5}{6} \times \frac{9}{7} \times 2\frac{1}{3}$

R. $2\frac{1}{2}$

5. $1\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3} \times \frac{6}{35}$

R. $\frac{3}{7}$

6. $\frac{7}{9} \times 2\frac{1}{4} \times \frac{18}{35}$

R. $\frac{9}{10}$

7. $\frac{11}{12} \times 24 \times \frac{7}{121}$

R. $1\frac{3}{11}$

8. $\frac{5}{9} \times \frac{7}{8} \times 4\frac{1}{3} \times \frac{4}{35}$

R. $\frac{13}{54}$

9. $13 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{10} \times \frac{5}{26}$

R. $\frac{5}{8}$

10. $2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{5} \times \frac{1}{637}$

R. $\frac{1}{20}$

11. $\frac{11}{18} \times 2\frac{1}{9} \times 36 \times \frac{1}{38}$

R. $1\frac{2}{9}$

12. $7\frac{2}{3} \times \frac{11}{46} \times \frac{1}{121} \times 66$

R. 1

13. $19 \times 5\frac{3}{14} \times \frac{2}{73} \times \frac{7}{19}$

R. 1

14. $36 \times \frac{1}{84} \times \frac{14}{9} \times \frac{1}{6}$

R. $\frac{1}{9}$

15. $5\frac{1}{8} \times \frac{1}{82} \times 6\frac{1}{3} \times 48$

R. 19

16. $9\frac{1}{3} \times 7\frac{5}{7} \times 20\frac{1}{3} \times \frac{1}{1,708}$

R. $\frac{6}{7}$

17. $\frac{11}{36} \times \frac{18}{121} \times 2\frac{3}{5} \times \frac{1}{169} \times 715$

R. $\frac{1}{2}$

18. $7\frac{2}{9} \times 18 \times \frac{5}{13} \times 6\frac{1}{3} \times \frac{1}{20}$

R. $15\frac{5}{6}$

19. $5\frac{2}{31} \times \frac{11}{157} \times \frac{62}{77} \times 21 \times 1\frac{1}{6}$

R. 7

20. $\frac{11}{26} \times 52 \times 3\frac{1}{13} \times 1\frac{6}{7} \times \frac{5}{33}$

R. $19\frac{1}{21}$

MISCELÁNEA

Simplificar:

1. $\left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\right) \times 5\frac{1}{16}$

R. $1\frac{1}{80}$

2. $16 \times \left(14\frac{1}{16} \times 5\frac{1}{6}\right)$

R. $1,162\frac{1}{2}$

3. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times 6$

R. 1

4. $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{5}$

R. $\frac{1}{4}$

5. $\left(1 - \frac{3}{8}\right) \times 1\frac{3}{5}$

R. 1

6. $72 \times \left(\frac{7}{8} + \frac{2}{9}\right)$

R. 79

7. $\left(5\frac{2}{3} - \frac{2}{9}\right) \times 3$

R. $16\frac{1}{2}$

8. $\left(4 \times 2\frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{66}$

R. $\frac{1}{10}$

9. $\left(8 - \frac{2}{9}\right) \times \frac{1}{35}$

R. $\frac{2}{9}$

10. $\left(16\frac{3}{5} - \frac{7}{10}\right) \times \frac{1}{159}$

R. $\frac{1}{10}$

11. $\left(\frac{1}{8} \times 5\frac{1}{4} - \frac{1}{20}\right) \times 9\frac{1}{16}$

R. $48\frac{33}{128}$

12. $\left(1\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) \times \frac{2}{3}$

R. $1\frac{1}{24}$

13. $\left(7\frac{2}{9} + 5\frac{1}{6} - 12\frac{5}{18}\right) \times 27$

R. 3

14. $\frac{2}{3} \times \left(10\frac{1}{4} \times \frac{1}{16}\right) \times 2\frac{1}{40}$

R. $\frac{1,107}{1,280}$

15. $\left(2 + \frac{1}{4}\right) \times \left(6 - \frac{1}{30}\right)$

R. $13\frac{17}{40}$

16. $\left(2 - \frac{1}{4}\right) \times \left(6 + \frac{1}{30}\right)$

R. $10\frac{67}{120}$

17. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$

R. $\frac{85}{144}$

18. $\left(7\frac{2}{5} + 5\frac{1}{6}\right) \times \left(28\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4}\right)$

R. 377

19. $\left(11\frac{1}{10} - 10\right) \times \left(13 - 9\frac{2}{5}\right)$

R. $3\frac{24}{25}$

20. $\left(\frac{7}{8} + \frac{2}{9}\right) \times \left(36 \times \frac{1}{79}\right)$

R. $\frac{1}{2}$

136

Ejercicio

$$21. \left(\frac{11}{180} - \frac{1}{45} \right) \times \left(90 \times \frac{1}{14} \right)$$

$$\text{R. } \frac{1}{4}$$

$$22. \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \times \left(6 - \frac{1}{11} \right)$$

$$\text{R. } 8\frac{2}{3}$$

$$23. \left(\frac{9}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \right) \times 8$$

$$\text{R. } 32\frac{1}{2}$$

$$24. \left(9\frac{1}{12} + \frac{7}{16} - 2\frac{1}{3} - 2 \right) \times 1\frac{1}{83}$$

$$\text{R. } 5\frac{1}{4}$$

$$25. \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{32} \right) \times \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{80} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{R. } \frac{289}{2,560}$$

$$26. \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} \right) \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{90} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{R. } \frac{121}{2,400}$$

$$27. \left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4} \right) \times \left(3 + 4\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right)$$

$$\text{R. } 40\frac{53}{64}$$

$$28. 150 \times \left(\frac{9}{32} + 5 + \frac{1}{16} \right) \times \frac{1}{14}$$

$$\text{R. } 57\frac{57}{224}$$

$$29. \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \times \left(\frac{1}{60} + \frac{10}{25} \right) \times 5\frac{4}{15}$$

$$\text{R. } \frac{79}{270}$$

$$30. \left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) \times \left(6 - \frac{2}{3} \right) \times \left(5\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right)$$

$$\text{R. } 103\frac{1}{9}$$

381

FRACCIÓN DE FRACCIÓN es una o varias partes de un número entero, quebrado o mixto.

Ejemplo

$$\frac{2}{3} \text{ de } 5; \frac{1}{4} \text{ de } \frac{3}{5}; \frac{2}{3} \text{ de } 4\frac{1}{6}$$

382

REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN DE FRACCIÓN A FRACCIÓN SIMPLE

Ejemplos

1) Hallar los $\frac{3}{5}$ de 40.

Diremos: $\frac{1}{5}$ de 40 es $40 \div 5 = 8$ y los $\frac{3}{5}$ serán $8 \times 3 = 24$ R.

En estos casos la palabra *de* equivale al *signo de multiplicar* y así, en este caso, podíamos haber multiplicado $\frac{3}{5}$ por 40 y tendríamos:

$$\frac{3}{5} \times 40 = \frac{3 \times 40}{5} = \frac{3 \times 8}{1} = 24 \text{ R.}$$

2) Hallar los $\frac{2}{3}$ de 5.

Diremos: $\frac{1}{3}$ de 5 es $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ y los $\frac{2}{3}$ serán: $\frac{5}{3} \times 2 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ R.

Multiplicando ambas cantidades obtenemos el mismo resultado.

$$\frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ R.}$$

porque el *de* equivale al signo de multiplicar.

3) Hallar los $\frac{5}{7}$ de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5 \times 1}{7 \times 2} = \frac{5}{14} \text{ R.}$$

4) Hallar los $\frac{7}{8}$ de $4\frac{1}{6}$.

$$\frac{7}{8} \times 4\frac{1}{6} = \frac{7}{8} \times \frac{25}{6} = \frac{175}{48} = 3\frac{31}{48} \quad \text{R.}$$

Hallar:

1. $\frac{2}{3}$ de 12

R. 8

7. $\frac{3}{4}$ de 81

R. $60\frac{3}{4}$

13. $\frac{3}{8}$ de $3\frac{1}{3}$

R. $1\frac{1}{4}$

2. $\frac{5}{6}$ de 42

R. 35

8. $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$

R. $\frac{1}{5}$

14. $\frac{5}{9}$ de $2\frac{1}{4}$

R. $1\frac{1}{4}$

3. $\frac{7}{8}$ de 108

R. $94\frac{1}{2}$

9. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$

R. $\frac{2}{5}$

15. $\frac{7}{10}$ de $9\frac{1}{7}$

R. $6\frac{2}{5}$

4. $\frac{2}{9}$ de 13

R. $2\frac{8}{9}$

10. $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{9}$

R. $\frac{4}{15}$

16. $\frac{10}{11}$ de $2\frac{4}{9}$

R. $2\frac{2}{9}$

5. $\frac{11}{12}$ de 96

R. 88

11. $\frac{11}{7}$ de $\frac{35}{22}$

R. $2\frac{1}{2}$

17. $\frac{5}{13}$ de $5\frac{5}{12}$

R. $2\frac{1}{12}$

6. $\frac{9}{17}$ de 51

R. 27

12. $\frac{18}{41}$ de 164

R. 72

18. $\frac{7}{29}$ de $84\frac{1}{10}$

R. $20\frac{3}{10}$

137

Ejercicio

FRACCIONES MÚLTIPLES

383

Las fracciones múltiples no son más que productos indicados y se resuelven multiplicando todos los números dados.

1) Hallar los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{6}$ de 10.

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{10}{1} = \frac{2 \times 5 \times 10}{3 \times 6} = \frac{5 \times 10}{3 \times 3} = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9} \quad \text{R.}$$

2) Hallar los $\frac{7}{9}$ de los $\frac{3}{5}$ de $\frac{8}{24}$.

$$\frac{7}{9} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{24} = \frac{7 \times 3 \times 8}{9 \times 5 \times 24} = \frac{7}{3 \times 5 \times 3} = \frac{7}{45} \quad \text{R.}$$

3) Hallar los $\frac{5}{9}$ de los $\frac{3}{17}$ de los $\frac{3}{7}$ del doble de 100.

$$\frac{5}{9} \times \frac{3}{17} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{1} \times \frac{100}{1} = \frac{5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 100}{9 \times 17 \times 7} = \frac{5 \times 2 \times 100}{17 \times 7} = \frac{1,000}{119} = 8\frac{48}{119} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Hallar:

1. $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 12

R. 4

3. $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{9}$ de 108

R. 10

2. $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{5}$ de 40

R. 6

4. $\frac{3}{7}$ de $\frac{1}{10}$ de 140

R. 6

138

Ejercicio

- | | | | |
|---|---------------------|---|--------|
| 5. $\frac{3}{8}$ de los $\frac{3}{5}$ de 120 | R. 27 | 8. $\frac{5}{6}$ de la mitad de 84 | R. 35 |
| 6. $\frac{2}{7}$ de los $\frac{3}{8}$ de 112 | R. 12 | 9. $\frac{7}{11}$ de los $\frac{6}{5}$ de 440 | R. 336 |
| 7. $\frac{5}{11}$ de los $\frac{7}{9}$ de 33 | R. $11\frac{2}{3}$ | 10. $\frac{3}{8}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 96 | R. 12 |
| 11. $\frac{5}{6}$ de los $\frac{3}{5}$ del triple de 40 | R. 60 | | |
| 12. $\frac{1}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{8}$ de 16 | R. $\frac{5}{12}$ | | |
| 13. $\frac{5}{9}$ de los $\frac{8}{40}$ de los $\frac{5}{7}$ del doble de 50 | R. $7\frac{59}{63}$ | | |
| 14. $\frac{4}{9}$ de los $\frac{5}{6}$ de la mitad del triple de 200 | R. $111\frac{1}{9}$ | | |
| 15. $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{10}$ del triple de los $\frac{7}{12}$ de $\frac{1}{5}$ de $5\frac{1}{3}$ | R. $\frac{7}{50}$ | | |

139

Ejercicio

1. A $\$ \frac{7}{8}$ el kilogramo de una mercancía, ¿cuánto valen 8 kg, 12 kg? R. \$7, $\$10\frac{1}{2}$
2. Un reloj se adelanta $\frac{3}{7}$ de minuto en cada hora. ¿Cuánto se adelantará en 5 horas; en medio día; en una semana? R. $2\frac{1}{7}$ min; $5\frac{1}{7}$ min; 1 h 12 min
3. Tengo \$86. Si compro 3 dulces de $\$1\frac{1}{8}$ cada uno y seis objetos de $\$ \frac{7}{8}$ cada uno, ¿cuánto me queda? R. $\$77\frac{3}{8}$
4. Para hacer un metro de una obra un obrero emplea 6 horas. ¿Cuánto empleará para hacer $14\frac{2}{3}$ metros; $18\frac{5}{33}$ metros? R. 88 h, $108\frac{10}{11}$ h
5. Compré tres tomates a $\$2\frac{3}{5}$ cada uno; 6 cebollas a $\$3\frac{3}{4}$ cada una. Si pago con un billete de \$50, ¿cuánto me devuelven? R. $\$19\frac{7}{10}$
6. Tenía $\$54\frac{2}{3}$, compré 8 plumas a $\$4\frac{1}{4}$ cada una; 9 lápices a $\$2\frac{1}{4}$ cada uno y luego me pagan $\$15\frac{3}{16}$. ¿Cuánto tengo ahora? R. $\$15\frac{29}{48}$
7. Si de una soga de 40 metros de longitud se cortan tres partes iguales de $5\frac{2}{3}$ metros de longitud, ¿cuánto falta a lo que queda para tener $31\frac{5}{8}$ metros? R. $8\frac{5}{8}$ m
8. Si compro 10 gomas de $\$ \frac{4}{5}$ cada una y entrego en pago 2 metros de tela de $\$1\frac{5}{8}$ el metro, ¿cuánto debo? R. $\$4\frac{3}{4}$
9. Compré 16 calculadoras a $\$80\frac{1}{5}$ cada una y las vendí a $\$90\frac{3}{10}$ cada una. ¿Cuánto gané? R. $\$161\frac{3}{5}$
10. A $\$ \frac{11}{10}$ la bolsa de caramelos, ¿cuánto pagaré por tres docenas de bolsas? R. $\$39\frac{3}{5}$

11. Tenía \$40 y gasté los $\frac{3}{8}$. ¿Cuánto me queda? **R. \$25**
12. Si tengo \$25 y hago compras por los $\frac{6}{5}$ de esta cantidad, ¿cuánto debo? **R. \$5**
13. Un hombre es dueño de los $\frac{3}{4}$ de una goleta y vende $\frac{3}{11}$ de su parte. ¿Qué parte de la goleta ha vendido? **R. $\frac{9}{44}$**
14. Si me deben una cantidad igual a los $\frac{7}{8}$ de \$96 y me pagan los $\frac{3}{4}$ de lo que me deben, ¿cuánto me deben aún? **R. \$21**
15. Un hombre es dueño de los $\frac{2}{5}$ de una finca y vende $\frac{1}{2}$ de su parte. ¿Qué parte de la finca le queda? **R. $\frac{1}{5}$**
16. Un mechero consume $\frac{3}{4}$ kg de aceite por día. ¿Cuánto consumirá en $\frac{5}{6}$ de día? **R. $\frac{5}{8}$ kg**
17. Si un auto anda 60 km/h, ¿cuánto andará en $\frac{3}{5}$, en $\frac{1}{8}$, en $\frac{2}{11}$ y en $\frac{7}{9}$ de hora?
R. 36; $7\frac{1}{2}$; $10\frac{10}{11}$; $46\frac{2}{3}$ km
18. Un obrero ajusta una obra en \$200 y hace los $\frac{7}{20}$ de ella. ¿Cuánto recibirá? **R. \$70**
19. Un obrero ajusta una obra en \$300 y ya ha cobrado una cantidad equivalente a los $\frac{11}{15}$ de la obra. ¿Cuánto le falta por cobrar? **R. \$80**
20. ¿Cuántos litros hay que sacar de un tonel de 560 litros para que queden en él los $\frac{6}{7}$ del contenido?
R. 80 litros
21. La edad de María es $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la de Juana. Si ésta tiene 24 años, ¿cuántos tiene María?
R. 8 años
22. Me deben los $\frac{3}{4}$ de \$88. Si me pagan los $\frac{2}{11}$ de \$88, ¿cuánto me deben? **R. \$50**
23. En un colegio hay 324 alumnos y el número de alumnas es los $\frac{7}{18}$ del total. ¿Cuántos varones hay?
R. 198
24. De una finca de 20 hectáreas, se venden los $\frac{2}{5}$ y se alquilan los $\frac{3}{4}$ del resto. ¿Cuánto queda?
R. 3 hectáreas

V. DIVISIÓN

DIVISIÓN DE QUEBRADOS

REGLA

Para dividir dos quebrados se multiplica el dividendo por el divisor invertido. Se simplifica el resultado y se hallan los enteros si los hay. ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Después de invertir el divisor debe cancelarse si es posible.

EjemploEfectuar $\frac{14}{55} \div \frac{8}{35}$.

$$\frac{14}{55} \div \frac{8}{35} = \frac{14}{55} \times \frac{35}{8} = \frac{14 \times 35}{55 \times 8} = \frac{7 \times 7}{11 \times 4} = \frac{49}{44} = 1\frac{5}{44} \quad \text{R.}$$

140

Simplificar:

Ejercicio

1. $\frac{3}{5} \div \frac{7}{10}$

R. $\frac{6}{7}$

8. $\frac{11}{14} \div \frac{7}{22}$

R. $2\frac{23}{49}$

15. $\frac{50}{61} \div \frac{25}{183}$

R. 6

2. $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$

R. $1\frac{1}{4}$

9. $\frac{3}{8} \div \frac{5}{6}$

R. $\frac{9}{20}$

16. $\frac{72}{91} \div \frac{6}{13}$

R. $1\frac{5}{7}$

3. $\frac{7}{8} \div \frac{14}{9}$

R. $\frac{9}{16}$

10. $\frac{19}{21} \div \frac{38}{7}$

R. $\frac{1}{6}$

17. $\frac{104}{105} \div \frac{75}{36}$

R. $\frac{416}{875}$

4. $\frac{3}{5} \div \frac{6}{7}$

R. $\frac{7}{10}$

11. $\frac{3}{4} \div \frac{4}{3}$

R. $\frac{9}{16}$

18. $\frac{150}{136} \div \frac{135}{180}$

R. $1\frac{8}{17}$

5. $\frac{8}{9} \div \frac{4}{3}$

R. $\frac{2}{3}$

12. $\frac{21}{30} \div \frac{6}{7}$

R. $\frac{49}{60}$

19. $\frac{216}{316} \div \frac{1,080}{948}$

R. $\frac{3}{5}$

6. $\frac{6}{11} \div \frac{5}{22}$

R. $2\frac{2}{5}$

13. $\frac{25}{32} \div \frac{5}{8}$

R. $1\frac{1}{3}$

20. $\frac{51}{76} \div \frac{57}{1,520}$

R. $17\frac{17}{19}$

7. $\frac{5}{12} \div \frac{3}{4}$

R. $\frac{5}{9}$

14. $\frac{30}{41} \div \frac{3}{82}$

R. 20

385**DIVISIÓN DE UN ENTERO ENTRE UN QUEBRADO O VICEVERSA****REGLA**

Se pone al entero por denominador la unidad y se dividen como quebrados.

EjemploEfectuar $150 \div \frac{16}{83}$.

$$150 \div \frac{16}{83} = \frac{150}{1} \div \frac{16}{83} = \frac{150}{1} \times \frac{83}{16} = \frac{150 \times 83}{16} = \frac{75 \times 83}{8} = \frac{6,225}{8} = 778\frac{1}{8} \quad \text{R.}$$

141

Simplificar:

Ejercicio

1. $8 \div \frac{1}{2}$

R. 16

6. $26 \div \frac{1}{8}$

R. 208

11. $\frac{11}{12} \div 44$

R. $\frac{1}{48}$

2. $15 \div \frac{3}{4}$

R. 20

7. $21 \div \frac{42}{5}$

R. $2\frac{1}{2}$

12. $\frac{13}{50} \div 39$

R. $\frac{1}{150}$

3. $9 \div \frac{2}{3}$

R. $13\frac{1}{2}$

8. $52 \div \frac{14}{65}$

R. $241\frac{3}{7}$

13. $\frac{50}{73} \div 14$

R. $\frac{25}{511}$

4. $6 \div \frac{5}{6}$

R. $7\frac{1}{5}$

9. $\frac{3}{8} \div 5$

R. $\frac{3}{40}$

14. $\frac{81}{97} \div 18$

R. $\frac{9}{194}$

5. $7 \div \frac{3}{5}$

R. $11\frac{2}{3}$

10. $\frac{6}{7} \div 9$

R. $\frac{2}{21}$

15. $\frac{16}{41} \div 16$

R. $\frac{1}{41}$

DIVISIÓN DE NÚMEROS MIXTOS

386

REGLA

Se reducen a quebrados y se dividen como tales.

Efectuar $45\frac{1}{12} \div 5\frac{1}{9}$.

$$45\frac{1}{12} \div 5\frac{1}{9} = \frac{169}{12} \div \frac{46}{9} = \frac{169}{12} \times \frac{9}{46} = \frac{169 \times 9}{12 \times 46} = \frac{169 \times 3}{4 \times 46} = \frac{507}{184} = 2\frac{139}{184} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

Simplificar:

1. $1\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{3}$ R. $\frac{9}{14}$

2. $2\frac{1}{3} \div 3\frac{1}{2}$ R. $\frac{2}{3}$

3. $3\frac{1}{4} \div 4\frac{1}{3}$ R. $\frac{3}{4}$

4. $5\frac{1}{4} \div 6\frac{1}{5}$ R. $\frac{105}{124}$

5. $7\frac{1}{6} \div 8\frac{1}{7}$ R. $\frac{301}{342}$

6. $2\frac{3}{5} \div 3\frac{9}{10}$ R. $\frac{2}{3}$

7. $1\frac{6}{11} \div 1\frac{5}{6}$ R. $\frac{102}{121}$

8. $1\frac{1}{8} \div 3\frac{3}{5}$ R. $\frac{5}{16}$

9. $5\frac{2}{3} \div 8\frac{1}{2}$ R. $\frac{2}{3}$

10. $7\frac{3}{4} \div 5\frac{3}{8}$ R. $1\frac{19}{43}$

11. $1\frac{8}{27} \div 1\frac{1}{9}$ R. $1\frac{1}{6}$

12. $8\frac{3}{4} \div 13\frac{1}{3}$ R. $\frac{21}{32}$

13. $6\frac{3}{7} \div 1\frac{1}{14}$ R. 6

14. $5\frac{5}{9} \div 3\frac{7}{11}$ R. $1\frac{19}{36}$

15. $5\frac{6}{11} \div 2\frac{13}{22}$ R. $2\frac{8}{57}$

16. $3\frac{12}{31} \div 2\frac{13}{31}$ R. $1\frac{2}{5}$

17. $1\frac{8}{109} \div 1\frac{133}{218}$ R. $\frac{2}{3}$

18. $4\frac{1}{50} \div 24\frac{3}{25}$ R. $\frac{1}{6}$

19. $1\frac{11}{52} \div 7\frac{7}{26}$ R. $\frac{1}{6}$

20. $1\frac{99}{716} \div 9\frac{19}{179}$ R. $\frac{1}{8}$

142

Ejercicio

MISCELÁNEA

Simplificar:

1. $\left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{3}{2}$ R. $\frac{4}{9}$

2. $\left(3\frac{2}{5} \div \frac{17}{3}\right) \times 1\frac{2}{3}$ R. 1

3. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{30}\right) \div \frac{1}{6}$ R. $2\frac{2}{5}$

4. $\left(8 + \frac{3}{4}\right) \div 4\frac{1}{5}$ R. $2\frac{1}{12}$

5. $\left(4 - \frac{1}{3}\right) \div \frac{11}{6}$ R. 2

6. $\left(5\frac{1}{4} - 4\right) \div 1\frac{1}{2}$ R. $\frac{5}{6}$

7. $\left(\frac{5}{6} \div 3\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{2}{3}$ R. $\frac{2}{13}$

8. $\frac{3}{5} \div \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right)$ R. $\frac{2}{5}$

9. $\frac{9}{10} \div \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right)$ R. $\frac{54}{65}$

10. $\frac{5}{6} \div \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{5}\right)$ R. $1\frac{1}{24}$

11. $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ R. $\frac{5}{6}$

12. $\left(2 + \frac{7}{8}\right) \div \left(2 - \frac{1}{9}\right)$ R. $1\frac{71}{136}$

13. $\left(7 + 3\frac{1}{8}\right) \div \left(14 + 6\frac{1}{4}\right)$ R. $\frac{1}{2}$

14. $\left(60 - \frac{1}{8}\right) \div \left(30 - \frac{1}{16}\right)$ R. 2

15. $\left(\frac{5}{8} \times \frac{10}{50}\right) \div 10\frac{1}{12}$ R. $\frac{3}{242}$

16. $\left(10 \div \frac{5}{6}\right) \div 10\frac{9}{32}$ R. $1\frac{55}{329}$

143

Ejercicio

17. $\left(\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} + \frac{3}{4}\right) \div 3\frac{1}{2}$ R. $\frac{1}{7}$
18. $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) \div 1\frac{3}{5}$ R. $\frac{45}{64}$
19. $\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8}\right) \div \frac{1}{12}$ R. $29\frac{1}{2}$
20. $\left(6 - \frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) \div 5\frac{1}{2}$ R. 1
21. $\left(150\frac{1}{8} \div \frac{1}{8}\right) \div \left(4 \times 2\frac{7}{8}\right)$ R. $104\frac{10}{23}$
22. $\left(\frac{7}{30} + \frac{7}{90} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{1}{9}$ R. $5\frac{4}{5}$
23. $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{45}\right) \div 1\frac{1}{90}$ R. $\frac{43}{91}$
24. $\left(2 \times \frac{6}{5}\right) \div \left(2 + \frac{3}{8}\right)$ R. $1\frac{1}{95}$
25. $\left(5 \div \frac{1}{5}\right) \div \left(2 \div \frac{1}{3}\right)$ R. $4\frac{1}{6}$
26. $\left(19\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \div \left(4\frac{1}{5} \times \frac{5}{42} \times \frac{1}{6}\right)$ R. 239
27. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(2 - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 - \frac{1}{3}\right)$ R. $\frac{9}{20}$
28. $\left(4 - \frac{1}{4}\right) \times \left(5 - \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{18}$ R. 324
29. $\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} \div 6\right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ R. $10\frac{2}{3}$
30. $\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6}\right) \div \left(3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{8}\right) \div \frac{28}{129}$ R. 1
31. $\frac{3}{5}$ de $\left(\frac{8}{9} \div \frac{1}{6}\right)$ R. $3\frac{1}{5}$
32. $\frac{5}{6}$ de los $\left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{2}\right)$ de 72 R. $26\frac{2}{3}$
33. $\frac{1}{8}$ de los $\left(\frac{5}{6} \div \frac{1}{2}\right)$ de 150 R. $31\frac{1}{4}$
34. $\frac{5}{41}$ de los $\left(\frac{8}{9} \div 4\frac{1}{3}\right)$ del doble de $\frac{5}{12}$ R. $\frac{100}{4,797}$
35. $\frac{3}{11}$ del doble de la mitad de los $\left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{14}\right)$ de $14\frac{2}{5}$ R. $18\frac{18}{55}$

144

Ejercicio

1. Diez obreros pueden hacer $14\frac{2}{11}$ m de una obra en 1 hora. ¿Cuántos metros hace cada obrero en ese tiempo? R. $1\frac{23}{55}$ m
2. A $\$2\frac{3}{11}$ el kilo de una mercancía, ¿cuántos kilos puedo comprar con \$80? R. $35\frac{1}{5}$ kilos
3. ¿Cuál es la velocidad por hora de un automóvil que en $5\frac{2}{37}$ horas recorre $202\frac{6}{37}$ km? R. 40 km
4. Un hombre puede hacer una obra en $18\frac{7}{36}$ días. ¿Qué parte de la obra puede hacer en $5\frac{1}{3}$ días? R. $\frac{192}{655}$
5. La distancia entre dos ciudades es de 140 km. ¿Cuántas horas debe andar un hombre que recorre los $\frac{3}{14}$ de dicha distancia en una hora, para ir de una ciudad a otra? R. $4\frac{2}{3}$ h

6. ¿Cuántas varillas de $\frac{1}{4}$ de metro de longitud se pueden sacar de una varilla de $\frac{5}{12}$ metros de largo?
R. $1\frac{2}{3}$ varillas
7. Si una llave vierte $8\frac{1}{4}$ litros de agua por minuto, ¿cuánto tiempo empleará en llenar un depósito de $90\frac{3}{4}$ litros de capacidad? R. 11 min
8. Si una llave vierte $3\frac{3}{4}$ litros y otra $2\frac{1}{5}$ litros de agua por minuto, ¿en cuánto tiempo llenarán un depósito de $59\frac{1}{2}$ litros de capacidad? R. 10 min
9. Si tengo \$50, ¿a cuántos muchachos podré dar $\$1\frac{2}{3}$ por cabeza? R. A 30
10. Si $\$ \frac{7}{8}$ se reparten entre 6 personas, ¿cuánto toca a cada una? R. $\$ \frac{7}{48}$
11. Si un hombre hace un trabajo en 8 días, ¿qué parte del trabajo puede hacer en 1 día, en $1\frac{3}{4}$ días, en $3\frac{1}{2}$ días? R. $\frac{1}{8}, \frac{7}{32}, \frac{7}{16}$
12. Si un kilogramo de frijoles cuesta los $\frac{3}{4}$ de uno de manteca, ¿con cuántos kilogramos de frijoles podré comprar 15 de manteca? R. Con 20
13. Si en 20 minutos estudio los $\frac{2}{3}$ de una página de un libro, ¿en cuánto tiempo podré estudiar 10 páginas? R. 5 h
14. ¿Entre qué número hay que dividir $6\frac{2}{5}$ para obtener 3 de cociente? R. Entre $2\frac{2}{15}$
15. Repartí $\$18\frac{2}{5}$ entre varias personas y a cada una tocó $\$3\frac{17}{25}$. ¿Cuántas eran las personas? R. 5

VI. FRACCIONES COMPLEJAS

FRACCIÓN COMPLEJA es aquella cuyo numerador o denominador, o ambos, son quebrados.

387

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}, \frac{4}{\frac{1}{6}}, \frac{\frac{3}{7}}{6}, \frac{4\frac{1}{5}}{\frac{2}{9}}$$

Ejemplo

SU REDUCCIÓN A SIMPLE

388

Para reducir una fracción compleja a simple, **se efectúa la división del numerador entre el denominador.**

1) Simplificar $\frac{\frac{3}{17}}{\frac{9}{34}}$.

$$\frac{\frac{3}{17}}{\frac{9}{34}} = \frac{3}{17} \div \frac{9}{34} = \frac{3}{17} \times \frac{34}{9} = \frac{3 \times 34}{17 \times 9} = \frac{2}{3} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

2) Simplificar $\frac{17}{8/11}$.

$$\frac{17}{8/11} = \frac{17}{1} \div \frac{8}{11} = \frac{17}{1} \times \frac{11}{8} = \frac{187}{8} = 23\frac{3}{8} \quad \text{R.}$$

3) Simplificar $\frac{5/12}{10}$.

$$\frac{5/12}{10} = \frac{5}{12} \div \frac{10}{1} = \frac{5}{12} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{12 \times 10} = \frac{1}{24} \quad \text{R.}$$

4) Simplificar $\frac{\frac{1/2}{2/3}}{\frac{1/5}{1/10}}$.

$$\frac{\frac{1/2}{2/3}}{\frac{1/5}{1/10}} = \frac{\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}}{\frac{1}{5} \div \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{1}{5} \times \frac{10}{1}} = \frac{3/4}{2} = \frac{3}{8} \quad \text{R.}$$

389

INVERSO de un quebrado es otro quebrado que tiene por numerador el denominador del primero y por denominador el numerador del primero.

Así, el inverso de 4 o $\frac{4}{1}$ es $\frac{1}{4}$; el inverso de $\frac{5}{6}$ es $\frac{6}{5}$; el de $\frac{7}{9}$ es $\frac{9}{7}$.

El inverso de un quebrado proviene de **dividir la unidad entre dicho quebrado**.

Así:

$$1 \div 5 = \frac{1}{1} \div \frac{5}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$1 \div \frac{3}{8} = \frac{1}{1} \div \frac{3}{8} = \frac{1}{1} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

Por tanto, siempre que tengamos una fracción compleja cuyo numerador sea la unidad, para reducirla a simple, no hay más que invertir el quebrado del denominador.

Ejemplos

$$\frac{1}{3/4} = \frac{4}{3} \quad \text{R.}$$

$$\frac{1}{1/6} = \frac{6}{1} = 6 \quad \text{R.}$$

145

Simplificar:

1. $\frac{5}{3/8}$ R. $13\frac{1}{3}$

2. $\frac{7/8}{10}$ R. $\frac{7}{80}$

3. $\frac{3/5}{1/10}$ R. 6

Ejercicio

4. $\frac{2/3}{3/7}$ R. $1\frac{5}{9}$

11. $\frac{16}{1} \div \frac{1}{1/4}$ R. 4

17. $\frac{6}{5/8} \div \frac{3/5}{2}$ R. 32

5. $\frac{4\frac{1}{3}}{6\frac{1}{3}}$ R. 13

12. $\frac{1}{1/5} \div \frac{1}{15}$ R. $\frac{1}{3}$

18. $\frac{2/3}{3/5} \div \frac{1/6}{2/5}$ R. $2\frac{2}{3}$

6. $\frac{2/19}{6\frac{4}{5}}$ R. $\frac{5}{323}$

13. $\frac{1}{5/6} \div \frac{1}{15}$ R. $\frac{2}{25}$

19. $\frac{5\frac{2}{3}}{1/4} \div \frac{6\frac{1}{2}}{1/6}$ R. $\frac{68}{117}$

7. $\frac{5/8}{3/16}$ R. $3\frac{1}{3}$

14. $\frac{1}{3/5} \div \frac{1}{3/8}$ R. $\frac{5}{8}$

20. $\frac{1/3}{4\frac{1}{5}} \div \frac{1/2}{3\frac{2}{5}}$ R. $\frac{34}{63}$

8. $\frac{7\frac{3}{4}}{1/8}$ R. 62

15. $\frac{5\frac{3}{4}}{1} \div \frac{1}{4\frac{1}{5}}$ R. $\frac{84}{115}$

10. $\frac{15}{1} \div \frac{1}{1/4}$ R. $3\frac{1}{2}$

16. $\frac{3}{3/4} \div \frac{1}{1/6}$ R. $\frac{2}{3}$

EXPRESIÓN FRACCIONARIA COMPLEJA

390

Es una fracción compleja en cuyo numerador o denominador, o en ambos, hay operaciones indicadas.

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{8 \times \frac{1}{5}} \quad \frac{\left(6 + \frac{2}{3}\right) \div 5}{\frac{2}{1/8}}$$

Ejemplos

SIMPLIFICACIÓN DE UNA EXPRESIÓN FRACCIONARIA COMPLEJA

391

Se efectúan las operaciones del numerador y denominador hasta convertirlos en un solo quebrado y se efectúa la división de estos dos quebrados.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{(1/6 + 1/9 - 1/12) \times 6/7}{8 \div \frac{1}{1/4}}$

$$\frac{(1/6 + 1/9 - 1/12) \times 6/7}{8 \div \frac{1}{1/4}} = \frac{7/36 \times 6/7}{8 \div 4} = \frac{1/6}{2} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \quad \text{R.}$$

2) Simplificar $\frac{\frac{2 + 2/5}{3} + \frac{5 1/4}{3/2}}{\frac{3 3/5}{1/2} - \frac{1/4}{1/2}} \times \left(235 \frac{1}{5} \div 4 \frac{1}{5} \right)$

Efectuando el numerador: $\frac{2 + 2/5}{3} + \frac{5 1/4}{3/2} = \frac{12/5}{3} + \frac{21/4}{3/2} = \frac{4}{5} + \frac{7}{2} = \frac{43}{10}$

Efectuando el denominador: $\frac{3 3/5}{1/2} - \frac{1/4}{1/2} = \frac{18/5}{1/2} - \frac{1/4}{1/2} = \frac{36}{5} - \frac{1}{2} = \frac{67}{10}$

Efectuando el paréntesis: $235 \frac{1}{5} \div 4 \frac{1}{5} = \frac{1,176}{5} \times \frac{5}{21} = 56$

Tendremos: $\frac{43/10}{67/10} \times 56 = \frac{43}{67} \times 56 = \frac{2,408}{67} = 35 \frac{63}{67} \quad \text{R.}$

3) Simplificar $\frac{3}{2 + \frac{1/5}{3 - 1/4}}$

Esta clase de fracciones se reducen a simples realizando las operaciones indicadas *de abajo hacia arriba* como se indica con los cuadritos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2 + \frac{1/5}{3 - 1/4}} &= \frac{3}{2 + \frac{1/5}{11/4}} = \frac{3}{2 + \frac{4}{55}} \\ &= \frac{3}{114/55} = \frac{3}{1} \times \frac{55}{114} = \frac{55}{38} = 1 \frac{17}{38} \quad \text{R.} \end{aligned}$$

146

Ejercicio

Simplificar

1. $\frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{30}}{23/30}$

R. 1

3. $\frac{1/10 + 1/100 + 1/1,000}{10}$

R. $\frac{109}{10,000}$

2. $\frac{4 \frac{1}{2} - 3 \frac{2}{3} + 1/4}{2 - 1/5}$

R. $\frac{65}{108}$

4. $\frac{2/5 + 3/10 - 1/20}{2/3 + 1/9 + 5/6}$

R. $\frac{117}{290}$

$$5. \frac{4\frac{1}{7} - 2\frac{1}{14} + 3\frac{1}{2}}{6\frac{2}{3} + 5\frac{5}{9} - 10\frac{1}{18}}$$

$$R. 2\frac{4}{7}$$

$$6. \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{7} \times \frac{7}{5}}$$

$$R. 12\frac{1}{2}$$

$$7. \frac{\frac{7}{8} + 1\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{4}{9}}{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{10} + \frac{1}{14} \times \frac{7}{5}}$$

$$R. \frac{35}{36}$$

$$8. \frac{\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{8} - \frac{7}{24}\right) \times 3\frac{1}{13}}{5 - \frac{2}{3}}$$

$$R. \frac{4}{13}$$

$$9. \frac{\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{25} + \frac{3}{40}\right) \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{12}}$$

$$R. 1\frac{1}{50}$$

$$10. \frac{\left(5\frac{7}{36} - 4\frac{1}{18} + 1\frac{1}{72}\right) \times 36}{78 - \frac{1}{2}}$$

$$R. 1$$

$$11. \frac{\left(6\frac{1}{8} - \frac{1}{20} - \frac{1}{55}\right) \div \frac{2}{7}}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) \times 4\frac{4}{5}}$$

$$R. 17\frac{703}{1,056}$$

$$12. \frac{\left(9 \div \frac{1}{\frac{1}{3}} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{12}}{6 \div \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$R. \frac{1}{3}$$

$$13. \frac{\frac{2}{\frac{3}{5}} + \frac{4}{\frac{6}{7}}}{\frac{1}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

$$R. 4$$

$$14. \frac{\frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{\frac{1}{5}} + \frac{4}{\frac{1}{10}}}$$

$$R. \frac{1}{50}$$

$$15. \frac{\frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{5}} - \frac{1}{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{\frac{1}{8}} - \frac{1}{\frac{1}{9}}}$$

$$R. \frac{186}{245}$$

$$16. \frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}}{(5 \div \frac{1}{8}) \times (\frac{1}{5} \div \frac{1}{10})}$$

$$R. \frac{7}{1,152}$$

$$17. \frac{\frac{3}{4} + \frac{5\frac{2}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}}{6 + (8 - \frac{1}{4})} + 3$$

$$R. 8\frac{3}{11}$$

$$18. \frac{\frac{8}{\frac{1}{4}} + 2 - \frac{1}{\frac{1}{4}}}{3 \div \left(\frac{5}{3} \times \frac{6}{5}\right)}$$

$$R. 21\frac{1}{3}$$

$$19. \frac{1 + \frac{1}{2} \quad 1 - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{2}{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}} \times \left(23\frac{1}{2} \div \frac{47}{12}\right)$$

$$R. 5$$

$$20. \frac{2 - \frac{2}{5} \quad 3 - \frac{1}{3}}{\frac{\frac{4}{5}}{4 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{4}{3}}{5 - \frac{1}{5}}} \times \left(\frac{7}{20} \times \frac{11}{2}\right)$$

$$R. 1$$

$$21. \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{6}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{8}}} \times \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{49} - \frac{62}{343}\right)$$

$$R. \frac{1}{50}$$

$$22. 1 + \frac{3}{2 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$R. 1\frac{9}{22}$$

$$23. 2 + \frac{5}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{8}}}$$

$$R. 4\frac{9}{58}$$

$$24. 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}$$

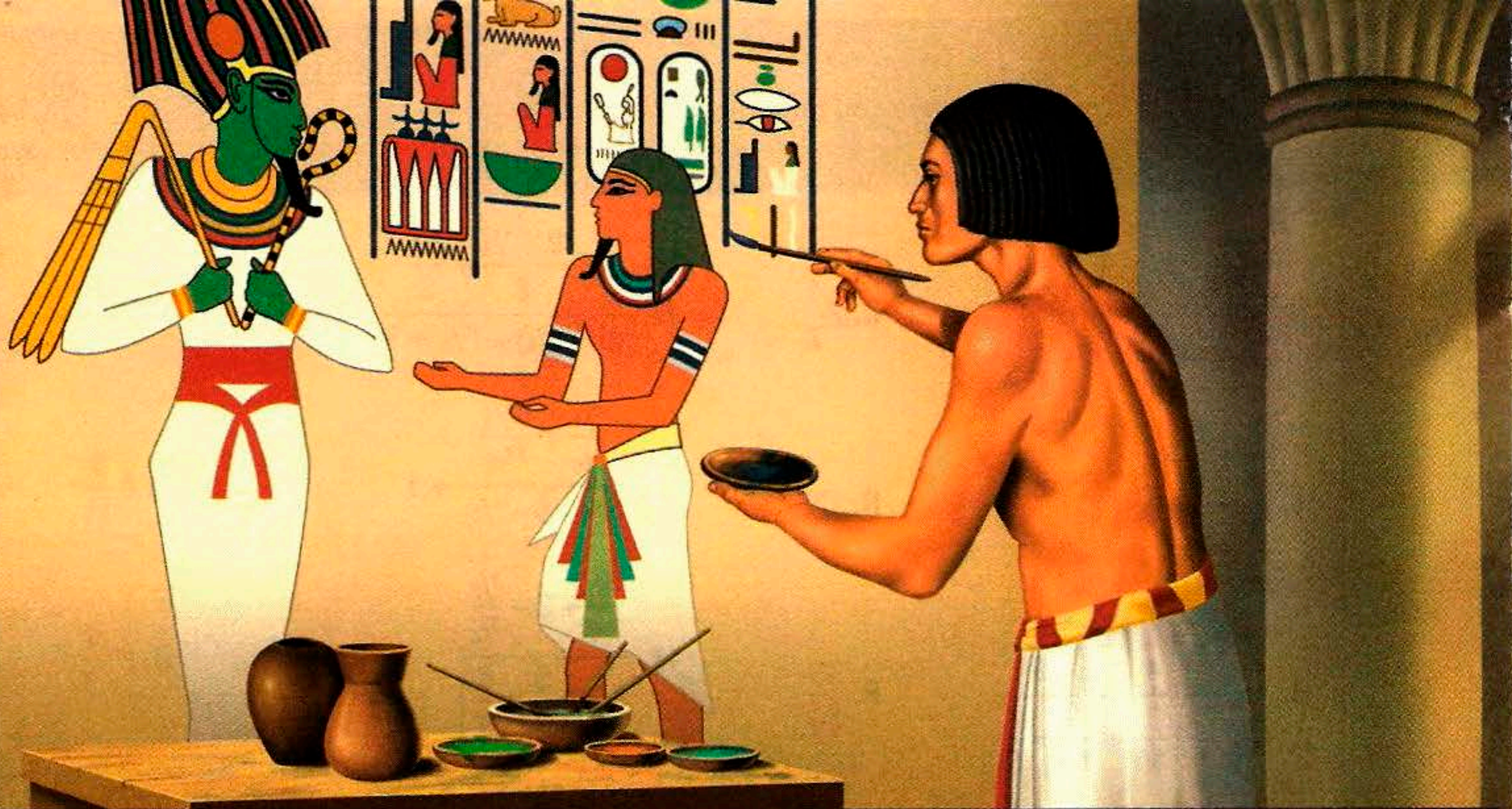
$$R. 3\frac{2}{9}$$

$$25. 5 + \frac{2}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}}}$$

$$R. 6\frac{5}{9}$$

$$26. \frac{5}{6 + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{3}}$$

$$R. \frac{225}{272}$$



En las numerosas inscripciones egipcias descifradas se encuentran múltiples problemas con números fraccionarios. Con su peculiar sistema de fracciones con la unidad como numerador, resolvían los problemas de la vida diaria, tales

como la distribución del pan, las medidas de la tierra, la construcción de las pirámides, etcétera. Algunos de los problemas presentados en el papiro de Ahmes tienen todavía actualidad.

Capítulo **XXVI**

PROBLEMAS TIPO SOBRE QUEBRADOS COMUNES

392 Si añadimos 1 al numerador y 3 al denominador de $\frac{3}{4}$, ¿aumenta o disminuye este quebrado y cuánto?

Al añadir 1 al numerador y 3 al denominador, $\frac{3}{4}$ se convierte en $\frac{3+1}{4+3} = \frac{4}{7}$. Para saber si el quebrado $\frac{3}{4}$ ha aumentado o disminuido al convertirse en $\frac{4}{7}$, tenemos que reducir ambos a un común denominador.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 4}{7 \times 4} = \frac{16}{28}$$

Aquí vemos que $\frac{3}{4}$ ha disminuido porque su valor era $\frac{21}{28}$ y se ha convertido en $\frac{16}{28}$, y lo que ha disminuido es:

$$\frac{21}{28} - \frac{16}{28} = \frac{5}{28} \quad \text{R.}$$

147

Ejercicio

1. ¿Aumenta o disminuye y cuánto $\frac{7}{9}$ al añadir 1 al numerador y 4 al denominador?

R. Dis. $\frac{19}{117}$

2. ¿Qué variación sufre $\frac{10}{9}$ al añadir 2 al numerador y 5 al denominador?

R. Dis. $\frac{16}{63}$

3. ¿Qué alteración sufre $\frac{7}{11}$ al añadir 5 al numerador y 3 al denominador? **R. Aum. $\frac{17}{77}$**
4. ¿Qué variación sufre $\frac{13}{8}$ al añadir 7 al numerador y 4 al denominador? **R. Aum. $\frac{3}{24}$**
5. ¿Aumenta o disminuye $\frac{5}{6}$ al añadir 3 a sus dos términos y cuánto? **R. Aum. $\frac{1}{18}$**
6. ¿Aumenta o disminuye $\frac{8}{9}$ al restar 5 a sus dos términos y cuánto? **R. Dis. $\frac{5}{36}$**
7. ¿Aumenta o disminuye $\frac{8}{7}$ al añadir 4 a sus dos términos y cuánto? **R. Dis. $\frac{4}{77}$**
8. ¿Aumenta o disminuye $\frac{9}{7}$ y cuánto al restar 3 a sus dos términos? **R. Aum. $\frac{3}{14}$**
9. Si tengo lápices que valen $\$ \frac{7}{10}$ y los vendo por $\$ \frac{9}{13}$, ¿gano o pierdo y cuánto? **R. Pierdo $\$ \frac{1}{130}$**
10. ¿Qué será más ventajoso, vender 50 bolsas de azúcar a $\$ 5\frac{3}{8}$ o a $\$ 5\frac{4}{9}$ y cuál sería la diferencia de precio en la venta total? **R. A $\$ 5\frac{4}{9}$; $\$ 3\frac{17}{36}$**

¿Por cuál número se multiplica $\frac{5}{6}$ cuando se convierte en $2\frac{3}{7}$?

393

$2\frac{3}{7}$ es el producto y $\frac{5}{6}$ un factor. Para hallar el otro factor no hay más que dividir el producto entre el factor conocido:

$$2\frac{3}{7} \div \frac{5}{6} = \frac{17}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{102}{35} = 2\frac{32}{35}$$

Luego, se multiplica por $2\frac{32}{35}$ **R.**

1. ¿Por qué número se multiplica $\frac{1}{2}$ cuando se convierte en $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$ cuando se convierte en $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{5}$ cuando se convierten en 6? **R. Por $\frac{3}{2}$; $\frac{24}{7}$; 10**
2. ¿Por cuál número hay que multiplicar $14\frac{2}{9}$ para obtener $5\frac{1}{6}$? **R. Por $\frac{93}{256}$**
3. ¿Por cuál número hay que multiplicar a 7 para que dé 8; a 9 para que dé 10; a 14 para obtener 3? **R. Por $\frac{8}{7}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{3}{14}$**
4. ¿Por qué número se multiplica $\frac{5}{6}$ cuando se añade 2 a sus dos términos; cuando se resta 2 a sus dos términos? **R. Por $\frac{21}{20}$; $\frac{9}{10}$**
5. ¿Por cuál número se multiplica $\frac{11}{9}$ cuando se resta 4 a sus dos términos; cuando se añade 5 a sus dos términos? **R. Por $1\frac{8}{55}$; $\frac{72}{77}$**

148

Ejercicio

6. ¿Por cuál número se multiplica 6 cuando se convierte en 4; 3 cuando se convierte en 1; 11 cuando se convierte en 12? **R. Por $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{11}$**
7. ¿Por cuál número se multiplica $\frac{7}{8}$ cuando se añade 5 al numerador y 3 al denominador; cuando se resta 3 de 7 y se cambia el 8 por 10? **R. Por $1\frac{19}{77}, \frac{16}{35}$**
8. ¿Por cuál número multiplico el precio de compra de un objeto que me costó \$15 al venderlo por \$20? **R. Por $1\frac{1}{3}$**

394

¿Entre qué número se divide 80 cuando se convierte en $\frac{3}{5}$?

80 es el dividendo y $\frac{3}{5}$ el cociente. Para hallar el divisor no hay más que dividir el dividendo entre el cociente:

$$80 \div \frac{3}{5} = \frac{80}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}$$

Luego, se divide entre $133\frac{1}{3}$ **R.**

149

Ejercicio

1. ¿Entre qué número se divide 8 cuando se convierte en 6; 9 cuando se convierte en 7; 11 cuando se convierte en 19? **R. Entre $\frac{4}{3}, 1\frac{2}{7}, \frac{11}{19}$**
2. ¿Entre cuál número hay que dividir a 7 para obtener 8; a 9 para que dé 10; a 14 para que dé 3; a 50 para tener $\frac{1}{4}$? **R. Entre $\frac{7}{8}, \frac{9}{10}, 4\frac{2}{3}, 200$**
3. ¿Entre cuál número hay que dividir a $5\frac{2}{5}$ para tener $6\frac{1}{3}$? **R. Entre $\frac{81}{95}$**
4. ¿Entre cuál número se divide $\frac{5}{6}$ cuando se añade 2 a cada uno de sus términos; cuando se resta 2 a cada uno de sus términos? **R. Entre $\frac{20}{21}, 1\frac{1}{9}$**
5. ¿Entre cuál número se divide $\frac{11}{9}$ cuando se resta 4 a sus dos términos; cuando se añade 5 a los dos? **R. Entre $\frac{55}{63}, 1\frac{5}{72}$**
6. ¿Entre cuál número se divide $\frac{7}{8}$ cuando se añade 5 al numerador y 3 al denominador; cuando se resta 3 de 7 y se cambia el 8 por 10? **R. Entre $\frac{77}{96}, 2\frac{3}{16}$**
7. ¿Entre cuál número divido el precio de compra de un objeto que me costó \$15 cuando lo vendo por \$20? **R. Entre $\frac{3}{4}$**
8. Si en lugar de dar \$60 a un muchacho le doy \$80, ¿entre cuál número he dividido lo que pensaba darle antes? **R. Entre $\frac{3}{4}$**

9. Si en lugar de comprar arroz a $\$3\frac{3}{4}$ por libra lo compro a $\$4\frac{1}{4}$, ¿entre cuál número se ha dividido el precio anterior? **R. Entre $\frac{15}{17}$**
10. Si en lugar de estudiar 5 horas estudio 3, ¿entre cuál número he dividido el número inicial de horas? **R. Entre $\frac{5}{3}$**

¿Qué parte de 10 es 4?

Diremos: 1 es $\frac{1}{10}$ de 10; luego, 4 será cuatro veces mayor, o sea, $\frac{1}{10} \times 4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Luego, **4 es los $\frac{2}{5}$ de 10** **R.**

Como se ve por lo hecho, no hay más que dividir las dos cantidades dadas, poniendo como divisor o denominador la cantidad que lleva el **de** adelante.

¿Qué parte de $\frac{2}{3}$ es $\frac{7}{8}$?

Dividimos, poniendo a $\frac{2}{3}$ como divisor:

$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{16}$$

Luego, **$\frac{7}{8}$ es los $\frac{21}{16}$ de $\frac{2}{3}$** **R.**

395

396

150

Ejercicio

- Hallar qué parte de 5 es 4; de 6 es 7; de 9 es 8. **R. $\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{9}$**
- ¿Qué parte de 15 es 20; de 12 es 18; de 24 es 30? **R. $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$**
- ¿Qué parte de 20 es 5; de 18 es 4; de 5 es 6? **R. $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{6}{5}$**
- ¿Qué parte de $\frac{5}{6}$ es $\frac{2}{7}$; de $\frac{1}{2}$ es $3\frac{1}{5}$? **R. $\frac{12}{35}, \frac{32}{5}$**
- ¿Qué fracción de $4\frac{3}{4}$ es $5\frac{1}{8}$; de $7\frac{5}{6}$ es 24? **R. $\frac{41}{38}, \frac{144}{47}$**
- ¿Qué parte de un peso son 6 ¢; 18 ¢; 40 ¢? **R. $\frac{3}{50}, \frac{9}{50}, \frac{2}{5}$**
- ¿Qué parte de una pieza de 60 m es $14\frac{2}{5}$ m; $\frac{5}{6}$ m; 12 m? **R. $\frac{6}{25}, \frac{1}{72}, \frac{1}{5}$**
- Juan tenía bs. 60,000 y gastó bs. 18,000. ¿Qué parte de su dinero gastó y qué parte ahorró?
R. $\frac{3}{10}, \frac{7}{10}$
- Un hombre que gana 80 balboas mensuales, gasta 25. ¿Qué parte de su sueldo gasta y qué parte ahorra? **R. $\frac{5}{16}, \frac{11}{16}$**

10. Un hacendado tenía una finca de 200 hectáreas y vendió $\frac{1}{6}$ de 48 hectáreas. ¿Qué parte de la finca le queda? **R. $\frac{24}{25}$**
11. ¿Qué parte del costo se pierde cuando se vende en 15 nuevos soles lo que ha costado 20? **R. $\frac{1}{4}$**
12. Un padre reparte \$100 entre sus tres hijos. A uno da \$50, a otro \$40 y a otro el resto. ¿Qué parte de los cien pesos ha dado a cada uno de los hijos? **R. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}$**
13. Si me deben los $\frac{3}{5}$ de 500 balboas y me pagan los $\frac{2}{3}$ de 300, ¿qué parte de lo que me debían me han pagado y qué parte me adeudan? **R. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$**
14. Una botella llena de líquido pesa 3 kg y el peso de la botella es $\frac{7}{8}$ de kg. ¿Qué parte del peso total es el peso del líquido? **R. $\frac{17}{24}$**
15. Cuando vendo por \$24 lo que me había costado 16, ¿qué parte del costo y de la venta es la ganancia? **R. $\frac{1}{2}$ del costo $\frac{1}{3}$ de la venta.**
16. Cuando vendo en 500 dólares un caballo que me había costado 425, ¿qué parte es mi ganancia del costo y del precio de venta? **R. $\frac{3}{17}$ del costo; $\frac{3}{20}$ de la venta**
17. ¿Qué parte de un cargamento de arroz que vale 4,500 dólares podré comprar si vendo 7 caballos a 500 cada uno? **R. $\frac{7}{9}$**

397 Un caballo que costó 1,250 balboas se vende por los $\frac{2}{5}$ del costo. ¿Cuánto se pierde?

Para saber en cuánto se ha vendido el caballo hay que hallar los $\frac{2}{5}$ de 1,250 balboas:

$\frac{1}{5}$ de 1,250 será $1,250 \div 5 = 250$ y los $\frac{2}{5}$ serán $250 \times 2 = 500$ balboas.

Si el caballo se ha vendido en 500 balboas se han perdido $1,250 - 500 = 750$ balboas **R.**

398 Tenía \$90. Perdí los $\frac{3}{5}$ y presté $\frac{5}{6}$ del resto. ¿Cuánto me queda?

Perdí $\frac{3}{5}$ de \$90. $\frac{1}{5}$ de \$90 es $\$90 \div 5 = \18 y los $\frac{3}{5}$ serán $\$18 \times 3 = \54 . El resto será $\$90 - \$54 = \$36$.

Presté $\frac{5}{6}$ del resto, o sea, $\frac{5}{6}$ de \$36:

$\frac{1}{6}$ de \$36 es $\$36 \div 6 = \6 y los $\frac{5}{6}$ serán $\$6 \times 5 = \30 .

Si perdí \$54 y presté \$30, me quedan $\$90 - (\$54 + \$30) = \$90 - \$84 = \6 **R.**

151

Ejercicio

1. ¿Cuánto pierdo cuando vendo por los $\frac{3}{7}$ del costo lo que me ha costado Q. 84? **R. Q. 48**
2. ¿Cuánto gano cuando vendo por los $\frac{13}{9}$ del precio lo que me ha costado 108 nuevos soles?
R. 48 nuevos soles
3. ¿Gano o pierdo y cuánto, cuando vendo por los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{7}{2}$ del costo lo que me ha costado \$40?
R. Gano \$44
4. Al vender un caballo en 910 balboas gano los $\frac{5}{13}$ de la venta. Hallar el costo. **R. 560 balboas**
5. ¿Qué parte del costo pierdo cuando vendo por \$65 lo que me había costado \$80? **R. $\frac{3}{16}$**
6. Compré un traje por \$3,000 y lo vendo ganando los $\frac{3}{10}$ del costo. Hallar el precio de venta.
R. \$3,900
7. Un obrero ajusta una obra por \$560 y hace los $\frac{4}{7}$ de ella. ¿Cuánto recibe y cuánto le falta cobrar?
R. Recibe \$320; faltan \$240
8. Me deben los $\frac{7}{9}$ de 90 lempiras y me pagan los $\frac{3}{5}$ de 90. ¿Cuánto me deben aún? **R. 16 lempiras**
9. De los \$84 que tenía, perdí $\frac{2}{7}$ y presté $\frac{5}{14}$. ¿Cuánto me queda? **R. \$30**
10. De una ciudad a otra hay 210 km. Un día ando los $\frac{3}{7}$ de esa distancia, otro día los $\frac{2}{21}$ y un tercer día los $\frac{7}{30}$. ¿A qué distancia estoy entonces del punto de llegada? **R. 51 km**
11. De una finca de 500 hectáreas se cultivan $\frac{3}{20}$, se alquila $\frac{1}{10}$ y lo restante se vende a 5,000 quetzales la hectárea. ¿Cuánto importa la venta? **R. Q. 1,875,000**
12. Con los \$65 que tenía compré lápices por \$15 y gasté en un sacapuntas los $\frac{7}{10}$ del resto. ¿Cuánto me queda? **R. \$15**
13. Una viajera tiene que recorrer 75 km. Un día anda los $\frac{8}{5}$ de dicha distancia y otro día $\frac{1}{3}$ del resto. ¿Cuánto le falta por recorrer? **R. 20 km**
14. Un muchacho tiene que hacer 30 problemas. Un día resuelve los $\frac{3}{10}$ y al día siguiente los $\frac{4}{7}$ del resto. ¿Cuántos problemas le faltan por resolver aún? **R. 9**
15. Tenía \$96. Con los $\frac{5}{12}$ de esta cantidad compré lápices y con los $\frac{3}{8}$ de lo que me quedó compré un sacapuntas. ¿Cuánto me queda? **R. \$35**
16. A $2\frac{1}{2}$ dólares el quintal de una mercancía, ¿cuánto importarán tres pedidos, de los cuales, el primero contiene 5 quintales; el segundo $\frac{2}{5}$ de lo que contiene el anterior, y el tercero $\frac{1}{10}$ de lo que contiene el segundo? **R. 18 dólares**
17. Un padre deja al morir \$4,500 para repartir entre sus tres hijos. El mayor debe recibir $\frac{2}{9}$ de la herencia; el segundo $\frac{1}{5}$ de la parte del anterior, y el tercero lo restante. ¿Cuánto recibirá cada uno?
R. Mayor, \$1,000; 2º, \$200; 3º, \$3,300

18. Tengo 9,000 bolivianos. Si presto los $\frac{3}{10}$ de esta cantidad; gasto una cantidad igual a los $\frac{4}{5}$ de lo que presté e invierto una cantidad igual a los $\frac{5}{9}$ de lo que gasté, ¿cuánto me quedará? **R. 2,940 bolivianos**
19. De los \$2,000 que tenía dí a mi hermano los $\frac{3}{5}$; a mi primo Juan los $\frac{3}{8}$ del resto y a mi sobrino los $\frac{3}{5}$ del nuevo resto. ¿Cuánto me queda? **R. \$200**
20. Tenía ahorrados \$1,120. En enero invertí la mitad de esta cantidad; en febrero la mitad de lo que me quedaba; en marzo la mitad de lo que tenía después de los gastos anteriores, y en abril la mitad de lo que tenía después de todo lo anterior. Si con lo que me quedaba compré en mayo una calculadora, ¿cuánto me costó la calculadora? **R. \$70**

399

¿Qué hora es cuando el reloj señala los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ del doble de las 6 de la mañana?

Como se trata de una fracción múltiple, no hay más que multiplicar todas las cantidades:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{6}{1} = 4$$

Serán las **4 de la mañana** **R.**

152

Ejercicio

1. Si me pagan los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{2}{5}$ de \$150, ¿cuánto recibiré? **R. \$40**
2. ¿Qué hora es cuando el reloj señala los $\frac{5}{4}$ de $\frac{1}{2}$ del triple de las 8 a. m.? **R. 3 p. m.**
3. Si me debían los $\frac{3}{8}$ de 840 lempiras y me pagan los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{14}$ de 840, ¿cuánto me deben? **R. 90 lempiras**
4. De una finca de 4,200 hectáreas se venden los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{7}$ y se alquilan los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{4}{5}$ de la finca. ¿Cuántas hectáreas quedan? **R. 1,280 ha**
5. Si vendo una computadora por los $\frac{3}{8}$ de los $\frac{5}{9}$ de \$7,200 y una impresora por $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de \$2,400, ¿cuánto recibiré en total? **R. \$1,600**
6. De una finca de 6,300 hectáreas se venden primero los $\frac{5}{6}$ de los $\frac{2}{3}$ y más tarde los $\frac{2}{9}$ de los $\frac{5}{7}$ de los $\frac{9}{5}$. ¿Cuánto queda? **R. 1,000 ha**
7. ¿Cuánto pierdo cuando vendo por los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{9}{10}$ del precio lo que me ha costado 5,000 nuevos soles? **R. 3,200 nuevos soles**
8. Una persona tiene derecho a recibir los $\frac{7}{20}$ de \$2,000. Si cobra $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de \$2,000, ¿cuánto le deben? **R. \$450**

9. Una persona es dueña de los $\frac{3}{10}$ de un terreno valuado en \$10,000. ¿Cuánto recibirá si vende los $\frac{7}{10}$ de $\frac{1}{2}$ de su parte? **R. \$1,050**
10. Un reloj adelanta por hora los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ de 40 minutos. ¿Cuánto adelantará en 10 horas? **R. 2 h**

Los $\frac{3}{4}$ de un número son 60. ¿Cuál es el número?

Si los $\frac{3}{4}$ del número que se busca son 60, $\frac{1}{4}$ del número será $60 \div 3 = 20$, y los $\frac{4}{4}$, o sea el número buscado, será $20 \times 4 = 80$ **R.**

400

153

Ejercicio

- ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{5}$ equivalen a 50? **R. 125**
- Los $\frac{3}{4}$ de un número son 120. ¿Cuál es el número? **R. 160**
- Pedro tiene 9 años y la edad de Pedro es los $\frac{3}{2}$ de la de Enrique. ¿Qué edad tiene éste? **R. 6 años**
- Con los \$65 que tengo no podría pagar más que los $\frac{13}{14}$ de mis deudas. ¿Cuánto debo? **R. \$70**
- Compré un CD y un DVD. El CD me costó \$45 y esta cantidad es los $\frac{5}{9}$ del precio del DVD. ¿Cuánto costó éste? **R. \$81**
- Un hombre gasta en la alimentación de su familia los $\frac{2}{5}$ de su sueldo mensual. Si en un mes gasta por ese concepto 82 balboas, ¿cuál ha sido su sueldo ese mes? **R. 205 balboas**
- Si los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de un número equivalen a 24, ¿cuál es el número? **R. 48**
- ¿Cuál es el número en el cual los $\frac{5}{6}$ de sus $\frac{3}{22}$ equivalen a 80? **R. 704**
- Una casa tiene 28 m de altura y esta altura representa los $\frac{4}{7}$ de los $\frac{7}{8}$ de la altura de otro edificio. ¿Cuál es la altura de éste? **R. 56 m**
- Si los $\frac{3}{8}$ de un quintal de mercancías valen \$24, ¿cuánto vale el quintal? **R. \$64**
- Se corta un pedazo de 36 cm de una varilla. Si ese pedazo cortado es los $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de la varilla, ¿cuál será la longitud de ésta? **R. 60 cm**
- En un colegio hay 42 alumnos varones que representan los $\frac{3}{13}$ del total de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay y cuántas niñas? **R. 182 al.; 140 niñas.**
- $\frac{2}{15}$ de metro de casimir valen 4 dólares. ¿Cuánto valen 6 m? **R. 180 dólares**
- Los $\frac{15}{79}$ de una obra importan \$75. ¿Cuánto importarían 4 obras iguales? **R. \$1,580**
- Un comerciante vende los $\frac{8}{35}$ de sus efectos por 512 nuevos soles. ¿Cuánto importan los efectos que le quedan? **R. 1,728 nuevos soles**
- En un accidente se averían $\frac{7}{11}$ de las mercancías que lleva un camión. Si la avería importa 91 dólares, ¿cual era el valor de las mercancías? **R. 143 dólares**

17. Al vender los $\frac{4}{11}$ de su finca un hombre se queda con 60 hectáreas de tierra menos. ¿Cuál era la extensión de la finca? **R. 165 hectáreas**
18. Se venden 14 m de tela que son los $\frac{2}{7}$ de una pieza. ¿Cuántos metros habrá en 8 piezas iguales? **R. 392 m**
19. Si poseo los $\frac{3}{4}$ de una finca y vendo los $\frac{2}{5}$ de mi parte por \$9,000, ¿cuál es el valor de la finca? **R. \$30,000**
20. Un hombre que es dueño de los $\frac{3}{4}$ de un terreno vende $\frac{3}{11}$ de su parte por \$7,290. ¿Cuál es el valor del terreno? **R. \$35,640**

401 Los $\frac{2}{3}$ de la edad de Mario son 24 años y la edad de Roberto es los $\frac{4}{9}$ de la de Mario. Hallar ambas edades.

Si $\frac{2}{3}$ de la edad de Mario son 24 años, $\frac{1}{3}$ de su edad será $24 \div 2 = 12$ años, y los $\frac{3}{3}$ de su edad, o sea su edad, será $12 \times 3 = 36$ años.

La edad de Roberto es $\frac{4}{9}$ de la de Mario, o sea, $\frac{4}{9}$ de 36 años. $\frac{1}{9}$ de 36 años es $36 \div 9 = 4$ años, y los $\frac{4}{9}$ serán $4 \times 4 = 16$ años.

Mario tiene 36 años, y Roberto, 16 años R.

154

Ejercicio

- Los $\frac{4}{5}$ de un número son 40. ¿Cuántos serán los $\frac{3}{10}$ del número? **R. 15**
- ¿Cuánto son los $\frac{3}{8}$ de un número cuyos $\frac{5}{7}$ equivalen a 80? **R. 42**
- La edad de Enrique es los $\frac{5}{6}$ de la de Juan y $\frac{4}{5}$ de la de Juan equivalen a 24 años. Hallar ambas edades. **R. Juan, 30 años; Enrique, 25**
- Si prestara $\frac{7}{9}$ de mi dinero prestaría \$14. ¿Cuánto me ha costado un cuaderno que compré con los $\frac{5}{6}$ de mi dinero? **R. \$15**
- Los $\frac{5}{9}$ de una pieza de tela importan 65 quetzales. ¿Cuánto vale la pieza y cuánto los $\frac{7}{13}$ de la pieza? **R. 117 sucres; 63 quetzales**
- ¿Cuánto son los $\frac{3}{25}$ de una pieza de tela cuyos $\frac{4}{15}$ equivalen a 60 m? **R. 27 m**
- Los $\frac{2}{3}$ de un cargamento de frutas valen \$5,000. ¿Cuánto vale el resto? **R. \$2,500**
- Al cortar un pedazo de 36 cm de longitud de una varilla he cortado los $\frac{6}{7}$ de la varilla. ¿Cuál es la longitud de la parte que queda? **R. 6 cm**
- Si al comprar un CD de \$33 gasto los $\frac{11}{13}$ de mi dinero, ¿cuánto me queda? **R. \$6**

10. \$180 representan los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{6}$ de mi dinero. ¿Cuánto me costará un DVD que compré con los $\frac{7}{18}$ de mi dinero? **R. \$126**
11. La extensión de mi finca es los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{7}{8}$ de la extensión de la finca de Pedro Suárez, y los $\frac{4}{9}$ de los $\frac{3}{4}$ de la extensión de esta finca son 12 hectáreas. Hallar la extensión de ambas fincas.
R. La de P. S., 36 hectáreas; la mía, 21 hectáreas
12. $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de la edad de Juan Pérez son 3 años y la edad de su nieto es $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{9}$ de la suya. Hallar ambas edades. **R. J. P., 72 a.; nieto, 2 a**

Con los $\frac{3}{8}$ y los $\frac{2}{7}$ de mi dinero compré una computadora de \$7,400. ¿Cuánto tenía y cuánto me quedó?

402

El dinero empleado ha sido $\frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{37}{56}$ de mi dinero y como lo empleado ha sido \$7,400, tendremos que $\frac{37}{56}$ de mi dinero = \$7,400; luego, $\frac{1}{56}$ de mi dinero será $\$7,400 \div 37 = \200 , y los $\frac{56}{56}$, o sea todo mi dinero antes de gastar nada, será $\$200 \times 56 = \text{\$11,200}$, **R.**, luego, me quedan $\$11,200 - \$7,400 = \text{\$3,800}$ **R.**

Una pecera con sus peces ha costado 48 dólares. Sabiendo que el precio de la pecera es los $\frac{5}{11}$ del precio de los peces, hallar el precio de los peces y de la pecera.

403

El precio de los peces lo representamos por sus $\frac{11}{11}$. Si el precio de la pecera es los $\frac{5}{11}$ del precio de los peces y por ambas cosas se han pagado 48 dólares, tendremos que:

$$\frac{11}{11} + \frac{5}{11} = \frac{16}{11} \text{ del precio de los peces} = 48$$

Si $\frac{16}{11}$ del precio de los peces equivalen a 48 dólares, $\frac{1}{11}$ de dicho precio será $48 \div 16 = 3$ dólares, y los $\frac{11}{11}$, o sea el precio de los peces, será $3 \times 11 = \text{\$33 dólares}$ **R.**

Si el precio de la pecera es los $\frac{5}{11}$ del precio de los peces y sabemos que $\frac{1}{11}$ del precio de los peces equivale a 3 dólares, los $\frac{5}{11}$, precio de la pecera, serán $3 \times 5 = \text{\$15 dólares}$ **R.**

1. Con los $\frac{3}{4}$ y los $\frac{2}{9}$ de mi dinero compré un DVD de \$105. ¿Cuánto tenía y cuánto me quedó?

R. \$108; \$3

2. Cortando los $\frac{2}{9}$ y los $\frac{3}{7}$ de una varilla, la longitud de ésta ha disminuido en 82 cm. ¿Cuál era la longitud de la varilla? **R. 126 cm**

155

Ejercicio

3. Los $\frac{3}{7}$ más los $\frac{2}{9}$ de una pieza de tela son 164 m. Hallar la longitud de la pieza. **R. 252 m**
4. La suma de la sexta, la novena y la duodécima parte de un número es 26. Hallar el número. **R. 72**
5. $\frac{3}{11}$ de una pieza de tela más $\frac{5}{33}$ de la misma menos $\frac{1}{3}$ de ella valen 18 lempiras. ¿Cuánto vale la pieza entera? **R. 198 lempiras**
6. ¿Cuál es el número cuyos $\frac{3}{13}$ aumentados en sus $\frac{5}{26}$ y disminuidos en sus $\frac{5}{13}$, equivalen a 120? **R. 3,120**
7. La edad de Pedro es $\frac{1}{7}$ de la de Juan, y ambas edades suman 24 años. Hallar ambas edades. **R. J., 21 a.; P., 3 a**
8. María tiene $\frac{3}{8}$ de lo que tiene Juana, y si ambas suman sus fondos, el capital total sería de \$121 ¿Cuánto tiene cada una? **R. J., \$88; M., \$33**
9. Se compra un perro con su collar por 540 córdobas, y el precio del collar es $\frac{1}{26}$ del precio del perro. Hallar el precio del perro y del collar. **R. P., 520 córdobas; coll., 20 córdobas**
10. Una tijera y un sacapuntas han costado \$56. Sabiendo que el precio del sacapuntas es los $\frac{3}{5}$ del precio de la tijera, hallar el precio de la tijera y del sacapuntas. **R. T., \$35; sacap., \$21**

404

¿Cuál es el número que tiene 28 de diferencia entre sus $\frac{2}{3}$ y sus $\frac{3}{8}$?

28 será los $\frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{7}{24}$ del número; luego, $\frac{1}{24}$ del número será $28 \div 7 = 4$, y los $\frac{24}{24}$, o sea, el número buscado: $4 \times 24 = 96$ **R.**

156

Ejercicio

1. ¿Cuál es el número que tiene 22 de diferencia entre sus $\frac{5}{6}$ y sus $\frac{2}{9}$? **R. 36**
2. Los $\frac{7}{11}$ de un número exceden en 207 a los $\frac{2}{13}$. ¿Cuál es el número? **R. 429**
3. Si en lugar de recibir los $\frac{3}{8}$ de una cantidad me entregan los $\frac{2}{7}$, pierdo 50 nuevos soles. ¿Qué cantidad me deben? **R. 560 nuevos soles**
4. Si en lugar de comprar un portarretratos con los $\frac{3}{5}$ de lo que tengo invertido en otro los $\frac{2}{7}$ de mi dinero, ahorro \$33. ¿Cuánto tengo? **R. \$105**
5. Si en vez de ahorrar los $\frac{2}{7}$ de lo que me dio mi padre guardo $\frac{1}{9}$, ahorraría 55 balboas menos. ¿Cuánto me dio mi padre? **R. 315 balboas**
6. Un pedazo equivalente a los $\frac{5}{11}$ de una varilla excede en 68 centímetros a otro equivalente a $\frac{1}{9}$ de la varilla. Hallar la longitud de la varilla. **R. 198 cm**

¿De qué número es 84 dos quintos más?

405

El número desconocido lo representamos por x . Si 84 es $\frac{2}{5}$ más que dicho número, 84 será los $\frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ del número; luego, $\frac{1}{5}$ del número será $84 \div 7 = 12$, y los $\frac{5}{5}$ o sea el número buscado, será $12 \times 5 = 60$ R.

¿De qué número es 50 dos séptimos menos?

406

50 será los $\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ del número buscado; luego, $\frac{1}{7}$ del número buscado será $50 \div 5 = 10$, y los $\frac{7}{7}$, o sea el número buscado, será:

$$10 \times 7 = 70 \quad \text{R.}$$

1. ¿De qué número es 49 un sexto más? R. De 42
2. ¿De qué número es 96 un onceavo más? R. De 88
3. ¿De qué número es 98 cinco novenos más? R. De 63
4. ¿De qué número es 56 dos novenos menos? R. De 72
5. ¿De qué número es 108 un décimo menos? R. De 120
6. ¿De qué número es 1,050 siete doceavos menos? R. De 2,520
7. ¿De qué número es 30 un cuarto menos? R. De 40
8. ¿De qué número es 100 un noveno más? R. De 90
9. ¿De qué número es 93 un cuarto de un octavo menos? R. De 96
10. ¿De qué número es 49 un medio de un tercio más? R. De 42
11. Cuando vendo un lápiz por \$1.20, gano $\frac{1}{5}$ del costo. ¿Cuánto me costó? R. \$1
12. Al vender una computadora en 10,200 quetzales gano los $\frac{3}{17}$ del costo. Hallar el costo.
R. 8,670 quetzales
13. Cuando vendo un lápiz por 90 ¢, pierdo $\frac{2}{5}$ del costo. ¿Cuánto me costó el lápiz? R. \$1.5
14. Vendo un coche por 8,998 balboas, perdiendo $\frac{2}{13}$ de lo que me costó. ¿Cuánto me costó el coche? R. 10,634 balboas
15. 63 m exceden en sus $\frac{2}{7}$ a la longitud de una pieza de tela. Hallar la longitud de la pieza. R. 49 m
16. \$33 es $\frac{4}{7}$ más que el dinero de Pedro. ¿Cuánto tiene Pedro? R. \$21
17. La edad de Elsa es $\frac{7}{18}$ menos que la edad de Rosa. Si Elsa tiene 22 años, ¿qué edad tiene Rosa?
R. 36 años
18. Cuando vendo una lupa en 36 lempiras, gano $\frac{2}{9}$ del precio de venta. ¿Cuánto me había costado la lupa? R. 28 lempiras
19. Cuando vendo un reloj por 90 quetzales, pierdo $\frac{2}{9}$ del precio de venta. ¿Cuánto me había costado el reloj? R. 110 quetzales

157

Ejercicio

20. Andando los $\frac{3}{8}$ de la distancia entre dos pueblos me faltan aún 60 km para llegar a mi destino. ¿Cuál es la distancia entre los dos pueblos? **R. 96 km**

407 Después de gastar $\frac{1}{3}$ de mi dinero, me quedo con \$42. ¿Cuánto tenía?

Todo mi dinero, antes de gastar algo, lo represento por sus $\frac{3}{3}$. Si he gastado $\frac{1}{3}$, me quedan $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de mi dinero; luego, \$42 es los $\frac{2}{3}$ de mi dinero.

Por lo tanto, $\frac{1}{3}$ de mi dinero será $\$42 \div 2 = \21 , y los $\frac{3}{3}$, o sea todo el dinero: $\$21 \times 3 =$
\$63 R.

408 Después de gastar $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$ de mi dinero, me quedo con \$60. ¿Cuánto tenía y cuánto gasté?

He gastado $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{29}{35}$ de mi dinero. Todo lo que tenía, antes de gastar nada, lo represento por sus $\frac{35}{35}$; luego, me quedan $\frac{35}{35} - \frac{29}{35} = \frac{6}{35}$. Por lo tanto, \$60 es los $\frac{6}{35}$ de mi dinero.

Si \$60 es los $\frac{6}{35}$ de mi dinero, $\frac{1}{35}$ será $\$60 \div 6 = \10 y los $\frac{35}{35}$, o sea, todo mi dinero, será $\$10 \times 35 =$
\$350 R.

Gasté los $\frac{29}{35}$ de \$350. $\frac{1}{35}$ de \$350 es $\$350 \div 35 = \10 , y los $\frac{29}{35}$ serán $\$10 \times 29 =$
\$290 R.

158

Ejercicio

1. Perdí los $\frac{3}{8}$ de lo que tenía y me quedan \$40. ¿Cuánto tenía y cuánto gasté?

R. Tenía \$64; gasté \$24

2. Los $\frac{2}{9}$ de mis lápices son blancos y los 21 restantes azules. ¿Cuántos lápices tengo en total y cuántos son blancos? **R. 27; 6**

3. Los $\frac{7}{9}$ de la superficie de un terreno están fabricados y los 84 metros cuadrados restantes, constituyen un patio. ¿Cuál es la superficie del terreno? **R. 378 m²**

4. Regalo $\frac{3}{5}$ de mi dinero y me quedo con 60 nuevos soles. ¿Cuánto tenía y cuánto regalé?

R. 150; 90 nuevos soles

5. Presté $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{6}$ de mi dinero y me quedé con 100 córdobas. ¿Cuánto tenía y cuánto presté?

R. 225; 125 córdobas

6. Me quedaron 54 gallinas después de vender $\frac{2}{11}$ de las que tenía. ¿Cuántas gallinas tenía? **R. 66**

7. Si tuviera $\frac{1}{4}$ menos de la edad que tengo, tendría 21 años. ¿Qué edad tengo? **R. 28 años**
8. Vendí $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{7}$ de mi finca y me quedaron 68 hectáreas. ¿Cuál era la extensión de mi finca? **R. 70 hectáreas**
9. Habiendo salido 80 alumnos de un colegio, permanecen en el mismo los $\frac{3}{8}$ del total de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio? **R. 128**
10. Si gastara \$65 me quedaría con los $\frac{2}{15}$ de lo que tengo. ¿Cuánto tengo? **R. \$75**
11. Los $\frac{2}{5}$ de mis lápices son blancos, $\frac{1}{3}$ son azules y los 12 restantes, verdes. ¿Cuántos lápices tengo? **R. 45**
12. Los $\frac{2}{9}$ de una finca están sembrados de caña, los $\frac{5}{8}$ de café y las 22 caballerías restantes, de tabaco. ¿Cuál es la extensión de la finca? **R. $144\frac{3}{4}$ cab.**
13. Ayer perdí los $\frac{3}{7}$ de mi dinero y hoy presté $\frac{3}{8}$. Si me quedan 33 balboas, ¿cuánto tenía y cuánto perdí? **R. 168; 72 balboas**
14. $\frac{2}{5}$ de las gallinas de un campesino son blancas, $\frac{1}{3}$ son negras y las 20 restantes pintadas. ¿Cuántas gallinas tiene en total, cuántas blancas y cuántas negras? **R. 75; b., 30; n., 25**
15. Habiendo andado los $\frac{3}{8}$ y los $\frac{4}{7}$ de la distancia entre dos pueblos, me faltan 9 km para llegar a mi destino. ¿Cuál es la distancia entre los dos pueblos? **R. 168 km**
16. Un hombre al morir manda entregar los $\frac{7}{18}$ de su fortuna a su hijo mayor, los $\frac{5}{11}$ al hijo menor y los 62,000 córdobas restantes a un sobrino. ¿Cuál era su fortuna y cuánto recibió cada hijo? **R. 396,000 córdobas; may., 154,000; men., 180,000**
17. Después de gastar 80 nuevos soles me queda $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de mi dinero. ¿Cuánto tenía? **R. 480 nuevos soles**
18. Doy a Pedro $\frac{1}{5}$, a Juan $\frac{3}{11}$ y a Claudio $\frac{2}{9}$ de mis bolas y me quedan 302. ¿Cuántas bolas tenía y cuántas dí a Pedro? **R. 990; 198**
19. $\frac{1}{11}$ de las aves de una granja son gallos, $\frac{2}{13}$ son gallinas, $\frac{5}{143}$ palomas y las 206 aves restantes son patos. ¿Cuántas aves hay en la granja? **R. 286**
20. $\frac{5}{22}$ de los alumnos de un colegio están en clase; $\frac{1}{11}$ en recreo; $\frac{1}{22}$ en el baño y los 70 alumnos restantes en estudio. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio y cuántos en cada ocupación? **R. 110; en clase, 25; en recreo, 10; en el baño, 5**
21. Se ha vendido $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{7}$ de una pieza de tela de la que quedan 9 m. ¿Cuál era la longitud de la pieza? **R. 42 m**
22. Doy a Pedro $\frac{1}{4}$, a Juan $\frac{1}{8}$, a Enrique $\frac{1}{16}$ y a Ernesto $\frac{1}{32}$ de mis galletas y me quedan 51. ¿Cuántas galletas tenía y cuántas dí a cada uno? **R. 96; a P., 24; a J., 12; a Enr., 6; a Ernesto, 3**

409

$\frac{1}{5}$ de los alumnos de un colegio está en clase, $\frac{2}{9}$ de lo anterior en recreo y los 68 alumnos restantes en el comedor. Hallar el total de alumnos.

En clase hay $\frac{1}{5}$ del total.

En recreo hay $\frac{2}{9}$ de $\frac{1}{5}$ del total, o sea $\frac{2}{45}$ del total.

Ahora sumamos la parte que está en clase con la que está en recreo:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{45} = \frac{9 + 2}{45} = \frac{11}{45}$$

El número total de alumnos lo represento por sus $\frac{45}{45}$. Si los que hay en clase y en recreo son $\frac{11}{45}$ del total, quedarán:

$$\frac{45}{45} - \frac{11}{45} = \frac{34}{45}$$

Por lo tanto, los 68 alumnos restantes serán los $\frac{34}{45}$ del total; luego, $\frac{1}{45}$ del total será $68 \div 34 = 2$, y los $\frac{45}{45}$, o sea el total de alumnos, será: $2 \times 45 = 90$ alumnos **R.**

159

Ejercicio

1. Doy a Pedro $\frac{1}{6}$ de mi dinero, a Juan $\frac{2}{5}$ de lo anterior y me quedo con 4,600 colones. ¿Cuánto tenía?
R. 6,000 colones

2. Gasté los $\frac{3}{8}$ de lo que tenía e invertí una parte igual a los $\frac{2}{5}$ de lo anterior. Si tengo aún \$57, ¿cuánto tenía al principio? **R. \$120.**

3. De una pieza de tela se venden primero los $\frac{2}{9}$ y luego una parte igual a los $\frac{5}{6}$ de lo anterior. Si aún quedan 80 m, ¿cuál era la longitud de la pieza? **R. 135 m**

4. Invertí primero los $\frac{2}{7}$ de mi capital, después una parte igual a los $\frac{3}{4}$ de lo anterior y me quedaron \$854. ¿Cuánto tenía al principio? **R. \$1,708**

5. El lunes leí los $\frac{3}{11}$ de un libro, el martes una parte igual a los $\frac{3}{5}$ de lo anterior y aún me faltan por leer 93 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro y cuántas leí el lunes? **R. 165; 45**

6. Un comerciante vendió los $\frac{7}{22}$ de los sacos de frijoles que había comprado; se le picaron y tuvo que desechar una parte igual a los $\frac{11}{7}$ de lo anterior y aún le quedan 16 sacos para vender. ¿Cuántos sacos había comprado y cuántos vendió? **R. 88; 28**

7. Un hacendado vendió primero los $\frac{5}{6}$ de su finca y más tarde una parte igual a $\frac{1}{8}$ de lo anterior. Si le quedan 9 hectáreas, ¿cuál era la extensión de la finca? **R. 144 hectáreas**

8. Un padre deja a su hijo mayor $\frac{3}{11}$ de su fortuna, al segundo $\frac{3}{33}$; al tercero $\frac{1}{4}$ de lo que ha dado a los otros dos, y al cuarto los 8,400 balboas restantes. ¿A cuánto ascendía la fortuna?

R. 14,400 balboas

9. Un jugador pierde en la ruleta $\frac{1}{5}$ de su dinero; en el bingo $\frac{1}{8}$ y en apuestas una parte igual a los $\frac{2}{3}$ de lo que perdió en el bingo. Si aún le quedan \$213, ¿cuánto tenía al principio y cuánto perdió en cada ocasión?

R. \$360; rul., \$72; bingo, \$45; ap., \$30

Un padre deja a su hijo mayor $\frac{1}{3}$ de su herencia; al segundo, $\frac{2}{5}$ del resto, y al tercero, los \$200,000 restantes. ¿A cuánto ascendía la herencia?

410

El mayor recibe $\frac{1}{3}$ de la herencia.

El resto será lo que queda después de haber dado al hijo mayor $\frac{1}{3}$ de la herencia, o sea el $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de la herencia.

El segundo recibe $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3}$, o sea, $\frac{4}{15}$ de la herencia.

El primero y el segundo juntos han recibido $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$ de la herencia; luego, la parte que queda será $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ de la herencia.

Por lo tanto, los \$200,000 que recibe el tercero son los $\frac{2}{5}$ de la herencia.

Si $\frac{2}{5}$ de la herencia equivalen a \$200,000, $\frac{1}{5}$ de la herencia será $\$200,000 \div 2 = \$100,000$, y los $\frac{5}{5}$, o sea toda la herencia, será. $\$100,000 \times 5 = \$500,000$ R.

1. Ayer perdí los $\frac{3}{7}$ de mi dinero y hoy los $\frac{3}{8}$ de lo que me quedaba. Si todavía tengo \$10, ¿cuánto tenía al principio? R. \$28

2. Un cartero dejó en una oficina $\frac{1}{6}$ de las cartas que llevaba; en un banco $\frac{2}{9}$ del resto y todavía tiene 70 cartas para repartir. ¿Cuántas cartas le dieron para repartir? R. 108 cartas

3. Se venden los $\frac{2}{9}$ de una finca y se alquila $\frac{1}{3}$ del resto. Si quedan 28 hectáreas, ¿cuál era la extensión de la finca? R. 54 hectáreas

4. La semana pasada leí los $\frac{5}{7}$ de un libro y esta semana ya he leído los $\frac{2}{5}$ de lo que faltaba. Si aún me faltan por leer 60 páginas, ¿cuántas páginas tiene el libro? R. 350

5. Un auto recorre un día los $\frac{7}{10}$ de la distancia entre dos ciudades y al día siguiente los $\frac{5}{6}$ de lo que le falta para llegar a su destino. Si aún está a 22 km de él, ¿cuál es la distancia entre las dos ciudades? R. 440 km

160

Ejercicio

6. Si doy a mi hermano mayor los $\frac{5}{18}$ de lo que tengo y a mi hermano menor los $\frac{9}{13}$ de lo que me queda, me quedaría con 56 dólares. ¿Cuánto tengo? **R. 252 dólares**
7. Habiendo cortado ya los $\frac{3}{7}$ de una varilla se corta un nuevo pedazo cuya longitud es los $\frac{7}{8}$ de lo que quedaba. Si lo que queda ahora de la varilla tiene 9 cm de longitud, ¿cuál era la longitud de la varilla en un principio? **R. 126 cm**
8. Una epidemia mató los $\frac{5}{8}$ de las reses de un ganadero y después él vendió los $\frac{2}{3}$ de las que le quedaban. Si aún tiene 16 reses, ¿cuántas tenía al principio, cuántas murieron y cuántas vendió? **R. 128; murieron 80; vendió 32**
9. Gasto $\frac{1}{4}$ de mi dinero en alimentos; $\frac{1}{3}$ en transporte; $\frac{1}{6}$ en pelotas; $\frac{1}{9}$ del resto en limosnas y me quedan \$16. ¿Cuánto tenía al principio? **R. \$72**
10. Un viajero recorre $\frac{1}{4}$ de la distancia entre dos ciudades a pie; $\frac{1}{5}$ a caballo; $\frac{1}{8}$ del resto en auto y los 55 km restantes en tren. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades? **R. 120 km**

411 Un hombre deposita en un banco los $\frac{2}{3}$ de su dinero y en otro banco 500 quetzales. Si lo que ha depositado representa los $\frac{6}{7}$ de su dinero, ¿cuánto tiene?

Lo depositado ha sido $\frac{2}{3}$ del dinero + Q. 500, y esto equivale a los $\frac{6}{7}$ de su dinero; luego, Q. 500 representa la diferencia entre los $\frac{6}{7}$ y los $\frac{2}{3}$ de su dinero, o sea, $\frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{4}{21}$ de su dinero.

Si Q. 500 es los $\frac{4}{21}$ de su dinero, $\frac{1}{21}$ de su dinero será $Q. 500 \div 4 = Q. 125$, y los $\frac{21}{21}$ de su dinero, o sea todo, será: $Q. 125 \times 21 = \mathbf{Q. 2,625}$ **R.**

412 Un hombre al morir dispone lo siguiente: a su amigo Pedro le deja $\frac{1}{5}$ de su capital; a otro amigo, Juan, le deja $\frac{2}{7}$ del resto, y a un asilo le deja \$340,000. Si la cantidad repartida así es los $\frac{5}{6}$ de su capital, ¿cuál era su capital?

A Pedro le deja $\frac{1}{5}$ de su capital.

A Juan le deja $\frac{2}{7}$ del resto, o sea, $\frac{2}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{35}$ de su capital.

Por lo tanto, a Pedro y a Juan les ha dejado:

$$\frac{1}{5} + \frac{8}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \text{ de su capital.}$$

Esta cantidad más los \$340,000 que le deja al asilo son los $\frac{5}{6}$ de su capital, o sea, $\frac{3}{7}$ del capital + \$340,000 = $\frac{5}{6}$ del capital.

Por lo tanto, los \$340,000 serán la diferencia entre los $\frac{5}{6}$ y los $\frac{3}{7}$ de su capital, o sea, $\frac{5}{6} - \frac{3}{7} = \frac{17}{42}$ de su capital.

Si \$340,000 son los $\frac{17}{42}$ de su capital, $\frac{1}{42}$ de dicho capital será $\$340,000 \div 17 = \$20,000$, y los $\frac{42}{42}$, o sea todo el capital, que es lo que se busca, será:

$$\$20,000 \times 42 = \$840,000 \quad \text{R.}$$

161

Ejercicio

1. Compro un reproductor de CD con los $\frac{3}{8}$ de mi dinero y un CD de \$20. Si lo empleado ha sido los $\frac{2}{5}$ de mi dinero, ¿cuánto tenía? **R. \$800**
2. Di a mi hermano los $\frac{2}{7}$ de lo que tenía y a mi primo \$38. Si con esto he dispuesto de los $\frac{5}{8}$ de mi dinero, ¿cuánto tenía? **R. \$112**
3. Después de vender los $\frac{3}{4}$ de un rollo de alambre y 30 m más, queda $\frac{1}{6}$ del alambre que había al principio. ¿Cuál era la longitud del rollo de alambre antes de vender? **R. 360 m**
4. Después de vender los $\frac{2}{7}$ y los $\frac{3}{8}$ de mi finca y de alquilar 13 caballerías, me queda una parte igual a los $\frac{3}{28}$ del total. ¿Cuál era la extensión de la finca? **R. 56 caballerías**
5. Los libros de Pedro equivalen a los $\frac{7}{9}$ de los libros que poseo y Enrique posee 28 libros. Si los libros de Pedro junto con los de Enrique representan los $\frac{7}{8}$ de los libros que poseo, ¿cuántos libros tengo? **R. 288**
6. La edad de Julia es los $\frac{3}{7}$ de la mía y la hermana de Julia tiene 8 años. La suma de las edades de Julia y su hermana equivale a los $\frac{5}{9}$ de mi edad. ¿Cuál es mi edad y cuál la de Julia? **R. 63 a; J., 27 a**
7. Los caballos de Pedro equivalen a la mitad de los míos; los de Enrique a la tercera parte de los míos. Si a los caballos de Pedro y Enrique sumo los 50 caballos de Roberto, resultarían los $\frac{7}{8}$ de los caballos que tengo. ¿Cuántos caballos tengo y cuántos tienen Pedro y Enrique? **R. 1,200; P., 600; E., 400**
8. Doy a mi amigo Juan $\frac{2}{5}$ de mis cigarros; a Fernando la mitad de los que me quedan y a Federico 40 cigarros. Si lo que he repartido son los $\frac{5}{6}$ del total de cigarros que tenía, ¿cuántos tenía al principio. **R. 300**

9. Cuando un hombre muere deja ordenado que se entregue a su padre la quinta parte de su fortuna; a su hermano mayor los $\frac{2}{3}$ del resto y a un asilo 6,000 nuevos soles. Si lo que ha mandado entregar es los $\frac{14}{15}$ de su fortuna, ¿cuál era la fortuna? **R. 30,000 nuevos soles**
10. Un hombre al morir dispone que se entregue a su padre la quinta parte de su fortuna; a su hermano mayor $\frac{1}{3}$ resto; a su segundo hermano la mitad de lo que queda y a su tercer hermano \$6,000. Si el dinero de que ha dispuesto equivale a los $\frac{9}{10}$ de su fortuna, ¿cuál era ésta? **R. \$36,000**

413 Pedro puede hacer un trabajo en 5 días y Juan en 8 días. ¿En cuántos días podrán hacer el trabajo los dos juntos?

Pedro hace todo el trabajo en 5 días; luego, en un día hará $\frac{1}{5}$ del trabajo.

Juan hará en un día $\frac{1}{8}$ del trabajo.

Los dos juntos harán en un día $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{13}{40}$ del trabajo.

Si en un día hacen los dos $\frac{13}{40}$ del trabajo, para hacer $\frac{1}{40}$ tardarán $1 \div 13 = \frac{1}{13}$ de día y para hacer los $\frac{40}{40}$, todo el trabajo, tardarán:

$$\frac{1}{13} \times 40 = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{13} \text{ días} \quad \text{R.}$$

414 Dos llaves abiertas a la vez pueden llenar un estanque en 5 horas y una de ellas sola lo puede llenar en 8 horas. ¿En cuánto tiempo puede llenar el estanque la otra llave?

Las dos llaves llenan el estanque en 5 horas; luego, en 1 hora llenarán $\frac{1}{5}$ del estanque.

Una de ellas sola lo llena en 8 horas; luego, en una hora llena $\frac{1}{8}$ del estanque.

Por lo tanto, la otra llave en una hora llenará $\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$ del estanque.

Si en una hora, o sea 60 minutos, esta llave llena $\frac{3}{40}$ del estanque, para llenar $\frac{1}{40}$ del mismo tardará $60 \div 3 = 20$ minutos, y para llenar los $\frac{40}{40}$, o sea todo el estanque, tardará:

$$20 \times 40 = 800 \text{ minutos} = 13\frac{1}{6} \text{ horas} \quad \text{R.}$$

162

Ejercicio

1. A puede hacer una obra en 6 horas y B en 7 horas. ¿En cuánto tiempo harían la obra los dos juntos? **R. $3\frac{3}{13}$ h**
2. A puede hacer una obra en 5 días, B en 6 días y C en 7 días. ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra los tres juntos? **R. $1\frac{103}{107}$ días**

3. Un estanque se puede llenar por tres llaves. La 1ª lo puede llenar en 5 horas, la 2ª en 10 horas y la 3ª en 8 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío y cerrado el desagüe, se abren al mismo tiempo las tres llaves? **R. $2\frac{6}{17}$ h**
4. Un lavabo de mi casa tiene dos llaves de agua y una ducha. Una de las llaves puede llenar el lavabo en 25 segundos; la otra en 15 segundos y la ducha en 50 segundos, estando cerrado el desagüe. ¿En cuánto tiempo se llenará el lavabo, si estando vacío y cerrado el desagüe, abro las dos llaves y la ducha al mismo tiempo? **R. $7\frac{17}{19}$ s**
5. A puede hacer una obra en $2\frac{1}{3}$ días; B en $1\frac{5}{9}$ y C en $4\frac{1}{5}$ días. ¿En cuánto tiempo harán la obra si trabajan los tres juntos? **R. $\frac{42}{55}$ de día**
6. Si cierro el desagüe a un lavabo de mi casa y abro la llave del agua, ésta emplea 8 segundos para llenarlo, y si estando lleno, cierro la llave del agua y abro el desagüe, éste lo vacía en 15 segundos. ¿En cuánto tiempo se llenará el lavabo, si estando vacío y abierto el desagüe, abro la llave? **R. $17\frac{1}{7}$ s**
7. Un estanque tiene dos llaves y un desagüe. La primera llave lo puede llenar en 8 horas y la segunda en 5 horas, estando el estanque vacío y cerrado el desagüe. El desagüe puede vaciarlo, estando lleno y cerradas las llaves, en 20 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque si estando vacío se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe? **R. $3\frac{7}{11}$ h**
8. Estando vacío un lavabo y cerrado el desagüe abro las dos llaves del agua y el lavabo se llena en 15 segundos. Si no hubiera abierto más que una llave hubiera tardado 25 segundos en llenarse. En cuánto tiempo puede llenar la otra llave el lavabo? **R. $37\frac{1}{2}$ s**
9. Estando vacío un estanque y cerrado el desagüe, abro las tres llaves de agua y el estanque se llena en 2 horas. Si hubiera abierto solamente dos de las llaves hubiera tardado 3 horas para llenarse. ¿En cuánto tiempo puede llenar el estanque la tercera llave? **R. 6 h**
10. A, B y C trabajando juntos pueden hacer una obra en tres días. A, trabajando solo, puede hacerla en 18 días y B, trabajando solo, la hubiera hecho en 14 días. ¿En cuántos días puede hacer C la obra? **R. $4\frac{11}{13}$ de día**
11. Un estanque tiene dos llaves de agua. Si estando vacío el estanque y cerrado el desagüe abro solamente la de la derecha, tarda 5 horas en llenarse y si hubiera abierto solamente la llave de la izquierda, hubiera tardado 6 horas en llenarse. Si el desagüe está cerrado y el estanque lleno hasta los $\frac{3}{7}$ de su capacidad, ¿en cuánto tiempo acabará de llenarse abriendo las dos llaves al mismo tiempo? **R. $1\frac{43}{77}$ h**

415 ¿Cuál es el número que aumentado en sus $\frac{2}{5}$ y disminuido en sus $\frac{3}{7}$ equivale a 102?

El número que buscamos lo representamos por sus $\frac{5}{5}$. Luego $\frac{5}{5}$ del número $+\frac{2}{5}$ del número $-\frac{3}{7}$ del número $=\frac{5}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{7}=\frac{34}{35}$ del número $=102$.

Por lo tanto, $\frac{1}{35}$ del número será $102 \div 34 = 3$ y los $\frac{35}{35}$, o sea el número buscado: $3 \times 35 = 105$ **R.**

416 Al preguntársele a Juan por su edad, responde: mi edad, aumentada en sus $\frac{5}{6}$ y en 10 años, equivale a 43 años. ¿Cuál es la edad de Juan?

La edad de Juan la representamos por sus $\frac{6}{6}$. Luego, $\frac{6}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$ de la edad de Juan, más 10 años, equivalen a 43 años.

Si los $\frac{11}{6}$ de la edad de Juan, más 10 años, equivalen a 43 años, es evidente que los $\frac{11}{6}$ solos serán 33 años, es decir: $\frac{11}{6}$ de la edad $=33$ años.

Por lo tanto, $\frac{1}{6}$ de la edad de Juan será $33 \div 11 = 3$ años y los $\frac{6}{6}$, o sea toda la edad, será $3 \times 6 = 18$ años **R.**

163

Ejercicio

1. ¿Cuál es el número que aumentado en sus $\frac{3}{5}$ y disminuido en sus $\frac{5}{7}$ equivale a 93? **R. 105**
2. Si me pagaran una cantidad igual a los $\frac{3}{7}$ de lo que tengo, podría gastar una cantidad igual a los $\frac{8}{9}$ de lo que tengo y me sobrarían 68 dólares. ¿Cuánto tengo? **R. 126 dólares**
3. Si comprara un CD con los $\frac{3}{8}$ del dinero que tengo y me pagaran una cantidad que me deben que equivale a los $\frac{2}{3}$ de lo que tengo, tendría \$93. ¿Cuánto tengo? **R. \$72**
4. Si se aumentara en su sexta parte el dinero que tengo y recibiera después 20 nuevos soles, tendría 69. ¿Cuánto tengo? **R. 42 nuevos soles**
5. Si ganara 20 balboas después de perder la sexta parte de lo que tengo me quedaría con 60. ¿Cuánto tengo? **R. 48 balboas**
6. Si me pagaran una cantidad que me deben que equivale a los $\frac{2}{7}$ de lo que tengo, podría gastar \$30 y me quedarían \$150. ¿Cuánto tengo? **R. \$140**
7. Preguntado un hacendado por el número de hectáreas de sus fincas, responde: el número de ellas, aumentado en sus $\frac{3}{7}$ y en 14 hectáreas equivale a 154 hectáreas. ¿Cuántas hectáreas tienen todas sus tierras? **R. 98 hectáreas**

8. El número de alumnos de una clase es tal que aumentado en sus $\frac{2}{5}$, disminuido en sus $\frac{2}{3}$ y añadiéndole 20 da por resultado 152. Hallar el número de alumnos. **R. 180**
9. He recibido \$50 después de haber gastado los $\frac{2}{3}$ de lo que tenía al principio y ahora tengo \$60. ¿Cuánto tenía al principio? **R. \$30**

Los $\frac{3}{4}$ más los $\frac{2}{5}$ de un número exceden en 36 al número. Hallar el número.

417

$$\frac{3}{4} \text{ del número} + \frac{2}{5} \text{ del número} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20} \text{ del número.}$$

El número que buscamos lo representaremos por sus $\frac{20}{20}$. Por lo tanto, la suma de los $\frac{3}{4}$ y los $\frac{2}{5}$ del número excede al número en $\frac{23}{20} - \frac{20}{20} = \frac{3}{20}$ del número. Luego, $\frac{3}{20}$ del número equivalen a 36, que es el exceso de dicha suma sobre el número que se busca.

Si $\frac{3}{20}$ del número equivalen a 36, $\frac{1}{20}$ del número será $36 \div 3 = 12$ y los $\frac{20}{20}$, o sea el número buscado será: $12 \times 20 = 240$ **R.**

- Los $\frac{2}{3}$ más los $\frac{5}{6}$ de un número exceden en 9 al número. Hallar el número. **R. 18**
- La suma de los $\frac{3}{4}$ de un número con sus $\frac{3}{8}$ excede en 40 al número. Hallar el número. **R. 320**
- Si adquiero un reloj cuyo costo es los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo y una pulsera cuyo costo es los $\frac{5}{6}$ de los que tengo, quedaría debiendo 2,800 colones. ¿Cuánto tengo? **R. 12,000 colones**
- Vendo los $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela y luego me hacen un pedido equivalente a los $\frac{7}{9}$ de la longitud que tenía la pieza antes de vender lo que ya vendí. Si para servir este pedido necesitaría que la pieza hubiera tenido 8 metros más de longitud, ¿cuál es la longitud de la pieza? **R. 18 m**
- Los $\frac{15}{8}$ de un número menos su cuarta parte exceden en 30 unidades al número. ¿Cuál es el número? **R. 48**
- Las reses de Hernández son los $\frac{9}{7}$ de las reses que tiene García. Hernández puede vender una parte de sus reses igual a $\frac{1}{8}$ de las que tiene García y entonces tendrá 36 reses más que éste. ¿Cuántas reses tiene cada uno? **R. H., 288; G., 224**
- Los $\frac{5}{6}$ más los $\frac{2}{5}$ más la tercera parte de un número suman 34 unidades más que el número. Hallar el número. **R. 60**

164

Ejercicio

8. Le preguntan a un pastor por el número de sus ovejas y responde: la mitad, más los tres cuartos, más la quinta parte de mis ovejas equivale al número de ellas más 36. ¿Cuántas ovejas tiene el pastor? **R. 80**

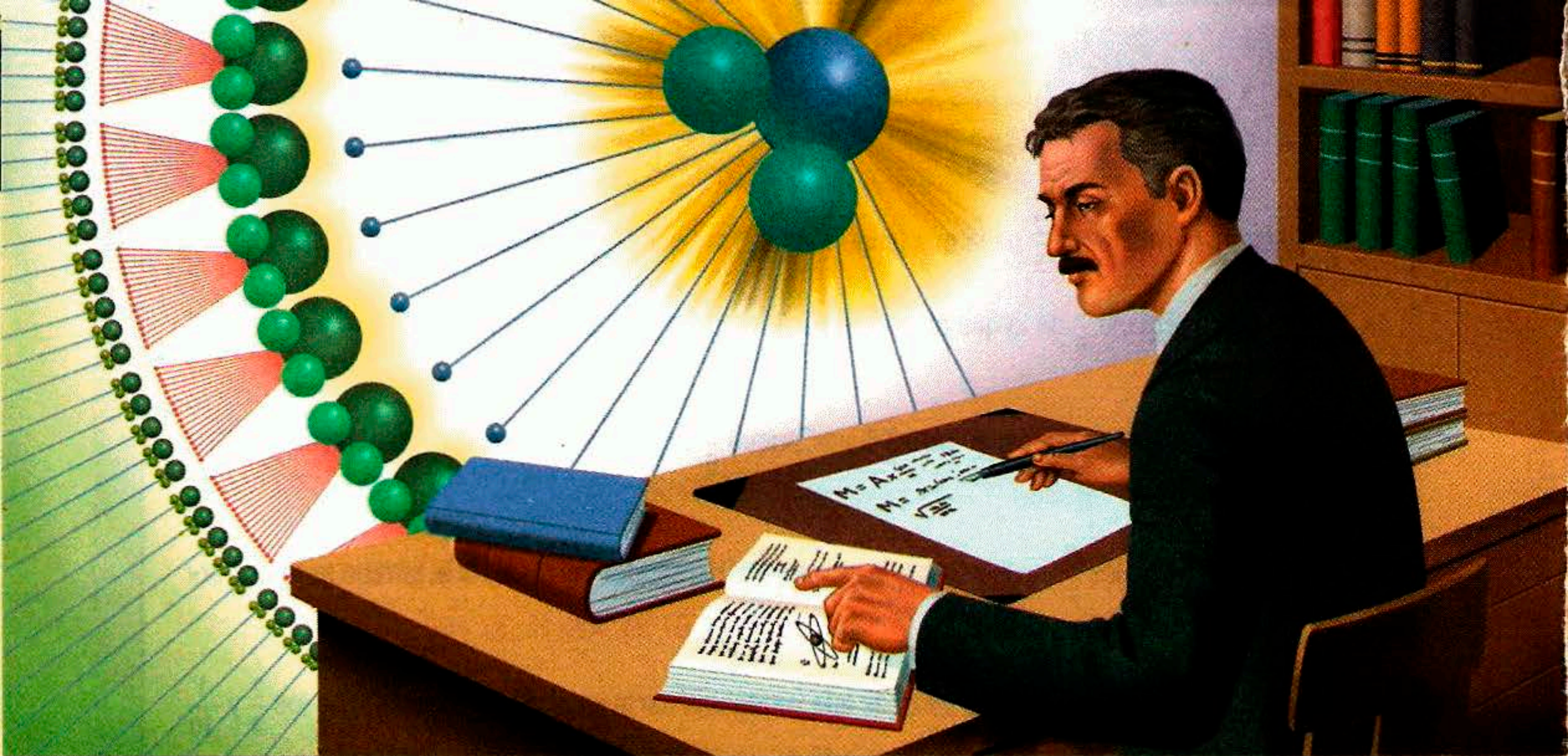
165

MISCELÁNEA

Ejercicio

1. Una tubería vierte en un estanque 200 litros de agua en $\frac{3}{4}$ de hora y otra 300 litros en el mismo tiempo. ¿Cuánto vierten las dos juntas en 2 horas? **R. $1,333\frac{1}{3} \ell$**
2. Compro por 22 quetzales cierta cantidad de vino que envaso en 50 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro y lo vendo a razón de Q. $\frac{16}{25}$ el litro? ¿Cuánto gano en la venta? **R. Q. 2**
3. Con 60 balboas puedo comprar 15 litros de vino. ¿Qué parte de un litro puedo comprar con un balboa? **R. $\frac{1}{4}$ de ℓ**
4. Para vaciar un depósito que contiene 500 litros de agua se abren tres desagües. Uno vierte $18\frac{2}{3}$ litros por minuto, otro $14\frac{2}{5}$ litros por minuto y el tercero $14\frac{3}{10}$ litros por minuto. ¿En cuánto tiempo se vaciará el estanque? **R. $10\frac{790}{1,421}$ min**
5. He recibido \$50 después de haber gastado $\frac{2}{3}$ de lo que tenía al principio y tengo ahora \$4 más que al principio. ¿Cuánto tenía? **R. \$69**
6. Si gastara los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo y diera una limosna de \$22 me quedaría con los $\frac{2}{7}$ de lo que tengo. ¿Cuánto tengo ahora? **R. \$70**
7. Si gastara $\frac{2}{7}$ de lo que tengo y 8 dólares más, lo que tengo se disminuiría en sus $\frac{2}{5}$. ¿Cuánto tengo? **R. 70 dólares**
8. Un ladrillo pesa 10 libras más medio ladrillo. ¿Cuánto pesa ladrillo y medio? **R. 30 lb**
9. Los $\frac{4}{6}$ de un número equivalen a los $\frac{2}{5}$ de 150. ¿Cuál es el número? **R. 90**
10. Una hacienda pertenece a tres propietarios. Al primero corresponden $\frac{5}{12}$; al segundo $\frac{1}{3}$, y al tercero $\frac{1}{4}$. Si se vende en 75,000 balboas, ¿cuánto corresponde a cada uno? **R. 1º 31,250; 2º 25,000 y 3º 18,750 balboas**
11. Si se mueren $\frac{2}{7}$ de mis ovejas y compro 37 ovejas más, el número de las que tenía al principio queda aumentado en sus $\frac{3}{8}$. ¿Cuántas ovejas tenía al principio? **R. 56**
12. Si se mueren $\frac{3}{5}$ de las palomas de un corral y se compran 2,674 palomas, el número de las que había al principio queda aumentado en $\frac{1}{3}$ de las que había al principio. ¿Cuántas palomas había al principio? **R. 2,865**

13. Si doy a mi hermano los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo más \$2, me quedan \$4. ¿Cuánto tengo? **R. \$10**
14. Si doy a mi hermano $\frac{2}{5}$ de lo que tengo menos 2 lempiras, me quedarían 11. ¿Cuánto tengo?
R. 15 lempiras
15. Si doy a Pedro $\frac{2}{7}$ de lo que tengo más \$4 y a Enrique $\frac{2}{9}$ de lo que tengo más \$6, me quedarían \$21. ¿Cuánto tengo? **R. \$63**
16. Pérez es dueño de los $\frac{2}{7}$ de un terreno, García de $\frac{1}{9}$ y Hernández del resto. Si el terreno se vende por \$12,600, ¿cuánto recibe cada uno? **R. P., \$3,600; G., \$1,400; H., \$7,600**
17. Después de vender los $\frac{2}{5}$ de una pieza de tela vendo una parte igual a la diferencia entre los $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{10}$ de la longitud inicial de la pieza. Si quedan 43 m, ¿cuál era la longitud de la pieza?
R. 90 m
18. Un padre reparte 48 nuevos soles entre sus dos hijos. Los $\frac{3}{7}$ de la parte que dio al mayor equivalen a los $\frac{3}{5}$ de la parte que dio al menor. ¿Cuántos dio a cada uno? **R. May., 28; men., 20 nuevos soles**
19. Dos hermanos pagan una deuda que asciende a los $\frac{2}{5}$ de \$55,000. La parte que pagó el menor equivale a los $\frac{2}{9}$ de la parte que pagó el mayor. ¿Cuánto pagó cada uno? **R. May., \$18,000; men., \$4,000**
20. Reparto cierta cantidad entre mis tres hermanos. Al mayor doy $\frac{1}{7}$; al mediano $\frac{1}{8}$ y al menor el resto. Si al menor le he dado \$34 más que al mediano, ¿cuál fue la cantidad repartida y cuánto recibió cada uno? **R. \$56; may., \$8; med., \$7; menor, \$41**
21. Cuando vendo un auto en 18,000 dólares gano los $\frac{2}{7}$ del costo. ¿En cuánto tendría que venderlo para ganar los $\frac{3}{5}$ del costo? **R. 22,400 dólares**
22. He gastado los $\frac{5}{6}$ de mi dinero. Si en lugar de gastar los $\frac{5}{6}$ hubiera gastado los $\frac{3}{4}$ de mi dinero, tendría ahora \$18 más de lo que tengo. ¿Cuánto gasté? **R. \$180**



Los pitagóricos aproximaban las raíces cuadradas inexactas (números irracionales) por medio de fracciones continuas. En 1613, **Cataldi** las estudió. En 1572, **Bombelli** aproximó las raíces cuadradas por medio de fracciones continuas y, en

1658, **Brouncker** desarrolló 4π en fracción infinita. El primer estudio sistemático sobre las mismas se debe al famoso matemático **Euler**, que lo realizó en 1837.

Capítulo **XXVII**

FRACCIONES CONTINUAS

418 **FRACCIÓN CONTINUA** es una fracción de la forma siguiente:

$$0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

$$2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{8 + \frac{1}{4}}}}$$

419 **FRACCIÓN INTEGRANTE**

Se llama fracción integrante a cada fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador un entero.

Así, en los ejemplos anteriores, las fracciones integrantes son:

Las del primer ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ y las del segundo $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

420 **COCIENTE INCOMPLETO**

Se llama así a la parte entera de una fracción continua y a los denominadores de las fracciones integrantes.

Así, en la fracción

$$4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}$$

los cocientes incompletos son 4, 3, 5 y 6.

REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN ORDINARIA O DECIMAL A CONTINUA

421

1) Reducción de una fracción ordinaria propia a continua.

REGLA

Se halla el m. c. d., por divisiones sucesivas, del numerador y denominador de la fracción. La parte entera de la fracción continua será cero y los denominadores de las fracciones integrantes serán los cocientes de las divisiones.

Reducir a fracción continua $\frac{35}{157}$.

Hallemos el m. c. d. de 35 y 157:

		17	2	4
1	17	35	157	
	0	1	17	

Tendremos:

$$\frac{35}{157} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{17}}} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

2) Reducción de una fracción ordinaria impropia a continua.

REGLA

Se procede como en el caso anterior, pero la parte entera de la fracción continua será el primer cociente.

Reducir a fracción continua $\frac{237}{101}$.

Hallemos el m. c. d. de 237 y 101:

		3	1	7	1	2	2
1	3	4	31	35	101	237	
	0	1	3	4	31	35	

La parte entera de la fracción continua que vamos a formar será 2, porque 2 es el primer cociente de las divisiones. Por lo tanto, tendremos:

$$\frac{237}{101} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

3) Reducción de una fracción decimal a fracción continua.

REGLA

Se reduce la fracción decimal a quebrado por el procedimiento que veremos más tarde, y a este quebrado se aplican las reglas anteriores.

166

Ejercicio

Reducir a fracción continua:

1. $\frac{8}{17}$

R. $\frac{1}{2 + \frac{1}{8}}$

2. $\frac{7}{19}$

R. $\frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$

3. $\frac{67}{78}$

R. $\frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{11}}}$

4. $\frac{19}{1,050}$

R. $\frac{1}{55 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$

5. $\frac{131}{2,800}$

R. $\frac{1}{21 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{16}}}}}$

6. $\frac{23}{79}$

R. $\frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}}$

7. $\frac{31}{2,040}$

R. $\frac{1}{65 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}}}}$

8. $\frac{15}{131}$

R. $\frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}$

9. $\frac{79}{1,410}$

R. $\frac{1}{17 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}}}$

10. $\frac{196}{27}$

R. $7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}$

11. $\frac{85}{37}$

R. $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$

12. $\frac{285}{126}$

R. $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$

13. $\frac{547}{232}$

R. $2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}}}}}$

14. $\frac{3,217}{1,900}$

R. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}}}}}}$

15. $\frac{2,308}{1,421}$

R. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{19 + \frac{1}{9}}}}}}$

REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN CONTINUA A FRACCIÓN ORDINARIA

422

REDUCIDA

La fracción ordinaria equivalente a una parte de la fracción continua, comprendida entre el primer cociente incompleto y cada uno de los demás cocientes incompletos, se llama **fracción reducida** o **convergente**.

LEY DE FORMACIÓN DE LAS REDUCIDAS

423

La primera y segunda reducidas de una fracción continua pueden ser halladas muy fácilmente por simple inspección. A partir de la tercera, las reducidas se forman de acuerdo con la siguiente ley:

Se multiplica el último cociente incompleto de la parte de fracción continua que consideramos, por los dos términos de la reducida anterior; al numerador de este quebrado se suma el numerador de la reducida anteprecedente y al denominador se suma el denominador de la reducida anteprecedente.

Formar todas las reducidas de $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}}$

La *primera reducida* es la parte entera $2 = \frac{2}{1}$.

La *segunda reducida* o fracción ordinaria equivalente a $2 + \frac{1}{3}$ es $\frac{7}{3}$.

La *tercera reducida* o fracción ordinaria equivalente a $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}$ se forma multiplicando el último cociente incompleto 4 por los dos términos de la reducida anterior $\frac{7}{3}$ y tendremos $\frac{4 \times 7}{4 \times 3}$; al numerador de este quebrado se suma el numerador 2 de la *primera* reducida y al denominador se suma el denominador 1 de la *primera* reducida y tendremos:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = \frac{4 \times 7 + 2}{4 \times 3 + 1} = \frac{30}{13}$$

La *cuarta reducida* o fracción ordinaria equivalente a $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}$ se forma multiplicando

el último cociente incompleto 5 por los dos términos de la *tercera* reducida $\frac{30}{13}$ y tendremos $\frac{5 \times 30}{5 \times 13}$; al numerador de este quebrado se suma el numerador 7 de la *segunda* reducida y al denominador se suma el denominador 3 de la *segunda* reducida y tendremos:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}} = \frac{5 \times 30 + 7}{5 \times 13 + 3} = \frac{157}{68}$$

Ejemplo

La *quinta reducida* o fracción ordinaria equivalente a la fracción continua dada

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}}$$

se forma multiplicando el último cociente incompleto 6 por los dos términos de la *cuarta reducida* $\frac{157}{68}$ y tendremos $\frac{6 \times 157}{6 \times 68}$; al numerador de este quebrado se suma el numerador 30 de la *tercera reducida* y al denominador se suma el denominador 13 de la tercera reducida y tendremos:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}} = \frac{6 \times 157 + 30}{6 \times 68 + 13} = \frac{972}{421} \quad \text{R.}$$

167

Ejercicio

Reducir a fracción ordinaria las fracciones continuas siguientes, hallando todas las reducidas:

1. $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$

R. $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}$

5. $0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$

R. $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{30}, \frac{29}{67}$

2. $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

R. $\frac{3}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{5}$

6. $1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$

R. $\frac{1}{1}, \frac{6}{5}, \frac{25}{21}, \frac{31}{26}, \frac{118}{99}$

3. $0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$

R. $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}$

7. $1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}}}$

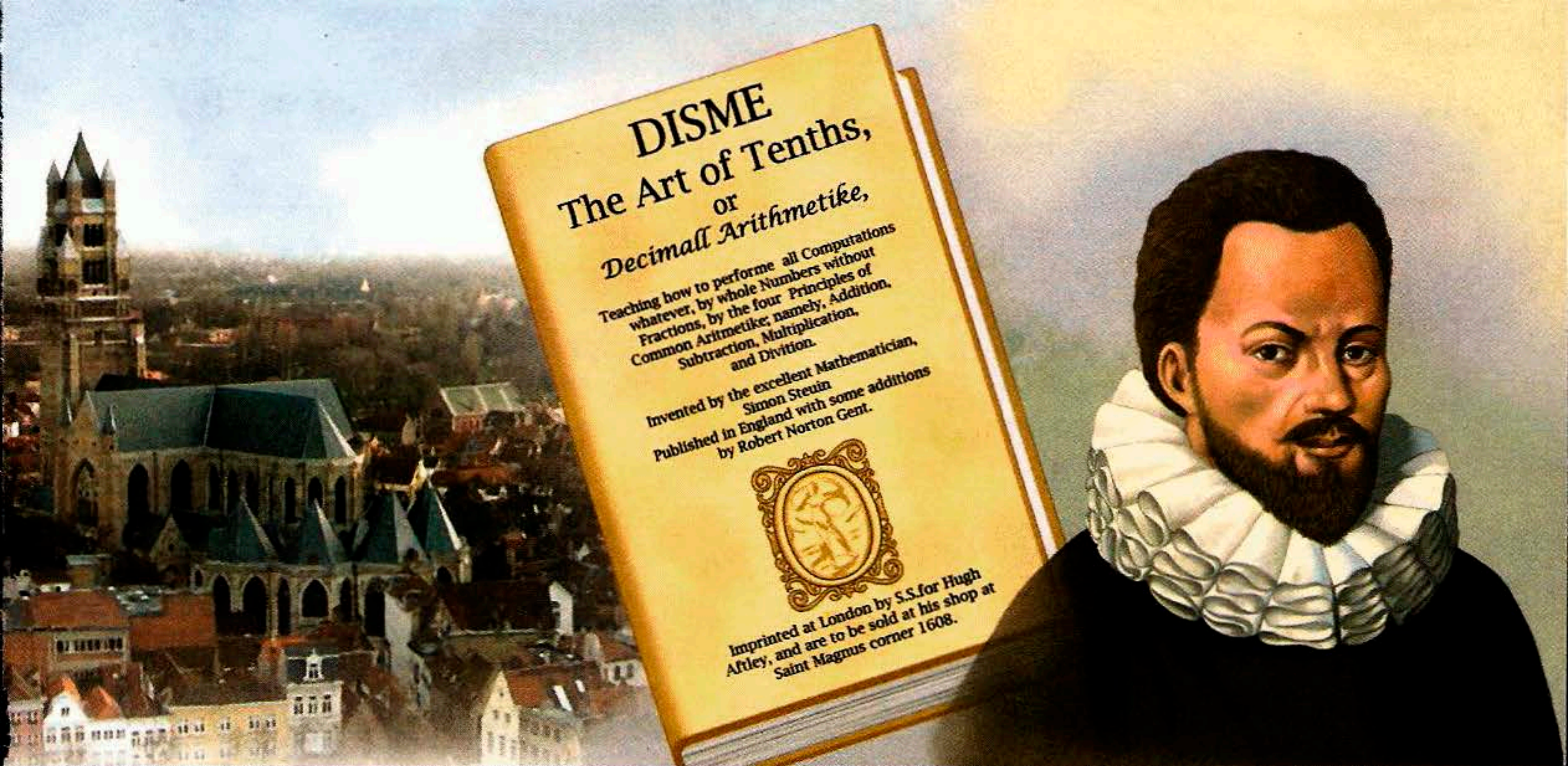
R. $\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{11}{9}, \frac{28}{23}, \frac{151}{124}$

4. $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$

R. $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{7}, \frac{41}{18}$

8. $3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}$

R. $\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{24}{7}, \frac{103}{30}, \frac{127}{37}, \frac{738}{215}$



La primera discusión sistemática sobre las fracciones decimales, se debe a **Simón Stevin (1548-1620)**, de Brujas. En 1585 apareció publicada en Leyden su famosa obra *La Thiende*. Esta obra fue dada a conocer por Robert Norton, en

una traducción inglesa editada en Londres en 1608, bajo el título de *La Disme o The Art of Tenths or Decimall Arithmetike*. Pronto fueron adoptados los decimales.

Capítulo **XXVIII**

FRACCIONES DECIMALES

QUEBRADO O FRACCIÓN DECIMAL es todo quebrado cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.

424

$$\frac{3}{10}, \frac{17}{100}, \frac{31}{1,000}$$

Ejemplos

NOTACIÓN DECIMAL

425

Para escribir un quebrado decimal en notación decimal se sigue el principio fundamental de la numeración decimal escrita (59), según el cual **toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades diez veces menores que las que representa la anterior.**

Así, $\frac{3}{10}$ se escribirá 0.3; $\frac{17}{100}$ se escribirá 0.17; $\frac{31}{1,000}$ se escribirá 0.031.

Por lo tanto, podemos enunciar la siguiente:

REGLA PARA ESCRIBIR UN DECIMAL

426

Se escribe la parte entera si la hay, y si no la hay, un cero y enseguida el punto decimal. Después se escriben las cifras decimales teniendo cuidado de que cada una ocupe el lugar que le corresponde.

Ejemplos

- 1) Escribir setenta y cinco milésimas: $\frac{75}{1,000}$

Escribimos la parte entera cero y enseguida el punto decimal. Hecho esto, ponemos un cero en el lugar de las décimas, porque no hay décimas en el número dado, a continuación las centésimas que hay en 75 milésimas que son 7, y después, las cinco milésimas y quedará: **0.075**. R.

- 2) Escribir 6 unidades 817 diezmilésimas: $6\frac{817}{10,000}$

Escribimos la parte entera 6 y enseguida el punto decimal. Ponemos cero en el lugar de las décimas; 8 en el lugar de las centésimas, 1 en el lugar de las milésimas y 7 en el lugar de las diezmilésimas y tendremos: **6.0817** R.

168

Escribir en notación decimal:

Ejercicio

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1. 8 centésimas | 17. 7,546 centésimas |
| 2. 19 milésimas | 18. 203,456 centésimas |
| 3. 115 diezmilésimas | 19. 657,892 diezmilésimas |
| 4. 1315 diezmilésimas | 20. 12,345,678 millonésimas |
| 5. 9 cienmilésimas | 21. 978 décimas |
| 6. 318 cienmilésimas | 22. 4,321 centésimas |
| 7. 1,215 millonésimas | 23. 234,567 milésimas |
| 8. 9 millonésimas | 24. 6 unid. 8 centésimas |
| 9. 899 diezmillonésimas | 25. 7 unid. 19 milésimas |
| 10. 23456 cienmillonésimas | 26. 9 unid. 9 milésimas |
| 11. 11 décimas | 27. 8 unid. 8 diezmilésimas |
| 12. 115 centésimas | 28. 6 unid. 215 diezmilésimas |
| 13. 1,215 milésimas | 29. 34 unid. 16 cienmilésimas |
| 14. 32,456 diezmilésimas | 30. 315 unid. 315 millonésimas |
| 15. 133,346 cienmilésimas | 31. 42 unid. 42 diezmillonésimas |
| 16. 218 décimas | 32. 167 unid. 167 cienmillonésimas |

169

Escribir en nota decimal:

Ejercicio

- | | | | |
|----------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| 1. $\frac{7}{10}$ | 4. $\frac{17}{10,000}$ | 7. $6\frac{3}{10}$ | 10. $6\frac{19}{1,000}$ |
| 2. $\frac{35}{100}$ | 5. $\frac{315}{100,000}$ | 8. $9\frac{18}{100}$ | 11. $19\frac{18}{1,000}$ |
| 3. $\frac{8}{1,000}$ | 6. $\frac{623}{1,000,000}$ | 9. $4\frac{3}{1,000}$ | 12. $123\frac{123}{10,000}$ |

13. $315\frac{8}{100,000}$

14. $219\frac{7}{1,000,000}$

15. $1,215\frac{319}{10,000,000}$

16. $823\frac{1}{100,000,000}$

NOMENCLATURA

427

Para leer un decimal se enuncia primero la parte entera si la hay y a continuación la parte decimal, dándole el nombre de las unidades inferiores.

- 1) 3.18 se lee: tres unidades, dieciocho centésimas.
- 2) 4.0019 se lee: cuatro unidades, diecinueve diezmilésimas.
- 3) 0.08769 se lee: ocho mil setecientas sesenta y nueve cienmilésimas.

Ejemplos

Leer:

- | | | | |
|----------|--------------|-------------|------------------|
| 1. 0.8 | 5. 0.0015 | 9. 1.015 | 13. 2.000016 |
| 2. 0.15 | 6. 0.00015 | 10. 7.0123 | 14. 4.0098765 |
| 3. 0.09 | 7. 0.000003 | 11. 8.00723 | 15. 15.000186 |
| 4. 0.003 | 8. 0.0000135 | 12. 1.15678 | 16. 19.000000018 |

170

Ejercicio

PROPIEDADES GENERALES DE LAS FRACCIONES DECIMALES

428

- 1) Un decimal no se altera porque se añadan o supriman ceros a su derecha, porque con ello el valor relativo de las cifras no varía.
Así, lo mismo será 0.34 que 0.340 o 0.3400.
- 2) Si en un número decimal se corre el punto decimal a la derecha uno o más lugares, el decimal queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya corrido el punto a la derecha, porque al correr el punto decimal a la derecha un lugar, el valor relativo de cada cifra se hace diez veces mayor; luego, el número queda multiplicado por 10; al correrlo dos lugares a la derecha, el valor relativo de cada cifra se hace cien veces mayor; luego, el número queda multiplicado por 100; etcétera.
Así, para multiplicar 0.876 por 10, corremos el punto decimal a la derecha un lugar y nos queda 8.76; para multiplicar 0.93245 por 100, corremos el punto decimal a la derecha dos lugares y nos queda 93.245; para multiplicar 7.54 por 1,000, corremos el punto decimal a la derecha tres lugares, pero como no hay más que dos cifras decimales, quitaremos el punto decimal y añadiremos un cero a la derecha y nos quedará 7,540; para multiplicar 0.789 por 100,000, tendríamos 78,900.
- 3) Si en un número decimal se corre el punto decimal a la izquierda uno o más lugares, el decimal queda dividido entre la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya recorrido el punto a la izquierda, porque al correr el punto decimal a la izquierda uno, dos, tres, etc., lugares, el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil, etc., veces menor; luego, el número quedará dividido entre 10, 100, 1,000, etcétera.

Así, para dividir 4.5 entre 10 corremos el punto decimal a la izquierda un lugar y nos queda 0.45; para dividir 0.567 entre 100 corremos el punto decimal a la izquierda dos lugares y nos queda 0.00567; para dividir 15.43 entre 1,000 corremos el punto decimal a la izquierda tres lugares y nos queda 0.01543.

171

Efectuar:

Ejercicio

- | | | |
|------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| 1. 0.4×10 | 8. 17.567×100 | 15. $8.114 \times 10,000$ |
| 2. 7.8×10 | 9. $3.4 \times 1,000$ | 16. $14.0176 \times 10,000$ |
| 3. 0.324×10 | 10. $0.188 \times 1,000$ | 17. $0.4 \times 100,000$ |
| 4. 0.7654×10 | 11. $0.455 \times 1,000$ | 18. $7.89 \times 1,000,000$ |
| 5. 7.5×100 | 12. $0.188 \times 1,000$ | 19. $0.724 \times 1,000,000$ |
| 6. 0.103×100 | 13. $0.1 \times 10,000$ | 20. $8.1234 \times 10,000,000$ |
| 7. 0.1234×100 | 14. $45.78 \times 10,000$ | |

172

Efectuar:

Ejercicio

- | | | |
|----------------------|-------------------------|------------------------------|
| 1. $0.5 \div 10$ | 8. $0.7256 \div 100$ | 15. $3.125 \div 10,000$ |
| 2. $0.86 \div 10$ | 9. $2.5 \div 1,000$ | 16. $0.7246 \div 10,000$ |
| 3. $0.125 \div 10$ | 10. $0.18 \div 1,000$ | 17. $0.7 \div 100,000$ |
| 4. $3.43 \div 10$ | 11. $7.123 \div 1,000$ | 18. $0.865 \div 100,000$ |
| 5. $0.4 \div 100$ | 12. $14.136 \div 1,000$ | 19. $723.05 \div 1,000,000$ |
| 6. $3.18 \div 100$ | 13. $3.6 \div 10,000$ | 20. $815.23 \div 10,000,000$ |
| 7. $16.134 \div 100$ | 14. $0.19 \div 10,000$ | |

OPERACIONES CON FRACCIONES DECIMALES

I. SUMA

429

REGLA

Se colocan los sumandos unos debajo de los otros de modo que los puntos decimales queden en columna. Se suman como números enteros, poniendo en el resultado el punto de modo que quede en columna con los de los sumandos.

Ejemplo

Sumar 0.03, 14.005, 0.56432 y 8.0345.

$$\begin{array}{r}
 0.03 \\
 14.005 \\
 + 0.56432 \\
 8.0345 \\
 \hline
 \end{array}$$

suma . . . **22.63382** R.

173

Ejercicio

Efectuar:

1. $0.3 + 0.8 + 3.15$
2. $0.19 + 3.81 + 0.723 + 0.1314$
3. $0.005 + 0.1326 + 8.5432 + 14.00001$
4. $0.99 + 95.999 + 18.9999 + 0.999999$
5. $16.05 + 0.005 + 81.005 + 0.00005 + 0.000005$
6. $5 + 0.3$
7. $8 + 0.14$
8. $15 + 0.54$
9. $16 + 0.1936$
10. $75 + 0.07$
11. $81 + 0.003$
12. $115 + 0.0056$
13. $800 + 0.00318$
14. $19 + 0.84 + 7$
15. $93 + 15.132 + 31$
16. $108 + 1345.007 + 235$
17. $350 + 9.36 + 0.00015 + 32$
18. $19.75 + 301 + 831 + 831.019 + 13,836$
19. $1360 + 0.87645 + 14 + 93.72 + 81 + 0.0000007$
20. $857 + 0.00000001 + 0.00000000891$

II. RESTA

REGLA

430

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que los puntos decimales queden en columna, añadiendo ceros, si fuere necesario, para que el minuendo y el sustraendo tengan igual número de cifras decimales.

Hecho esto, se restan como números enteros, colocando en la resta el punto decimal en columna con los puntos decimales del minuendo y sustraendo.

Restar 14.069 de 234.5

$$\begin{array}{r}
 234.500 \\
 - 14.069 \\
 \hline
 \text{Resta} \dots 220.431
 \end{array}$$

R.

Ejemplo

174

Ejercicio

Efectuar:

- | | | |
|---------------------|------------------------|--------------------------------------|
| 1. $0.8 - 0.17$ | 5. $19 - 0.114$ | 9. $837 - 14.136 - 8.132 - 0.756432$ |
| 2. $0.39 - 0.184$ | 6. $315 - 0.786$ | 10. $539.72 - 11.184 - 119.327$ |
| 3. $0.735 - 0.5999$ | 7. $814 - 0.00325$ | |
| 4. $8 - 0.3$ | 8. $15 - 0.764 - 4.16$ | |

175

Efectuar:

Ejercicio

- | | |
|---|-------------------|
| 1. $0.3 + 0.5 - 0.17$ | R. 0.63 |
| 2. $0.184 + 0.9345 - 0.54436$ | R. 0.57414 |
| 3. $3.18 + 14 - 15.723$ | R. 1.457 |
| 4. $9.374 + 380 - 193.50783$ | R. 195.86617 |
| 5. $0.76 + 31.893 - 14$ | R. 18.653 |
| 6. $15.876 + 32 - 14$ | R. 33.876 |
| 7. $5.13 + 8.932 + 31.786 + 40.1567 - 63$ | R. 23.0047 |
| 8. $31 + 14.76 + 17 - 8.35 - 0.003$ | R. 54.407 |
| 9. $8 - 0.3 + 5 - 0.16 - 3 + 14.324$ | R. 23.864 |
| 10. $15 + 18.36 - 71 + 80.1987 - 0.000132$ | R. 42.558568 |
| 11. $14.782 - 13 + 325.73006 - 81.574325 + 53$ | R. 298.937735 |
| 12. $800 - 31.6 - 82.004 + 19 - 0.762356 - 0.00000001$ | R. 704.63364399 |
| 13. $56.32 - 51 - 0.00325 - 0.764328 + 32.976$ | R. 37.528422 |
| 14. $5,000 - 315.896 - 31.7845 - 32.976356 + 50.00000008$ | R. 4,669.34314408 |
| 15. $(8 + 5.19) + (15 - 0.03) + (80 - 14.784)$ | R. 93.376 |
| 16. $50 - (6.31 + 14)$ | R. 29.69 |
| 17. $1,351 - (8.79 + 5.728)$ | R. 1,336.482 |
| 18. $(75 - 0.003) - (19.351 - 14) + 0.00005$ | R. 69.64605 |
| 19. $(16.32 - 0.045) - (5.25 + 0.0987 + 0.1 + 0.03)$ | R. 10.7963 |
| 20. $14,134 - (78 - 15.7639 + 6 - 0.75394)$ | R. 14,066.51784 |

III. MULTIPLICACIÓN

431

REGLA

Para multiplicar dos decimales o un entero por un decimal, se multiplican como si fueran enteros, separando de la derecha del producto con un punto decimal tantas cifras decimales como haya en el multiplicando y el multiplicador.

Ejemplos

$$\begin{array}{r} 14.25 \\ \times 3.05 \\ \hline 7125 \\ 4275 \\ \hline 43.4625 \end{array}$$

R.

$$\begin{array}{r} 1894 \\ \times 0.05 \\ \hline 94.70 \end{array}$$

R.

176

Efectuar:

Ejercicio

- | | | | |
|--------------------------|--------------|--------------------------------|-------------------|
| 1. 0.5×0.3 | R. 0.15 | 6. 7.003×5.004 | R. 35.043012 |
| 2. 0.17×0.83 | R. 0.1411 | 7. 134.786×0.1987 | R. 26.7819782 |
| 3. 0.001×0.0001 | R. 0.0000001 | 8. $1,976.325 \times 0.762438$ | R. 1,506.82528035 |
| 4. 8.34×14.35 | R. 119.679 | 9. 5×0.7 | R. 3.5 |
| 5. 16.84×0.003 | R. 0.05052 | 10. 14×0.08 | R. 1.12 |

11. 35×0.0009	R. 0.0315	19. $(0.5 + 0.76) \times 5$	R. 6.3
12. 143×0.00001	R. 0.00143	20. $(8.35 + 6.003 + 0.01) \times 0.7$	R. 10.0541
13. 134×0.873	R. 116.982	21. $(14 + 0.003 + 6) \times 9$	R. 180.027
14. $1,897 \times 0.132$	R. 250.404	22. $(131 + 0.01 + 0.0001) \times 14.1$	R. 1,847.24241
15. $3,184 \times 3.726$	R. 11,863.584	23. $(0.75 - 0.3) \times 5$	R. 2.25
16. 0.187×19	R. 3.553	24. $(0.978 - 0.0013) \times 8.01$	R. 7.823367
17. 314.008×31	R. 9,734.248	25. $(14 - 0.1) \times 31$	R. 430.9
18. $0.000001 \times 8,939$	R. 0.008939	26. $(1,543 - 0.005) \times 51$	R. 78,692.745

IV. DIVISIÓN

DIVISIÓN DE DOS DECIMALES

432

REGLA

Para dividir dos decimales, si no son homogéneos, es decir, si no tienen el mismo número de cifras decimales, se hace que lo sean añadiendo ceros al que tenga menos cifras decimales. Una vez homogéneos el dividendo y el divisor, se suprimen los puntos y se dividen como enteros.

Dividir 5.678 entre 0.546. Como son homogéneos, suprimiremos los puntos decimales y quedará 5,678 entre 546:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 546 \overline{) 5,678} \\ \underline{0218} \\ 10.3992 \end{array}$$

Siempre que la división no sea exacta, como en este caso, debe *aproximarse*. Para ello, ponemos punto decimal en el cociente, añadimos un cero a cada residuo y lo dividimos entre el divisor, hasta tener *cuatro* cifras decimales en el cociente. Así, en el caso anterior, tendremos:

$$\begin{array}{r} 546 \overline{) 5,678} \\ \underline{02180} \\ 5420 \\ \underline{5060} \\ 1460 \\ \underline{368} \end{array}$$

Basta expresar el cociente con tres cifras decimales, pero para ello tenemos que fijarnos si la cuarta cifra decimal es menor, igual o mayor que 5.

Si la cuarta cifra decimal es menor que 5, se desprecia esa cifra decimal. Así, en la división anterior el cociente será 10.399, porque la cuarta cifra decimal 2, por ser menor que 5, se desprecia. 10.399 es el *cociente por defecto* de esta división, ya que es *menor* que el verdadero cociente.

Si la cuarta cifra decimal es mayor que 5, se aumenta una unidad a la cifra de las milésimas. Así, en la división de 0.89 entre 0.81, tendremos:

$$\begin{array}{r} 1.0987 \\ 81 \overline{) 89} \\ \underline{800} \\ 710 \\ \underline{620} \\ 53 \end{array}$$

Como la cuarta cifra decimal es 7, mayor que 5, se suprime, pero se *añade* una unidad a la cifra de las milésimas 8, y quedará 1.099, que es el *cociente por exceso* de esta división, ya que es *mayor* que el verdadero cociente.

Si la cuarta cifra decimal es 5, se suprime y se añade una unidad a las milésimas. Así, si el cociente de una división es 0.7635 lo expresaremos 0.764, *cociente por exceso*.

Ejemplos

177

Ejercicio

Efectuar:

- | | | | |
|-----------------------|----------|---------------------------|-----------|
| 1. $0.9 \div 0.3$ | R. 3 | 11. $0.89356 \div 0.314$ | R. 2.840 |
| 2. $0.81 \div 0.27$ | R. 3 | 12. $0.7248 \div 0.184$ | R. 3.939 |
| 3. $0.64 \div 0.04$ | R. 16 | 13. $0.5 \div 0.001$ | R. 500 |
| 4. $0.125 \div 0.005$ | R. 25 | 14. $0.86 \div 0.0043$ | R. 200 |
| 5. $0.729 \div 0.009$ | R. 81 | 15. $0.27 \div 0.0009$ | R. 300 |
| 6. $0.243 \div 0.081$ | R. 3 | 16. $31.63 \div 8.184$ | R. 3.865 |
| 7. $0.32 \div 0.2$ | R. 1.6 | 17. $14.6 \div 3.156$ | R. 4.626 |
| 8. $0.1284 \div 0.4$ | R. 0.321 | 18. $8.3256 \div 14.3$ | R. 0.582 |
| 9. $0.7777 \div 0.11$ | R. 7.07 | 19. $12.78 \div 123.1001$ | R. 0.104 |
| 10. $0.7356 \div 0.1$ | R. 7.356 | 20. $9.183 \div 0.00012$ | R. 76,525 |

433

DIVISIÓN DE UN ENTERO ENTRE UN DECIMAL O VICEVERSA

REGLA

Se pone punto decimal al entero y se le añaden tantos ceros como cifras decimales tenga el decimal. Una vez homogéneos dividendo y divisor, se suprimen los puntos decimales y se dividen como enteros.

Ejemplos

- 1) Dividir 56 entre 0.114. Ponemos punto decimal al 56 y le añadimos tres ceros, porque el decimal tiene tres cifras decimales y queda: $56.000 \div 0.114$. Ahora suprimimos los puntos y dividimos como enteros:

$$\begin{array}{r}
 491.22807 \\
 114 \overline{) 56,000} \\
 \underline{1040} \\
 0140 \\
 \underline{0260} \\
 0320 \\
 \underline{0920} \\
 00800 \\
 \underline{002}
 \end{array}$$

Cociente por defecto 491.228.

- 2) Dividir 56.03 entre 19. Ponemos punto decimal a 19 y le añadimos dos ceros y nos queda $56.03 \div 19.00$. Ahora suprimimos los puntos decimales y dividimos como enteros:

$$\begin{array}{r}
 2.9489 \\
 1,900 \overline{) 5,603} \\
 \underline{18030} \\
 09300 \\
 \underline{17000} \\
 18000 \\
 \underline{0900}
 \end{array}$$

Cociente por exceso: 2.949.

Efectuar:

178

Ejercicio

1. $5 \div 0.5$	R. 10	11. $0.6 \div 6$	R. 0.1
2. $13 \div 0.13$	R. 100	12. $0.21 \div 21$	R. 0.01
3. $16 \div 0.64$	R. 25	13. $0.64 \div 16$	R. 0.04
4. $8 \div 0.512$	R. 15.625	14. $0.729 \div 9$	R. 0.081
5. $12 \div 0.003$	R. 4,000	15. $0.003 \div 12$	R. 0.00025
6. $93 \div 0.0186$	R. 5,000	16. $0.0186 \div 93$	R. 0.0002
7. $500 \div 0.00125$	R. 400,000	17. $0.00125 \div 500$	R. 0.0000025
8. $17 \div 0.143$	R. 118.881	18. $0.132 \div 132$	R. 0.001
9. $154 \div 0.1415$	R. 1,088.399	19. $0.8976 \div 19$	R. 0.047
10. $1,318 \div 0.24567$	R. 5,364.9204	20. $19.14 \div 175$	R. 0.109

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES COMPLEJAS CON DECIMALES

434

Se efectúan todas las operaciones indicadas en el numerador y denominador hasta convertir cada uno de ellos en un solo decimal, y luego se efectúa la división de estos dos decimales.

1) Simplificar $\frac{(2 + 0.16 - 0.115) \times 3}{(0.336 + 1.5 - 0.609) \div 0.4}$

$$\frac{(2 + 0.16 - 0.115) \times 3}{(0.336 + 1.5 - 0.609) \div 0.4} = \frac{2.045 \times 3}{1.227 \div 0.4} = \frac{6.135}{3.0675} = 2 \quad \text{R.}$$

2) Simplificar $\frac{\left(\frac{0.05}{0.15} + \frac{3}{0.4} + 2\right) \times 3.20}{\left(\frac{0.16}{0.4/0.1} + 0.532\right) \div 7.15}$

Tendremos:

$$\frac{\left(\frac{0.05}{0.15} + \frac{3}{0.4} + 2\right) \times 3.20}{\left(\frac{0.16}{0.4/0.1} + 0.532\right) \div 7.15} = \frac{(0.33 + 7.50 + 2) \times 3.20}{(0.04 + 0.532) \div 7.15}$$

$$= \frac{9.83 \times 3.20}{0.572 \div 7.15} = \frac{31.456}{0.08} = 393.2 \quad \text{R.}$$

Ejemplos

179

Ejercicio

Simplificar:

$$1. \frac{(0.03 + 0.456 + 8) \times 6}{25.458}$$

R. 2

$$2. \frac{(8.006 + 0.452 + 0.15) \div 0.1}{(8 - 0.1 + 0.32) \times 4}$$

R. 2.618

$$3. \frac{0.5 \times 3 + 0.6 \div 0.03 + 0.5}{0.08 \div 8 + 0.1 \div 0.1 - 0.01}$$

R. 22

$$4. \frac{(8.3 - 0.05) - (4.25 - 3.15)}{0.04 \div 0.4 + 0.006 \div 0.6 + 7.04}$$

R. 1

$$5. \frac{4 \div 0.01 + 3 \div 0.001 + 0.1 \div 0.01}{4 \times 0.01 + 3 \times 0.001 + 1,704.957}$$

R. 2

$$6. \left(\frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.01} + \frac{1}{0.001} \right) \times 0.3$$

R. 333

$$7. \left(\frac{8}{0.16} - \frac{0.15}{0.5} \right) + 0.01$$

R. 49.71

$$8. \left(\frac{0.06}{0.3} + \frac{0.052}{2} \right) \div \frac{6}{0.36/3}$$

R. 0.00452

$$9. 0.0056 + \frac{0.03/3}{0.564/3} + \frac{0.56}{32/0.16}$$

R. 0.616

$$10. \frac{5}{0.32/2} + \frac{0.3/0.5}{0.001}$$

R. 631.25

$$11. \frac{0.4/4}{4/0.4} + \frac{0.05/5}{5/0.05} + \frac{0.006/6}{6/0.006}$$

R. 0.010101

$$12. \frac{16/0.01}{0.1} + \frac{0.1}{0.02/16} - \frac{0.001/0.1}{0.1/0.001}$$

R. 16,079.9999

180

Ejercicio

1. Pedro tiene 5.64 nuevos soles, Juan 2.37 nuevos soles más que Pedro y Enrique 1.15 nuevos soles más que Juan. ¿Cuánto tienen entre los tres? R. 22.81 nuevos soles

2. Un hombre se compra un traje, un sombrero, un bastón y una billetera. Ésta le ha costado 3.75 dólares; el sombrero le ha costado el doble de lo que le costó la billetera; el bastón 1.78 dólares más que el sombrero, y el traje 5 veces lo que la billetera. ¿Cuánto le ha costado todo? R. 39.28 dólares

3. Se adquiere un libro por 4.50 dólares; una engrapadora por 2 dólares menos que el libro; una pluma por la mitad de lo que costaron el libro y la engrapadora. ¿Cuánto sobrará al comprador después de hacer estos pagos, si tenía 15.83 dólares? R. 5.33 dólares

4. Tenía 14.25 nuevos soles el lunes; el martes cobré 16.89 nuevos soles; el miércoles cobré 97 nuevos soles y el jueves pagué 56.07 nuevos soles. ¿Cuánto me queda?
R. 72.07 nuevos soles
5. Un muchacho que tiene 0.60 dólares quiere reunir 3.75 dólares. Pide a su padre 1.75 dólares y éste le da 0.17 dólares menos de lo que le pide; pide a un hermano 0.30 dólares y éste le da 0.15 dólares más de lo que le pide. ¿Cuánto le falta para obtener lo que desea? **R. 1.12 dólares**
6. Un comerciante hace un pedido de 3,000 kg de mercancías y se lo envían en cuatro partidas. En la primera le mandan 71.45 kg; en la segunda, 40 kg más que en la primera; en la tercera, tanto como en las dos anteriores y en la cuarta lo restante. ¿Cuántos kg le enviaron en la última partida?
R. 2,634.2 kg
7. Un camión conduce cinco fardos de mercancías. El primero pesa 72.675 kg; el segundo, 8 kg menos que el primero; el tercero, 6.104 kg más que los dos anteriores juntos, y el cuarto tanto como los tres anteriores, ¿Cuál es el peso del quinto fardo si el peso total de las mercancías es 960.34 kg? **R. 398.732 kg**
8. Se reparte una herencia entre tres personas. A la primera le corresponden 1,245.67 dólares; a la segunda el triple de lo de la primera más 56.89 dólares; a la tercera, 76.97 dólares menos que la suma de lo de las otras dos. Si además, se han separado 301.73 dólares para gastos, ¿a cuánto ascendía la herencia? **R. 10,303.90 dólares**
9. La altura de una persona es 1.85 m y la de una torre es 26 veces la altura de la persona menos 1.009 m. Hallar la altura de la torre. **R. 47.091 m**
10. El agua contenida en cuatro depósitos pesa 879.002 kg. El primer depósito contiene 18.132 kg menos que el segundo; el segundo, 43.016 kg más que el tercero, y el tercero 78.15 kg más que el cuarto. Hallar el peso del agua contenida en cada depósito.
R. 1° 247.197; 2° 265.329; 3° 222.313; 4° 144.163 kg
11. La suma de dos números es 15.034 y su diferencia 6.01. Hallar los números.
R. 10.522 y 4.512
12. El triple de la suma de dos números es 84.492 y el doble de su diferencia 42.02. Hallar los números. **R. 24.587 y 3.577**
13. Una caja de puros vale 4.75 dólares y los puros valen 3.75 dólares más que la caja. Hallar el precio de los puros y de la caja. **R. Puros, 4.25 dólares; caja, 0.50 dólares**
14. La suma de dos números es 10.60 y su cociente 4. Hallar los números. **R. 8.48 y 2.12**
15. La diferencia de dos números es 6.80 y su cociente 5. Hallar los números. **R. 8.50 y 1.70**
16. Un hombre compra 4 docenas de sombreros a 10 dólares la docena, y 3 docenas de lápices. Cada docena de lápices le cuesta la vigésima parte del costo de una docena de sombreros más 0.06 dólares. ¿Cuánto importa la compra? **R. 41.68 dólares**
17. Un rodillo de piedra tiene de circunferencia 6.34 pies. De un extremo a otro de un terreno de tenis da 24.75 vueltas. ¿Cuál es la longitud del terreno? **R. 156.915 pies**
18. Un comerciante paga a otro las siguientes compras que le había hecho: 20 kg de mantequilla a 0.18 dólares/kg; 80 kg de dulce a 0.05 dólares/kg; 312 kg de harina a 0.06 dólares/kg, y 8 docenas de cajas de fósforos a 0.03 dólares/caja. Si entrega 30 dólares, ¿cuánto le devolverán? **R. 0.80 dólares**
19. El vino de un tonel pesa 1,962 kg. Si cada litro de vino pesa 0.981 kg, ¿cuántos litros contiene el tonel? **R. 2,000 ℓ**

20. Un tonel lleno de vino pesa 614 kg. Si el litro de vino pesa 0.980 kg y el peso del tonel es 75 kg, ¿cuántos litros contiene el tonel? **R. 550 ℓ**
21. Un kilogramo de una mercancía cuesta \$1,300 y un kilogramo de otra \$32.50. ¿Cuántos kilogramos de la segunda mercancía se podrán comprar con un kilogramo de la primera? **R. 40 kg**
22. Se compran 21 metros de cinta por 7.35 dólares. ¿Cuánto importarían 18 metros? **R. 6.30 dólares**
23. A \$85 los 1,000 kg de una mercancía, ¿cuánto importarán 310 kg? **R. \$26.35**
24. Tengo 14 kg de una mercancía y me ofrecen comprármela pagándome \$9.40 por kg; pero desisto de la venta y más tarde entrego mi provisión por \$84.14. ¿Cuánto he perdido por kg? **R. \$3.39**
25. Se compran 4 docenas de sombreros a Q. 3.90 cada sombrero. Si se reciben 13 por 12, ¿a cómo sale cada sombrero? **R. Q. 3.60**
26. Un empleado ahorra cada semana cierta suma ganando 75 dólares semanales. Cuando tiene ahorrados 24.06 dólares ha ganado 450 dólares. ¿Qué suma ahorró semanalmente? **R. 4.01 dólares**
27. Si ganara 150 dólares más al mes podría gastar diariamente 6.50 dólares y ahorrar mensualmente 12.46 dólares. ¿Cuál es mi sueldo mensual? (Mes de 30 días.) **R. 57.46 dólares**
28. Compró 100 libros por 85 dólares. Vendo la quinta parte a 0.50 dólares; la mitad de los restantes a 1.75 dólares y el resto a 2 dólares cada uno. ¿Cuál es mi beneficio? **R. 75 dólares**
29. Cierta número de libros se vendería por 300 dólares si hubiera $\frac{1}{3}$ más de los que hay. Si cada libro se vende por 1.25 dólares, ¿cuántos libros hay? **R. 200 libros**
30. Enrique compra 6 lápices a 0.54 dólares, y vende 5 a 0.55 dólares. Si su ganancia es de 0.80 dólares, ¿cuántos lápices ha comprado en total? **R. 40 lápices**
31. Para comprar 20 periódicos me faltan 0.80 dólares, y si compro 15 periódicos me sobran 1.2 dólares. ¿Cuánto vale cada periódico? **R. 0.40 dólares**
32. En una carrera de 400 m un corredor hace 8 metros por segundo y otro 6.75 metros por segundo. ¿Cuántos segundos antes llegará el primero? **R. 9.2 s**
33. Compró igual número de vacas y caballos por 540.18 dólares. Cada vaca vale 56.40 dólares y cada caballo 33.63 dólares. ¿Cuántas vacas y cuántos caballos he comprado? **R. 6 v y 6 c**
34. Compró igual número de kilos de harina, azúcar, pan y frijoles por 36.66 dólares. Cada kilo de harina cuesta 0.06 dólares, cada kilo de azúcar 0.08 dólares; el kilo de pan 0.07 dólares y el de frijoles 0.05 dólares. ¿Cuántos kilos de cada cosa he comprado? **R. 141 kg**
35. Quiero repartir 20 balboas entre dos muchachos de modo que cuando el mayor reciba 1.50 el menor reciba 0.50. ¿Cuánto recibirá cada muchacho? **R. Mayor, 15; menor, 5 balboas**
36. Se compran 200 cigarros a 5 dólares el ciento. Se echan a perder 20 y los restantes los vendo a 0.84 dólares la docena. ¿Cuánto se gana? **R. 2.60 dólares**
37. Pierdo \$19 en la venta de 95 bolsas de azúcar a \$9.65 la bolsa. Hallar el costo de cada bolsa. **R. \$9.85**
38. Pedro adquiere cierto número de libros por 46.68 dólares. Si hubiera comprado 4 más le habrían costado 77.80 dólares. ¿Cuántos libros ha comprado y cuánto ganará si cada libro lo vende por 9.63 dólares? **R. Compró 6; ganará 11.10 dólares**
39. Pago \$54.18 de derechos por la mercancía de una caja cuyo peso bruto es de 60 kg. Si el peso del envase es 8.40 kg, ¿cuánto he pagado por kg de mercancía? **R. \$1.05**

40. Tres cajas contienen mercancías. La primera y la segunda pesan 76.580 kg; la segunda y la tercera 90.751 kg y la primera y la tercera 86.175 kg. ¿Cuánto pesa cada caja? **R. 1ª, 36.002 kg; 2ª 40.578 kg; 3ª, 50.173 kg**
41. Un depósito se puede llenar por dos llaves. La primera vierte 25.23 litros en 3 minutos y la segunda 31.3 litros en 5 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el estanque, si estando vacío se abren a un tiempo las dos llaves, sabiendo que su capacidad es de 425.43 litros? **R. 29 min**
42. ¿Cuál es el número que si se multiplica por 4; si este producto se divide entre 6, al cociente se le añade 18 y a esta suma se resta 6, se obtiene 12.002? **R. 0.003**
43. Se compran 15 playeras por 210.75 dólares. Se venden 6 a 15.30 dólares. ¿A cómo hay que vender el resto para ganar en todo 30 dólares? **R. 16.55 dólares**
44. Un caballista adquiere cierto número de caballos en 5,691 dólares. Vende una parte en 1,347.50 dólares a razón de 61.25 dólares cada caballo, perdiendo 20.05 dólares en cada uno. ¿A cómo tiene que vender el resto para ganar 1,080.50 dólares en todo? **R. 113 dólares**
45. Un avicultor compra 6 gallinas y 8 gallos por 8.46 dólares. Más tarde a los mismos precios, compra 7 gallinas y 8 gallos por 8.91 dólares. Hallar el precio de una gallina y de un gallo.
R. Una gallina, 0.45 dólares; un gallo, 0.72 dólares
46. Un padre de familia, con objeto de llevar su familia al circo, adquiere tres entradas para adulto y dos para niño por 2.20 dólares. Después, como invitó a otras personas, adquiere a los mismos precios, seis entradas para niño y dos para adulto, en 2.40 dólares. Hallar el precio de una entrada para niño y de una para adulto. **R. Para niño, 0.20 dólares; para adulto, 0.60 dólares**
47. Un contratista alquila los servicios de un obrero por 36 días, y como no tiene trabajo para todos los días le ofrece 1.25 dólares por cada día que trabaje y 0.50 dólares por cada día que no trabaje. Al cabo de los 36 días el obrero ha recibido 30 dólares. ¿Cuántos días trabajó y cuántos no?
R. Trabajó 16 días; no trabajó 20 días
48. Un colono ofrece a un empleado un sueldo anual de 481.16 dólares y una sortija. Al cabo de 8 meses despide al obrero y le entrega 281.16 dólares y la sortija. ¿En cuánto se apreció el valor de la sortija? **R. 118.84 dólares**
49. ¿Cuál es el número que sumado con su quíntuplo da por resultado 4.0134? **R. 0.6689**
50. Se compra cierto número de libros pagando 609 balboas por cada 84 libros que se compraron, y luego se vendieron todos cobrando 369 balboas por cada 60 libros. Si ha habido en la venta una pérdida de 110 balboas, ¿cuántos libros se compraron? **R. 100 libros**
51. Para pagar cierto número de cajas que compré a \$0.70 cada una, entregué 14 bolsas de azúcar de \$6.25 cada una. ¿Cuántas cajas compré? **R. 125**
52. Se han comprado 4 cajas de sombreros por 276 dólares. Al vender 85 sombreros por 106.25 dólares se ha ganado 0.10 dólares en cada sombrero. ¿Cuántos sombreros se compraron y cuántos había en cada caja? **R. 240; 60**



Al inventar **Simón Stevin** las fracciones decimales introdujo para expresarlas un cero dentro de un círculo. Este procedimiento resultaba muy engorroso. En 1616, al publicar su obra sobre los logaritmos, **Neper, Napier o Nepair**, dio a conocer

el uso del punto decimal que se utiliza hoy para separar las cifras enteras de las decimales. En los países de habla inglesa este punto decimal se sustituye por una coma.

Capítulo **XXIX**

CONVERSIÓN DE FRACCIONES

I. CONVERSIÓN DE FRACCIONES COMUNES A FRACCIONES DECIMALES

435 Todo quebrado es el cociente de la división indicada de su numerador entre su denominador; por lo tanto, para convertir un quebrado común a fracción decimal se obedece la siguiente:

REGLA

Se divide el numerador entre el denominador, aproximando la división hasta que dé cociente exacto o hasta que se repita en el cociente indefinidamente una cifra o un grupo de cifras.

Ejemplos

1) Convertir $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{20}$ en fracciones decimales.

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 5 \overline{) 3.0} \\ \underline{00} \end{array}$$

$$\frac{3}{5} = 0.6 \quad \text{R.}$$

$$\begin{array}{r} 0.35 \\ 20 \overline{) 7.00} \\ \underline{100} \\ 00 \end{array}$$

$$\frac{7}{20} = 0.35 \quad \text{R.}$$

2) Convertir $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{33}$ en fracciones decimales.

$$\begin{array}{r} 0.333... \\ 3 \overline{) 1.000} \\ \underline{10} \\ 10 \\ \underline{1} \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0.333... \quad \text{R.}$$

$$\begin{array}{r} 0.1212... \\ 33 \overline{) 4.0000} \\ \underline{70} \\ 40 \\ \underline{70} \\ 4 \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{4}{33} = 0.1212... \quad \text{R.}$$

3) Convertir en fracciones decimales $\frac{1}{12}$ y $\frac{233}{990}$.

$$\begin{array}{r} 0.0833... \\ 12 \overline{) 1.0000} \\ \underline{40} \\ 40 \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{1}{12} = 0.0833... \quad \text{R.}$$

$$\begin{array}{r} 0.23535... \\ 990 \overline{) 233.00000} \\ \underline{3500} \\ 5300 \\ \underline{3500} \\ 5300 \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{233}{990} = 0.23535... \quad \text{R.}$$

De la observación de los ejemplos anteriores se deduce que al reducir un quebrado común a decimal puede ocurrir que la división sea exacta, originando las fracciones decimales *exactas*, o que haya una cifra o un grupo de cifras que se repita en el mismo orden indefinidamente, originando las fracciones decimales *inexactas*.

DISTINTAS CLASES DE FRACCIONES DECIMALES A QUE DAN ORIGEN LAS FRACCIONES COMUNES

436

Son las que se expresan a continuación:

Fracciones decimales que originan los quebrados comunes. . .

exactas

inexactas
periódicas

periódicas puras

periódicas mixtas

Fracción decimal **exacta** es la que tiene un número limitado de cifras decimales.

0.6 y 0.35 del ejemplo anterior 1

Ejemplos

Fracción decimal **inexacta periódica** es aquella en la cual hay una cifra o un grupo de cifras que se repiten indefinidamente y en el mismo orden.

Ejemplos

0.333... y 0.1212... del ejemplo anterior 2
0.08333... y 0.23535... del ejemplo 3

Periodo es la cifra o grupo de cifras que se repiten indefinidamente y en el mismo orden. Así, en la fracción periódica 0.333... el periodo es 3; en la fracción 0.1212... el periodo es 12; en la fracción 0.23535... el periodo es 35.

Fracción decimal **periódica pura** es aquella en la cual el periodo empieza en las décimas.

Ejemplos

0.(3)333..., 0.(12)12..., 0.(786)786...

Fracción decimal **periódica mixta** es aquella en la cual el periodo no empieza en las décimas.

Ejemplos

0.08(3)3..., 0.2(35)35..., 0.00(171)171...

Parte no periódica o **parte irregular** de una fracción periódica mixta es la cifra o grupo de cifras que se hallan entre el punto decimal y el periodo.

Ejemplos

Así, en la fracción 0.0833... la parte no periódica es 08.
en la fracción 0.23535... la parte no periódica es 2.
en la fracción 0.00171171... la parte no periódica es 00.

Las fracciones ordinarias sólo pueden dar origen a fracciones decimales exactas, periódicas puras o periódicas mixtas.

437

FRACCIÓN DECIMAL INEXACTA NO PERIÓDICA es la que tiene un número ilimitado de cifras decimales, pero no se repiten siempre en el mismo orden, o sea, que no hay periodo.

Ejemplos

$\pi = 3.1415926535...$
 $\frac{1}{\pi} = 0.3183098861...$
 $e = 2.7182818285...$

Estos son números notables del Cálculo.

Estas fracciones decimales *inexactas no periódicas* no provienen de quebrados comunes, pues éstos sólo pueden dar origen a las tres clases de fracciones indicadas arriba.

Hallar la fracción decimal equivalente y decir, en cada caso, de qué clase es la fracción decimal obtenida:

181

Ejercicio

- | | | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| 1. $\frac{1}{2}$ | 4. $\frac{1}{5}$ | 7. $\frac{1}{8}$ | 10. $\frac{3}{5}$ | 13. $\frac{5}{12}$ | 16. $\frac{105}{140}$ | 19. $\frac{6}{111}$ |
| 2. $\frac{1}{3}$ | 5. $\frac{1}{6}$ | 8. $\frac{1}{9}$ | 11. $\frac{2}{3}$ | 14. $\frac{7}{11}$ | 17. $\frac{1}{500}$ | 20. $\frac{13}{740}$ |
| 3. $\frac{1}{4}$ | 6. $\frac{1}{7}$ | 9. $\frac{2}{5}$ | 12. $\frac{4}{5}$ | 15. $\frac{24}{96}$ | 18. $\frac{1}{333}$ | |

Decir qué clase de fracciones decimales son las siguientes:

182

Ejercicio

- | | | | | |
|-----------|--------------|--------------|----------------|----------------|
| 1. 0.04 | 5. 0.005 | 9. 0.0767 | 13. 0.12341234 | 17. 0.000111 |
| 2. 0.777 | 6. 0.178178 | 10. 0.001818 | 14. 0.0109898 | 18. 0.03390972 |
| 3. 0.1333 | 7. 0.45111 | 11. 0.765765 | 15. 2.654886 | 19. 0.99102557 |
| 4. 0.1717 | 8. 0.1981616 | 12. 0.00303 | 16. 3.33345345 | 20. 9.78102793 |

SIMPLIFICACIÓN DE UNA EXPRESIÓN FRACCIONARIA COMPLEJA REDUCIENDO LOS QUEBRADOS COMUNES A FRACCIONES DECIMALES

438

Simplificar $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{1\frac{4}{5} - \frac{9}{20}}$, reduciendo los quebrados comunes en decimales.

Ejemplo

Se tiene: $\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{3}{5} = 0.6$ $\frac{1}{4} = 0.25$ $1\frac{4}{5} = 1.8$ $\frac{9}{20} = 0.45$

Tendremos: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{1\frac{4}{5} - \frac{9}{20}} = \frac{0.5 + 0.6 + 0.25}{1.8 - 0.45} = \frac{1.35}{1.35} = 1$ R.

Simplificar, convirtiendo los quebrados comunes en decimales:

183

Ejercicio

1. $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}$ R. 1

2. $\frac{\frac{7}{8} + 5\frac{2}{5} - 1\frac{1}{4}}{1\frac{1}{10} + 2\frac{3}{5} - 1\frac{3}{16}}$ R. 2

$$3. \frac{\frac{1}{5} + 0.166 + \frac{9}{125}}{\frac{1}{10} + \frac{77}{100} + \frac{3}{500}}$$

R. 0.5

$$4. \frac{\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{50}\right) + 3\frac{3}{4}}{\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{10}\right) + 3\frac{7}{10}}$$

R. 0.25

$$5. \frac{\left(\frac{9}{50} + 1\frac{19}{25} - \frac{1}{500}\right) \div \frac{1}{500}}{\left(\frac{1}{8} + \frac{27}{250} + \frac{9}{100}\right) \div \frac{1}{1,000}}$$

R. 3

$$6. \frac{\frac{1/16}{0.5} + \frac{1/20}{0.4}}{\frac{1/25}{0.04} + \frac{1/50}{0.02}}$$

R. 0.125

$$7. \frac{\left(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8} + 0.16\right) \times 1\frac{1}{2}}{\left(1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{5} - 1\frac{1}{10}\right) + \frac{21}{400}}$$

R. 1

$$8. \frac{\frac{2/5}{1/10} + \frac{3/5}{1/5} + \frac{4/5}{2/5}}{\frac{4/25}{2/25} + \frac{16/25}{4/25} - \frac{3/20}{1/20}}$$

R. 3

439

REGLAS PARA CONOCER QUÉ CLASE DE FRACCIÓN DECIMAL HA DE DAR UNA FRACCIÓN ORDINARIA

- 1) Si el denominador de una fracción irreducible es divisible solamente entre los factores primos 2 o 5 o entre ambos a la vez, el quebrado dará fracción decimal exacta.

Ejemplos

- 1) La fracción $\frac{3}{8}$ será equivalente a una fracción decimal exacta porque es irreducible y su denominador, 8, es divisible solamente entre el factor primo 2.

$$\begin{array}{r} 0.375 \\ \text{En efecto: } 8 \overline{) 3.000} \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{3}{8} = 0.375$$

La fracción $\frac{3}{8}$ es la *fracción generatriz* de 0.375 porque genera o produce el decimal 0.375 al dividirse 3 entre 8.

- 2) La fracción $\frac{11}{40}$ será equivalente a una fracción decimal exacta porque es irreducible y su denominador, 40, es divisible solamente entre los factores primos 2 y 5.

$$\begin{array}{r} 0.275 \\ \text{En efecto: } 40 \overline{) 11.000} \\ \underline{300} \\ 200 \\ \underline{00} \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{11}{40} = 0.275$$

La fracción $\frac{11}{40}$ es la fracción generatriz de 0.275

- 2) Si el denominador de una fracción irreducible no es divisible entre los factores primos 2 o 5, el quebrado dará una fracción decimal periódica pura.

- 1) El quebrado $\frac{1}{3}$ será equivalente a una fracción decimal periódica pura porque es irreducible y su denominador, 3, no es divisible entre los factores primos 2 ni 5.

$$\begin{array}{r} 0.333... \\ \text{En efecto: } 3 \overline{) 1.000} \\ \underline{10} \\ 10 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{1}{3} = 0.(3)33...$$

$\frac{1}{3}$ es la fracción generatriz de 0.333...

- 2) El quebrado $\frac{2}{7}$ dará una fracción decimal periódica pura, porque es irreducible y su denominador, 7, no es divisible entre los factores primos 2 ni 5.

$$\begin{array}{r} 0.285714285714... \\ \text{En efecto: } 7 \overline{) 2.000000000000} \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{50} \\ 10 \\ \underline{30} \\ 20 \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{50} \\ 10 \\ \underline{30} \\ 2 \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{2}{7} = 0.(285714)285714...$$

$\frac{2}{7}$ es la generatriz de 0.(285714)285714...

- 3) Si el denominador de una fracción irreducible es divisible entre los factores primos 2 o 5 o entre ambos a la vez y además por algún otro factor primo, el quebrado dará una fracción decimal periódica mixta.

- 1) El quebrado $\frac{1}{6}$ dará una fracción decimal periódica mixta, porque es irreducible y su denominador, 6, es divisible entre 2 y 3.

$$\begin{array}{r} 0.166... \\ \text{En efecto: } 6 \overline{) 1.000} \\ \underline{40} \\ 40 \\ \underline{4} \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{1}{6} = 0.1(6)6...$$

$\frac{1}{6}$ es la generatriz de 0.166...

- 2) La fracción ordinaria $\frac{1}{110}$ dará fracción decimal periódica mixta, porque es irreducible y su denominador, 110, es divisible entre los factores primos 2, 5 y 11.

$$\begin{array}{r} 0.00909 \dots \\ \text{En efecto: } 110 \overline{) 1.00000} \\ \underline{1000} \\ 100 \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{1}{110} = 0.00(90)90 \dots \text{ R.}$$

$\frac{1}{110}$ es la fracción generatriz de 0.00(90)90...

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Las reglas anteriores se refieren únicamente a fracciones **irreducibles**. Si se quiere saber qué clase de fracción decimal dará una fracción que no es irreducible, lo primero que debemos hacer es simplificarla hasta hacerla irreducible y entonces se pueden aplicar las reglas anteriores.

Ejemplo

¿Qué clase de fracción decimal dará $\frac{105}{165}$?

Hagámosla irreducible: $\frac{105}{165} = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}$

Como el denominador de $\frac{7}{11}$ no es divisible entre 2 ni 5, resultará una fracción decimal periódica pura.

$$\begin{array}{r} 0.6363 \dots \\ \text{En efecto: } 11 \overline{) 7.0000} \\ \underline{40} \\ 70 \\ \underline{40} \\ 7 \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{105}{165} = \frac{7}{11} = 0.(63)63 \dots \text{ R.}$$

184

Decir qué clase de fracción decimal darán los siguientes quebrados y por qué:

Ejercicio

- | | | | | | | | |
|------------------|------------------|--------------------|--------------------|----------------------|---------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. $\frac{1}{2}$ | 5. $\frac{1}{6}$ | 9. $\frac{1}{10}$ | 13. $\frac{2}{11}$ | 17. $\frac{11}{30}$ | 21. $\frac{3}{30}$ | 25. $\frac{16}{46}$ | 29. $\frac{1,000}{14,000}$ |
| 2. $\frac{1}{3}$ | 6. $\frac{1}{7}$ | 10. $\frac{1}{11}$ | 14. $\frac{3}{13}$ | 18. $\frac{5}{14}$ | 22. $\frac{5}{35}$ | 26. $\frac{140}{420}$ | 30. $\frac{158}{287}$ |
| 3. $\frac{1}{4}$ | 7. $\frac{1}{8}$ | 11. $\frac{1}{12}$ | 15. $\frac{5}{17}$ | 19. $\frac{13}{121}$ | 23. $\frac{6}{18}$ | 27. $\frac{36}{108}$ | |
| 4. $\frac{1}{5}$ | 8. $\frac{1}{9}$ | 12. $\frac{1}{15}$ | 16. $\frac{7}{55}$ | 20. $\frac{2}{6}$ | 24. $\frac{33}{55}$ | 28. $\frac{3,000}{4,500}$ | |

II. CONVERSIÓN DE FRACCIONES DECIMALES A QUEBRADOS COMUNES

FRACCIÓN GENERATRIZ de una fracción decimal es el quebrado común irreducible equivalente a la fracción decimal.

440

DEDUCCIÓN DE LA REGLA PARA HALLAR LA GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL EXACTA

441

Sea la fracción $0.abc$. Llamando f a la fracción generatriz, tendremos:

$$f = 0.abc$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción, aquí por 1,000, tendremos:

$$1,000 \times f = abc$$

Dividiendo ambos miembros entre 1,000 y simplificando:

$$\frac{1,000 \times f}{1,000} = \frac{abc}{1,000} \therefore f = \frac{abc}{1,000}$$

luego:

Para hallar la generatriz de una fracción decimal exacta se pone por numerador la fracción decimal, prescindiendo del punto, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.

1) Hallar la generatriz de 0.564. $0.564 = \frac{564}{1,000} = \frac{141}{250}$ R.

2) Hallar la generatriz de 0.0034. $0.0034 = \frac{34}{10,000} = \frac{17}{5,000}$ R.

OBSERVACIÓN

Si la fracción decimal tiene parte entera, se coloca ésta delante del quebrado equivalente a la parte decimal, formando un número mixto, que después se reduce a quebrado.

Hallar la generatriz de 5.675. $5.675 = 5\frac{675}{1,000} = 5\frac{27}{40} = \frac{227}{40}$ R.

Ejemplos

Ejemplo

185

Ejercicio

Hallar la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

1. 0.4 R. $\frac{2}{5}$

8. 0.018 R. $\frac{9}{500}$

15. 0.3546 R. $\frac{1,773}{5,000}$

2. 0.05 R. $\frac{1}{20}$

9. 1.0036 R. $\frac{2,509}{2,500}$

16. 0.72865 R. $\frac{14,573}{20,000}$

3. 0.06 R. $\frac{3}{50}$

10. 2.00048 R. $\frac{12,503}{6,250}$

17. 1.186 R. $\frac{593}{500}$

4. 0.007 R. $\frac{7}{1,000}$

11. 3.000058 R. $\frac{1,500,029}{500,000}$

18. 3.004 R. $\frac{751}{250}$

5. 0.0008 R. $\frac{1}{1,250}$

12. 4.00124 R. $\frac{100,031}{25,000}$

19. 5.0182 R. $\frac{25,091}{5,000}$

6. 0.00009 R. $\frac{9}{100,000}$

13. 0.03215 R. $\frac{643}{20,000}$

20. 7.14684 R. $\frac{178,671}{25,000}$

7. 0.000004 R. $\frac{1}{250,000}$

14. 0.198 R. $\frac{99}{500}$

442

DEDUCCIÓN DE LA REGLA PARA HALLAR LA GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL PERIÓDICA PURASea la fracción $0.abab\dots$. Llamando f a la generatriz, tendremos:

$$f = 0.(ab)ab\dots \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el periodo, aquí por 100, tendremos:

$$100 \times f = ab.abab\dots \quad (2)$$

De esta igualdad (2) restamos la igualdad (1):

$$\begin{array}{r}
 100 \times f = ab.abab\dots \\
 - f = 0.abab \\
 \hline
 99 \times f = ab
 \end{array}$$

Dividiendo ambos miembros entre 99 y simplificando, queda

$$\frac{99 \times f}{99} = \frac{ab}{99} \therefore f = \frac{ab}{99}$$

luego:

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica pura se pone por numerador un periodo y por denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Ejemplos

1) Hallar la generatriz de 0.4545...

$$0.4545\dots = \frac{45}{99} = \frac{5}{11} \quad \text{R.}$$

2) Hallar la generatriz de 0.00360036...

$$0.00360036\dots = \frac{36}{9,999} = \frac{4}{1,111} \quad \text{R.}$$

OBSERVACIÓN

Si la fracción decimal periódica pura tiene parte entera, se coloca ésta delante del quebrado equivalente a la parte decimal formando un número mixto y después se reduce a quebrado.

Hallar la generatriz de $7.135135\dots$

$$7.135135\dots = 7\frac{135}{999} = 7\frac{5}{37} = \frac{264}{37} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

Hallar la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

186

1. $0.33\dots$	R. $\frac{1}{3}$	8. $0.8181\dots$	R. $\frac{9}{11}$	15. $1.7272\dots$	R. $\frac{19}{11}$
2. $0.44\dots$	R. $\frac{4}{9}$	9. $0.123123\dots$	R. $\frac{41}{333}$	16. $2.009009\dots$	R. $\frac{223}{111}$
3. $0.66\dots$	R. $\frac{2}{3}$	10. $0.156156\dots$	R. $\frac{52}{333}$	17. $3.00450045\dots$	R. $\frac{3,338}{1,111}$
4. $0.1212\dots$	R. $\frac{4}{33}$	11. $0.143143\dots$	R. $\frac{143}{999}$	18. $4.186186\dots$	R. $\frac{1,394}{333}$
5. $0.1515\dots$	R. $\frac{5}{33}$	12. $0.18961896\dots$	R. $\frac{632}{3,333}$	19. $5.018018\dots$	R. $\frac{557}{111}$
6. $0.1818\dots$	R. $\frac{2}{11}$	13. $0.003003\dots$	R. $\frac{1}{333}$	20. $6.00060006\dots$	R. $\frac{20,000}{3,333}$
7. $0.2020\dots$	R. $\frac{20}{99}$	14. $1.0505\dots$	R. $\frac{104}{99}$		

Ejercicio

DEDUCCIÓN DE UNA REGLA PARA HALLAR LA GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL PERIÓDICA MIXTA

443

Sea la fracción $0.ab(cd)cd\dots$. Llamando f a la generatriz, tendremos:

$$f = 0.ab(cd)cd\dots \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tengan la parte no periódica y el periodo, aquí por 10,000, porque son cuatro esas cifras, tendremos:

$$10,000 \times f = abcd.cdcd\dots \quad (2)$$

Multiplicando ambos miembros de la primera igualdad (1) por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica, aquí por 100, tendremos:

$$100 \times f = ab.cdcd\dots \quad (3)$$

Restando de la igualdad (2) la igualdad (3)
tendremos:

$$\begin{array}{r} 10,000 \times f = abcd.cdcd. \dots \\ 100 \times f = ab.cdcd. \dots \\ \hline 9,900 \times f = abcd - ab \end{array}$$

Dividiendo ambos miembros de
esta igualdad entre 9,900 y simpli-
ficando:

$$\frac{9,900 \times f}{9,900} = \frac{abcd - ab}{9,900} \therefore f = \frac{abcd - ab}{9,900}$$

luego:

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica mixta se pone por nume-
rador la parte no periódica seguida de un periodo, menos la parte no periódica, y por
denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo y tantos ceros como cifras tenga
la parte no periódica.

Ejemplos

1) Hallar la generatriz de 0.56777... $0.56777\dots = \frac{567 - 56}{900} = \frac{511}{900}$ R.

2) Generatriz de 0.0056767... $0.0056767\dots = \frac{567 - 5}{99,000} = \frac{562}{99,000} = \frac{281}{49,500}$ R.

OBSERVACIÓN

Si la fracción tiene parte entera, se pone ésta delante del quebrado equivalente a la parte decimal, formando un número mixto y luego se reduce a quebrado.

Hallar la generatriz de 8.535656... $8.535656\dots = 8\frac{5,356 - 53}{9,900} = 8\frac{5,303}{9,900} = \frac{84,503}{9,900}$ R.

187

Hallar la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

Ejercicio

1. 0.355... R. $\frac{16}{45}$

8. 0.1844... R. $\frac{83}{450}$

15. 1.033... R. $\frac{31}{30}$

2. 0.644... R. $\frac{29}{45}$

9. 0.2366... R. $\frac{71}{300}$

16. 1.766... R. $\frac{53}{30}$

3. 0.988... R. $\frac{89}{90}$

10. 0.51919... R. $\frac{257}{495}$

17. 1.031515... R. $\frac{851}{825}$

4. 0.133... R. $\frac{2}{15}$

11. 0.012323... R. $\frac{61}{4,950}$

18. 2.014545... R. $\frac{554}{275}$

5. 0.6655... R. $\frac{599}{900}$

12. 0.0011818... R. $\frac{13}{11,000}$

19. 3.6112112... R. $\frac{18,038}{4,995}$

6. 0.1244... R. $\frac{28}{225}$

13. 0.124356356... R. $\frac{15,529}{124,875}$

20. 4.09912912... R. $\frac{136,501}{33,300}$

7. 0.3622... R. $\frac{163}{450}$

14. 0.451201201... R. $\frac{601}{1,332}$

MISCELÁNEA

Hallar la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

1. 0.8	R. $\frac{4}{5}$	16. 0.87611...	R. $\frac{1,577}{1,800}$	31. 14.66...	R. $\frac{44}{3}$
2. 0.185	R. $\frac{37}{200}$	17. 0.15169169...	R. $\frac{7,577}{49,950}$	32. 0.096055...	R. $\frac{1,729}{18,000}$
3. 0.4646...	R. $\frac{46}{99}$	18. 0.00564	R. $\frac{141}{25,000}$	33. 15.075	R. $\frac{603}{40}$
4. 0.3636...	R. $\frac{4}{11}$	19. 6.018018...	R. $\frac{668}{111}$	34. 0.0885608856...	R. $\frac{984}{11,111}$
5. 0.544...	R. $\frac{49}{90}$	20. 5.1515...	R. $\frac{170}{33}$	35. 0.1868	R. $\frac{467}{2,500}$
6. 0.32	R. $\frac{8}{25}$	21. 0.008	R. $\frac{1}{125}$	36. 0.01369346934...	R. $\frac{136,921}{9,999,000}$
7. 3.55...	R. $\frac{32}{9}$	22. 3.05	R. $\frac{61}{20}$	37. 0.000018	R. $\frac{9}{500,000}$
8. 0.143636...	R. $\frac{79}{550}$	23. 0.060060...	R. $\frac{20}{333}$	38. 0.000000864	R. $\frac{27}{31,250,000}$
9. 0.17333...	R. $\frac{13}{75}$	24. 4.1344...	R. $\frac{3,721}{900}$	39. 5.165165...	R. $\frac{1,720}{333}$
10. 0.146	R. $\frac{73}{500}$	25. 0.0001515...	R. $\frac{1}{6,600}$	40. 0.894894...	R. $\frac{298}{333}$
11. 0.00540054...	R. $\frac{6}{1,111}$	26. 0.0000014	R. $\frac{7}{5,000,000}$	41. 0.056893893...	R. $\frac{56,837}{999,000}$
12. 0.1861515...	R. $\frac{6,143}{33,000}$	27. 8.03210321...	R. $\frac{26,771}{3,333}$	42. 9.00360036...	R. $\frac{10,003}{1,111}$
13. 0.02	R. $\frac{1}{50}$	28. 0.086363...	R. $\frac{19}{220}$	43. 0.54323323...	R. $\frac{54,269}{99,900}$
14. 0.0036	R. $\frac{9}{2,500}$	29. 6.891616...	R. $\frac{68,227}{9,900}$	44. 21.006	R. $\frac{10,503}{500}$
15. 0.144144...	R. $\frac{16}{111}$	30. 18.0326	R. $\frac{90,163}{5,000}$	45. 4.0088300883...	R. $\frac{400,879}{99,999}$

Ejercicio

188

SIMPLIFICACIÓN DE UNA EXPRESIÓN COMPLEJA
HALLANDO LA GENERATRIZ DE LOS DECIMALES

444

Simplificar $\frac{(0.5 + 0.66... - 0.055...) \times \frac{9}{10}}{3.11... - 2.066...}$ hallando la generatriz de los decimales.

Ejemplo

Se tiene:

$$0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad 0.66... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad 0.055... = \frac{05-0}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$3.11... = 3\frac{1}{9} = \frac{28}{9} \quad 2.066... = 2\frac{06-0}{90} = 2\frac{6}{90} = 2\frac{1}{15} = \frac{31}{15}$$

Tendremos:

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{18}\right) \times \frac{9}{10}}{\frac{28}{9} - \frac{31}{15}} = \frac{\frac{10}{9} \times \frac{9}{10}}{\frac{47}{45}} = \frac{1}{47/45} = \frac{45}{47} \quad \text{R.}$$

189

Ejercicio

Simplificar las expresiones siguientes, hallando la generatriz de los decimales:

1. $0.5 + 0.02 + \frac{1}{2}$

R. $1\frac{1}{50}$

2. $0.16 + 4\frac{1}{5} - 0.666...$

R. $3\frac{52}{75}$

3. $(0.1515... - \frac{1}{33}) + (0.0909... + \frac{1}{3})$

R. $\frac{6}{11}$

4. $(\frac{1}{4} + 0.04 + \frac{1}{5}) \times 0.03$

R. $\frac{147}{10,000}$

5. $\frac{0.005... + \frac{5}{6} - 0.111...}{3\frac{1}{6}}$

R. $\frac{14}{57}$

6. $\frac{0.25}{0.55} + \frac{1}{9} + 0.56565...$

R. $1\frac{13}{99}$

7. $\frac{(0.3636... + \frac{1}{22} + 1\frac{1}{2}) \div 0.3}{0.333...}$

R. $19\frac{1}{11}$

8. $\frac{(0.1818... - \frac{1}{15}) + (0.036 - \frac{1}{500})}{\frac{1}{2}}$

R. $\frac{2,461}{8,250}$

9. $\frac{(0.244... + \frac{1}{3} + 0.22...) \times 1\frac{1}{4}}{3 + 0.153153...}$

R. $\frac{111}{350}$

$$10. \frac{\frac{0.18}{0.6} + \frac{0.1515\ldots}{0.1010\ldots} - \frac{1}{15}}{0.01818\ldots}$$

$$R. 95\frac{1}{3}$$

$$11. \frac{3.2 - 2.11\ldots + 3.066\ldots}{2.2 - 1.166\ldots + 2.033\ldots}$$

$$R. 1\frac{49}{138}$$

SIGNIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES DECIMALES PERIÓDICAS

445

Si una cantidad experimenta variaciones que cambian su valor, haciéndola aumentar o disminuir de un modo regular, se dice que es una **variable** y si tiene un valor fijo se llama **constante**.

Cuando los diversos valores que recibe una cantidad variable se aproximan cada vez más a una cantidad fija, constante, de modo que la diferencia entre la variable y la constante, **sin llegar a anularse**, pueda ser tan pequeña como se quiera, se dice que la constante es el **límite** de la variable o que la variable **tiende a un límite** que es la constante.

Las **fracciones decimales periódicas son cantidades variables**. Así, la fracción $0.111\ldots$ es una variable porque a medida que aumentamos el número de periodos aumenta más y más su valor y cada vez se va aproximando más al valor de su generatriz $\frac{1}{9}$ sin llegar nunca a alcanzar este valor, pero la diferencia entre $0.111\ldots$ y su generatriz $\frac{1}{9}$ se va haciendo cada vez menor, sin llegar a ser cero.

En efecto: tomando un solo periodo, tenemos $0.1 = \frac{1}{10}$ y la diferencia entre la generatriz y esta fracción es:

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{10 - 9}{90} = \frac{1}{90}$$

Tomando dos periodos tenemos $0.11 = \frac{11}{100}$, y la diferencia entre la generatriz y esta fracción es:

$$\frac{1}{9} - \frac{11}{100} = \frac{100 - 99}{900} = \frac{1}{900}$$

Tomando tres periodos, tenemos $0.111 = \frac{111}{1,000}$ y la diferencia con la generatriz es:

$$\frac{1}{9} - \frac{111}{1,000} = \frac{1,000 - 999}{9,000} = \frac{1}{9,000}$$

Vemos que la diferencia entre la fracción periódica $0.111\ldots$ y su generatriz $\frac{1}{9}$ se hace cada vez menor a medida que aumentamos el número de periodos, porque de varios quebrados que tienen igual numerador es menor el que tiene mayor denominador.

Por lo tanto, tomando cada vez mayor número de periodos, la diferencia entre la fracción $0.111\dots$ y su generatriz $\frac{1}{9}$ puede llegar a ser tan pequeña como se quiera, pero sin llegar nunca a anularse; luego, $0.111\dots$ **es una variable que tiende al límite $\frac{1}{9}$** cuando el número de periodos aumenta indefinidamente.

Del propio modo, $0.1818\dots$ es una variable porque a medida que aumentamos el número de periodos su valor se hace cada vez mayor, acercándose cada vez más al valor de su generatriz $\frac{18}{99} = \frac{2}{11}$, sin llegar nunca a tener este valor, pero la diferencia entre $0.1818\dots$ y su generatriz $\frac{2}{11}$ puede llegar a ser tan pequeña como se quiera, sin anularse nunca; luego, $0.1818\dots$ es una variable que tiende al límite $\frac{2}{11}$ cuando el número de periodos aumenta indefinidamente.

Así, pues, las fracciones periódicas pueden interpretarse **como cantidades variables que tienden al límite representado por su generatriz, cuando el número de periodos crece indefinidamente.**

446

SIGNIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES PERIÓDICAS DE PERIODO 9

La fracción periódica pura $0.999\dots$ y las fracciones periódicas mixtas de periodo 9, tales como $0.0999\dots$, $0.1999\dots$, $0.2999\dots$, $0.01999\dots$, $0.02999\dots$, etc., no son originadas por quebrados comunes, es decir, que no existe ningún quebrado común tal que, dividiendo su numerador entre su denominador, se obtengan dichas fracciones.

La fracción $0.999\dots$ difiere de 1 en 1 milésima; $0.9999\dots$ difiere de 1 en 1 diezmilésima; $0.99999\dots$ difiere de 1 en 1 cienmilésima, etc. Vemos, pues, que a medida que aumentamos el número de periodos el valor de esta fracción $0.999\dots$ se va aproximando indefinidamente a 1, sin llegar nunca a tener este valor; luego, la diferencia entre $0.999\dots$ y 1 puede llegar a ser tan pequeña como se quiera, sin llegar a valer 0; **luego, la fracción $0.999\dots$ es una variable que tiende al límite 1**, cuando el número de periodos aumenta indefinidamente. Por eso, si se halla su generatriz se encuentra que es $\frac{9}{9} = 1$.


La fracción periódica mixta $0.0999\dots$ difiere de 0.1 en una diezmilésima; $0.09999\dots$ difiere de 0.1 en una cienmilésima, etc.; luego, la diferencia entre esta fracción $0.0999\dots$ y 0.1 puede llegar a ser tan pequeña como se quiera, o sea, que **la fracción $0.0999\dots$ es una variable que tiende al límite 0.1**, cuando el número de periodos aumenta indefinidamente.

Por eso, si se halla su generatriz se encuentra que es $\frac{09 - 0}{90} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} = 0.1$.

Del propio modo, $0.1999\dots$, $0.2999\dots$, $0.3999\dots$, etc., son variables que tienden respectivamente a los límites 0.2, 0.3, 0.4, etc., cuando el número de periodos crece indefinidamente.

Las fracciones $0.00999\dots$, $0.01999\dots$, $0.02999\dots$, etc., son cantidades variables que tienden respectivamente a los límites 0.01, 0.02, 0.03, etc., cuando el número de periodos crece indefinidamente.

Las fracciones $0.10999\dots$, $0.11999\dots$, $0.12999\dots$, etc., son variables que tienden respectivamente a los límites 0.11, 0.12, 0.13, etc., cuando el número de periodos crece indefinidamente.



RENÉ DESCARTES
1596 - 1650

Los babilonios utilizaban la elevación a potencia como auxiliar de la multiplicación, y los griegos sentían especial predilección por los cuadrados y cubos. **Diofanto, siglo III (d. C.)**, ideó la yuxtaposición adhesiva para la notación de las poten-

cias. Así, x, xx, xxx , etc., para expresar la primera, segunda, tercera potencias de x . **René Descartes (1596-1650)**, introdujo la notación x, xx, x^3, x^4 , etcétera.

Capítulo XXX

POTENCIACIÓN

LEYES DE LA POTENCIACIÓN

447

Las leyes de la potenciación son tres: la ley de uniformidad, la ley de monotonía y la ley distributiva.

En la potenciación no se cumple la ley conmutativa.

En algunos casos, permutando la base por el exponente se obtiene el mismo resultado.

Así:

$$4^2 = 16 \quad \text{y} \quad 2^4 = 16$$

pero casi nunca sucede esto, como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} 3^2 &= 9 & \text{y} & & 2^3 &= 8 \\ 5^3 &= 125 & \text{y} & & 3^5 &= 243 \end{aligned}$$

LEY DE UNIFORMIDAD

448

Esta ley puede enunciarse de dos modos equivalentes:

- 1) **Cualquier potencia de un número tiene un valor único o siempre igual.**

Así: $2^2 = 4$ siempre, $5^3 = 125$ siempre.

- 2) **Puesto que números iguales son el mismo número, se verifica que: Si los dos miembros de una igualdad se elevan a una misma potencia, resulta otra igualdad.**

Ejemplos

Siendo $a = 3$ se verifica que:

$$a^2 = 3^2 \text{ o sea } a^2 = 9$$

$$a^3 = 3^3 \text{ o sea } a^3 = 27$$

$$a^4 = 3^4 \text{ o sea } a^4 = 81, \text{ etc.}$$

y en general

$$a^n = 3^n$$

449

LEY DISTRIBUTIVA

La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y de la división exacta.

450

POTENCIA DE UN PRODUCTO. TEOREMA

Para elevar un producto a una potencia se eleva cada uno de los factores a dicha potencia y se multiplican estas potencias.

Sea el producto abc . Vamos a probar que: $(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

En efecto: elevar el producto abc a la n ésima potencia equivale a tomar este producto como factor n veces; luego:

$$\begin{aligned} (abc)^n &= \underbrace{(abc)(abc)(abc) \dots}_{n \text{ veces}} = \underbrace{abc \cdot abc \cdot abc \dots}_{n \text{ veces}} \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(b \cdot b \cdot b \dots)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(c \cdot c \cdot c \dots)}_{n \text{ veces}} \\ &= a^n \cdot b^n \cdot c^n \end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Esta propiedad constituye la ley distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación.

Ejemplos

$$1) (3 \times 4 \times 5)^2 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 9 \times 16 \times 25 = 3,600 \quad \text{R.}$$

$$2) (5ab)^3 = 5^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 125a^3b^3 \quad \text{R.}$$

190

Desarrollar, aplicando la regla anterior:

Ejercicio

$$1. (3 \times 5)^2$$

R. 225

$$2. (2 \times 3 \times 4)^2$$

R. 576

$$3. (3 \times 5 \times 6)^3$$

R. 729,000

$$4. (0.1 \times 0.3)^2$$

R. 0.0009

$$5. (0.1 \times 7 \times 0.03)^2$$

R. 0.000441

$$6. (3 \times 4 \times 0.1 \times 0.2)^3$$

R. 0.013824

$$7. \left(6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2$$

R. 4

$$8. \left(2 \times 0.5 \times \frac{1}{5}\right)^3$$

R. 0.008

$$9. (0.1 \times 0.2 \times 0.4)^4$$

R. 0.000000004096

$$10. \left(\frac{1}{4} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 6\right)^4$$

R. 81

$$11. \left(\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 0.01\right)^5$$

R. $\frac{1}{24,300,000}$

$$12. \left(\frac{5}{6} \times 1\frac{1}{5} \times 0.3 \times 6\frac{2}{3}\right)^6$$

R. 64

POTENCIA DE UN NÚMERO FRACCIONARIO. TEOREMA

451

Para elevar un cociente exacto o una fracción a una potencia cualquiera se elevan su numerador y denominador a dicha potencia.

Sea la fracción $\frac{a}{b}$. Vamos a demostrar que $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

En efecto: según la definición de potencia, elevar $\frac{a}{b}$ a la potencia n será tomarlo como factor n veces; luego:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots}_{n \text{ veces}} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \dots}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \dots}_{n \text{ veces}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Esta propiedad constituye la **ley distributiva de la potenciación respecto de la división exacta**.

1) Elevar $\left(\frac{4}{5}\right)^5$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{4^5}{5^5} = \frac{1,024}{3,125} \quad \text{R.}$$

Cuando se trate de elevar un *número mixto* a una potencia cualquiera, se reduce el número mixto a quebrado y se aplica la regla anterior.

2) Desarrollar $\left(3\frac{1}{2}\right)^4$

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{7}{2}\right)^4 = \frac{7^4}{2^4} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2,401}{16} = 150\frac{1}{16} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Desarrollar:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ R. $\frac{1}{4}$

2. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ R. $\frac{1}{16}$

3. $\left(\frac{5}{7}\right)^2$ R. $\frac{25}{49}$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ R. $\frac{1}{27}$

5. $\left(\frac{2}{5}\right)^4$ R. $\frac{16}{625}$

6. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ R. $\frac{1}{32}$

7. $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ R. $\frac{1}{729}$

8. $\left(\frac{1}{5}\right)^7$ R. $\frac{1}{78,125}$

9. $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ R. $\frac{243}{16,807}$

10. $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ R. $\frac{1}{1,048,576}$

11. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ R. $2\frac{1}{4}$

12. $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$ R. $12\frac{19}{27}$

13. $\left(4\frac{2}{3}\right)^3$ R. $101\frac{17}{27}$

14. $\left(1\frac{2}{5}\right)^4$ R. $3\frac{526}{625}$

15. $\left(1\frac{1}{8}\right)^5$ R. $1\frac{26,281}{32,768}$

16. $\left(2\frac{1}{2}\right)^5$ R. $97\frac{21}{32}$

17. $\left(3\frac{1}{3}\right)^6$ R. $1,371\frac{541}{729}$

18. $\left(1\frac{1}{5}\right)^6$ R. $2\frac{15,406}{15,625}$

19. $\left(2\frac{1}{4}\right)^4$ R. $25\frac{161}{256}$

20. $\left(1\frac{1}{2}\right)^8$ R. $25\frac{161}{256}$

191

Ejercicio

452

LEY DE MONOTONÍA

Si los dos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia que no sea cero, resulta una desigualdad del mismo sentido que la dada.

Ejemplos

1) Siendo $7 > 5$ resulta: $7^2 > 5^2$ o sea $49 > 25$
 $7^3 > 5^3$ o sea $343 > 125$
 $7^4 > 5^4$ o sea $2,401 > 625$ etc.
 y en general $7^n > 5^n$

2) Siendo $3 < 8$ resulta: $3^2 < 8^2$ o sea $9 < 64$
 $3^3 < 8^3$ o sea $27 < 512$
 $3^4 < 8^4$ o sea $81 < 4,096$, etc.
 y en general $3^n < 8^n$

192

Aplicar la ley de uniformidad en:

1. $x = 5$

2. $8 = 4 \times 2$

3. $10 \times 2 = 5 \times 4$

Aplicar la ley distributiva en:

4. $(3 \times 4)^2$

5. $(5 \times 6)^3$

6. $(2 \times 3 \times 4)^4$

7. $(m \cdot n \cdot p)^4$

Aplicar la ley distributiva en:

8. $(a \div b)^2$

9. $\left(\frac{b}{3}\right)^3$

10. $\left(\frac{m}{n}\right)^p$

11. Siendo $a > b$ se verifica por la ley de monotonía que... (Poner 3 ejemplos.)

12. Siendo $5 < 9$ se verifica por la ley de monotonía que... (Poner 3 ejemplos.)

Desarrollar aplicando las leyes adecuadas:

13. $(3a)^2$

16. $(bcde)^n$

19. $\left(\frac{a}{6}\right)^3$

22. $\left(\frac{3 \times 6}{9 \times 2}\right)^2$

14. $(8ab)^3$

17. $(2 \cdot 3 \cdot b)^5$

20. $\left(\frac{1}{x}\right)^8$

23. $\left(\frac{ab}{5cd}\right)^4$

15. $(amx)^4$

18. $\left(\frac{15}{3}\right)^2$

21. $\left(\frac{2 \times 8}{4}\right)^2$

24. $\left(\frac{8 \times 5 \times 6}{10 \times 2 \times 3}\right)^2$

Hallar por simple inspección, el resultado de:

25. $2^3 \cdot 5^3$

26. $50^4 \cdot 2^4$

27. $2^3 \cdot 5^3 \cdot 10^3$

453

CUADRADO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS. TEOREMA

El cuadrado de la suma indicada de dos números es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Sea la suma $(a + b)$. Vamos a demostrar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

En efecto: según la definición de potencia, elevar una cantidad cualquiera al cuadrado equivale a multiplicarla por sí misma; luego,

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Efectuando la multiplicación de estas dos sumas indicadas, como se vio al tratar de las operaciones indicadas (159), tendremos:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Elevar al cuadrado $(3 + 5)$.

$$(3 + 5)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64 \quad \text{R.}$$

2) Desarrollar $(0.25 + 3.41)^2$.

$$(0.25 + 3.41)^2 = 0.25^2 + 2 \times 0.25 \times 3.41 + 3.41^2 = 0.0625 + 1.705 + 11.6281 \\ = 13.3956 \quad \text{R.}$$

3) Desarrollar $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^2$.

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{49}{144} \quad \text{R.}$$

Desarrollar, aplicando la regla anterior:

- | | | | | | |
|---|--------------------|--|------------------------|--|----------------------------|
| 1. $(1 + 2)^2$ | R. 9 | 8. $\left(5 + \frac{1}{5}\right)^2$ | R. $27\frac{1}{25}$ | 15. $\left(0.001 + \frac{3}{100}\right)^2$ | R. $\frac{961}{1,000,000}$ |
| 2. $(6 + 9)^2$ | R. 225 | 9. $\left(6 + \frac{1}{6}\right)^2$ | R. $38\frac{1}{36}$ | 16. $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right)^2$ | R. $\frac{49}{100}$ |
| 3. $(5 + 11)^2$ | R. 256 | 10. $\left(0.1 + \frac{5}{6}\right)^2$ | R. $\frac{196}{225}$ | 17. $\left(1\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right)^2$ | R. $2\frac{1}{144}$ |
| 4. $(12 + 15)^2$ | R. 729 | 11. $\left(0.3 + \frac{2}{3}\right)^2$ | R. $\frac{841}{900}$ | 18. $\left(0.5 + 2\frac{1}{2}\right)^2$ | R. 9 |
| 5. $(30 + 42)^2$ | R. 5,184 | 12. $\left(3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4}\right)^2$ | R. $76\frac{9}{16}$ | 19. $\left(3\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)^2$ | R. 16 |
| 6. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2$ | R. $\frac{25}{36}$ | 13. $\left(1\frac{1}{3} + 2\frac{3}{5}\right)^2$ | R. $15\frac{106}{225}$ | 20. $(0.02 + 0.002)^2$ | R. 0.00048 |
| 7. $(0.5 + 3.8)^2$ | R. 18.49 | 14. $\left(8\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$ | R. $85\frac{9}{16}$ | 21. $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^2$ | R. 1.21 |

193

Ejercicio

ELEVAR AL CUADRADO UN ENTERO DESCOMPONIÉNDOLO EN DECENAS Y UNIDADES

454

De acuerdo con la regla demostrada en el número anterior, podemos decir que **el cuadrado de un número entero descompuesto en decenas y unidades es igual al cuadrado de**

las decenas, más el doble de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.

Ejemplos

1) $56^2 = (50 + 6)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 6 + 6^2 = 2,500 + 600 + 36 = 3,136$ R.

2) Elevar al cuadrado 123 descomponiéndolo en decenas y unidades.

$$123^2 = (120 + 3)^2 = 120^2 + 2 \times 120 \times 3 + 3^2 = 14,400 + 720 + 9 = 15,129$$
 R.

194

Elevar al cuadrado los siguientes números, descomponiéndolos en decenas y unidades:

Ejercicio

1. 15	R. 225	6. 97	R. 9,409	11. 536	R. 287,296
2. 23	R. 529	7. 109	R. 11,881	12. 621	R. 385,641
3. 56	R. 3,136	8. 131	R. 17,161	13. 784	R. 614,656
4. 89	R. 7,921	9. 281	R. 78,961	14. 3,142	R. 9,872,164
5. 93	R. 8,649	10. 385	R. 148,225	15. 4,132	R. 17,073,424

455

CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS. TEOREMA

El cuadrado de la diferencia indicada de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Sea la diferencia $(a - b)$. Vamos a demostrar que

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

En efecto: según la definición de potencia, elevar la diferencia $(a - b)$ al cuadrado equivale a multiplicarla por sí misma; luego:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Efectuando la multiplicación de estas dos diferencias indicadas, según se vio en las operaciones indicadas (162), tendremos:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Desarrollar $(8 - 6)^2$.

$$(8 - 6)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 6 + 6^2 = 64 - 96 + 36 = 64 + 36 - 96 = 4$$
 R.

2) Desarrollar $(0.2 - 0.04)^2$.

$$(0.2 - 0.04)^2 = 0.2^2 - 2 \times 0.2 \times 0.04 + 0.04^2 = 0.04 - 0.016 + 0.0016 = 0.0256$$
 R.

3) Desarrollar $\left(5\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^2$.

$$\left(5\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{17}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{17}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{17}{3} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{289}{9} - \frac{17}{9} + \frac{1}{36} = \frac{121}{4} = 30\frac{1}{4} \quad \text{R.}$$

Desarrollar, aplicando la regla anterior:

- | | | | | | |
|--|--------------------|--|--------------------------|---|---------------------|
| 1. $(9 - 7)^2$ | R. 4 | 8. $\left(15 - \frac{3}{5}\right)^2$ | R. $207\frac{9}{25}$ | 15. $\left(8\frac{2}{5} - 3.2\right)^2$ | R. $27\frac{1}{25}$ |
| 2. $(50 - 2)^2$ | R. 2,304 | 9. $\left(20 - \frac{7}{40}\right)^2$ | R. $393\frac{49}{1,600}$ | 16. $\left(3\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2$ | R. $7\frac{9}{16}$ |
| 3. $(18.1 - 7)^2$ | R. 123.21 | 10. $(0.7 - 0.003)^2$ | R. 0.485809 | 17. $\left(\frac{1}{5} - 0.1\right)^2$ | R. 0.01 |
| 4. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2$ | R. $\frac{1}{144}$ | 11. $\left(2.14 - \frac{5}{4}\right)^2$ | R. 0.7921 | 18. $\left(6\frac{3}{5} - 5\frac{7}{20}\right)^2$ | R. $1\frac{9}{16}$ |
| 5. $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)^2$ | R. $\frac{1}{64}$ | 12. $\left(2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}\right)^2$ | R. $1\frac{9}{16}$ | 19. $\left(\frac{15}{2} - 6\frac{1}{4}\right)^2$ | R. $1\frac{9}{16}$ |
| 6. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)^2$ | R. $\frac{1}{4}$ | 13. $\left(5\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^2$ | R. 25 | 20. $(0.02 - 0.001)^2$ | R. 0.000361 |
| 7. $\left(8 - \frac{1}{2}\right)^2$ | R. $56\frac{1}{4}$ | 14. $\left(7\frac{1}{3} - 3\frac{1}{6}\right)^2$ | R. $17\frac{13}{36}$ | 21. $\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2$ | R. 0.81 |

195

Ejercicio

CUBO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS. TEOREMA

456

El cubo de la suma indicada de dos números es igual al cubo del primero, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Sea la suma $(a + b)$. Vamos a demostrar que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

En efecto: según la definición de potencia elevar una cantidad al cubo equivale a tomarla como factor tres veces; luego:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

Teniendo presente que $(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, tendremos:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

(efectuando la multiplicación de estas sumas indicadas)

$$= a^2 \cdot a + 2a^2 \cdot b + b^2 \cdot a + a^2 \cdot b + 2a \cdot b^2 + b^2 \cdot b = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

que era lo que queríamos demostrar.

1) Desarrollar $(2 + 5)^3$.

$$(2 + 5)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times 5 + 3 \times 2 \times 5^2 + 5^3 = 8 + 60 + 150 + 125 = 343 \quad \text{R.}$$

Ejemplos

2) Desarrollar $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\right)^3$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\right)^3 &= \left(\frac{3}{5}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{27}{125} + \frac{9}{50} + \frac{1}{20} + \frac{1}{216} = \frac{12,167}{27,000} \quad \text{R.}\end{aligned}$$

196

Aplicando la regla anterior, desarrollar:

Ejercicio

- | | | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------------|--|-----------------------|
| 1. $(3 + 4)^3$ | R. 343 | 8. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^3$ | R. $\frac{343}{1,728}$ | 15. $\left(3\frac{1}{5} + 1\right)^3$ | R. $74\frac{11}{125}$ |
| 2. $(5 + 7)^3$ | R. 1,728 | 9. $\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right)^3$ | R. $10\frac{37}{216}$ | 16. $\left(2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^3$ | R. 27 |
| 3. $(2 + 9)^3$ | R. 1,331 | 10. $(0.04 + 0.1)^3$ | R. 0.002744 | 17. $\left(5\frac{1}{4} + 4\frac{3}{4}\right)^3$ | R. 1,000 |
| 4. $(4 + 0.1)^3$ | R. 68.921 | 11. $\left(\frac{1}{5} + 0.3\right)^3$ | R. $\frac{1}{8}$ | 18. $\left(6\frac{1}{8} + 0.875\right)^3$ | R. 343 |
| 5. $(3 + 0.2)^3$ | R. 32.768 | 12. $\left(2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{5}\right)^3$ | R. $48\frac{5,017}{8,000}$ | 19. $\left(4\frac{1}{2} + 1\right)^3$ | R. $166\frac{3}{8}$ |
| 6. $(5 + 0.02)^3$ | R. 126.506008 | 13. $\left(3\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^3$ | R. $52\frac{47}{64}$ | 20. $\left(0.02 + \frac{1}{100}\right)^3$ | R. 0.000027 |
| 7. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^3$ | R. $\frac{125}{216}$ | 14. $\left(5 + \frac{5}{6}\right)^3$ | R. $198\frac{107}{216}$ | 21. $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^3$ | R. 1.331 |

457

ELEVAR AL CUBO UN NÚMERO ENTERO DESCOMPONIÉNDOLO EN DECENAS Y UNIDADES

De acuerdo con la regla demostrada en el número anterior, podemos decir que el cubo de un número entero descompuesto en decenas y unidades es igual al cubo de las decenas, más el triple del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triple de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.

Ejemplos

- 1) $24^3 = (20 + 4)^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times 4 + 3 \times 20 \times 4^2 + 4^3$
 $= 8,000 + 4,800 + 960 + 64 = 13,824 \quad \text{R.}$
- 2) $152^3 = (150 + 2)^3 = 150^3 + 3 \times 150^2 \times 2 + 3 \times 150 \times 2^2 + 2^3$
 $= 3,375,000 + 135,000 + 1,800 + 8 = 3,511,808 \quad \text{R.}$

197

Elevar al cubo, descomponiendo en decenas y unidades:

Ejercicio

- | | | | | | |
|-------|------------|---------|--------------|-----------|-------------------|
| 1. 15 | R. 3,375 | 6. 97 | R. 912,673 | 11. 281 | R. 22,188,041 |
| 2. 23 | R. 12,167 | 7. 109 | R. 1,295,029 | 12. 385 | R. 57,066,625 |
| 3. 56 | R. 175,616 | 8. 131 | R. 2,248,091 | 13. 536 | R. 153,990,656 |
| 4. 89 | R. 704,969 | 9. 153 | R. 3,581,577 | 14. 872 | R. 663,054,848 |
| 5. 93 | R. 804,357 | 10. 162 | R. 4,251,528 | 15. 4,132 | R. 70,547,387,968 |

CUBO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS. TEOREMA

458

El cubo de la diferencia indicada de dos números es igual al cubo del primero, menos el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

Sea la diferencia $(a - b)$. Vamos a demostrar que

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

En efecto: según la definición de potencia, elevar $(a - b)$ al cubo equivale a tomar esta diferencia tres veces como factor, o sea:

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$$

Teniendo presente que

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \text{ tendremos:}$$

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

(efectuando esta multiplicación indicada)

$$= a^2 \cdot a - 2a^2 \cdot b + b^2 \cdot a - a^2 \cdot b + 2a \cdot b^2 - b^2 \cdot b = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

que era lo que queríamos demostrar.

1) Elevar al cubo $(10 - 4)$.

$$(10 - 4)^3 = 10^3 - 3 \times 10^2 \times 4 + 3 \times 10 \times 4^2 - 4^3 = 1,000 - 1,200 + 480 - 64 = 216 \quad \text{R.}$$

2) Desarrollar $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3$.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Aplicando la regla anterior, desarrollar:

- | | | | | | |
|---|----------------------|--|-------------------------|--|-----------------------|
| 1. $(8 - 3)^3$ | R. 125 | 8. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)^3$ | R. $\frac{125}{1,728}$ | 15. $\left(4\frac{3}{4} - \frac{19}{4}\right)^3$ | R. 0 |
| 2. $(15 - 7)^3$ | R. 512 | 9. $\left(\frac{7}{4} - \frac{2}{3}\right)^3$ | R. $1\frac{469}{1,728}$ | 16. $\left(4\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^3$ | R. 64 |
| 3. $(20 - 3)^3$ | R. 4,913 | 10. $(3.6 - 2.1)^3$ | R. 3.375 | 17. $\left(6\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\right)^3$ | R. $2\frac{10}{27}$ |
| 4. $(3 - 0.1)^3$ | R. 24.389 | 11. $\left(\frac{3}{5} - 0.3\right)^3$ | R. $\frac{27}{1,000}$ | 18. $\left(1\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)^3$ | R. $1\frac{217}{512}$ |
| 5. $(4 - 0.2)^3$ | R. 54.872 | 12. $\left(3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6}\right)^3$ | R. $10\frac{37}{216}$ | 19. $\left(2.02 - 1\frac{1}{50}\right)^3$ | R. 1 |
| 6. $(6 - 0.03)^3$ | R. 212.776173 | 13. $\left(7\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^3$ | R. $307\frac{35}{64}$ | 20. $\left(5\frac{2}{5} - \frac{4}{10}\right)^3$ | R. 125 |
| 7. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)^3$ | R. $\frac{8}{3,375}$ | 14. $\left(5 - \frac{5}{7}\right)^3$ | R. $78\frac{240}{343}$ | 21. $\left(1 - \frac{1}{10}\right)^3$ | R. 0.729 |

198

Ejercicio

459

DIFERENCIA DE LOS CUADRADOS DE DOS NÚMEROS ENTEROS CONSECUTIVOS. TEOREMA

La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al doble del menor, más la unidad.

Sean los números enteros consecutivos N y $N + 1$. Vamos a demostrar que $(N + 1)^2 - N^2 = 2N + 1$.

En efecto: $(N + 1)^2 - N^2 = (N^2 + 2 \cdot N \cdot 1 + 1^2) - N^2 = 2N + 1$
que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

Hallar la diferencia de los cuadrados de 12 y 11:

$$12^2 - 11^2 = 2 \times 11 + 1 = 23 \quad \text{R.}$$

199

Hallar la diferencia de los cuadrados de:

Ejercicio

- | | | | | |
|----------|------------|------------|---------------|-------------------|
| 1. 2 y 3 | 4. 10 y 11 | 7. 20 y 21 | 10. 50 y 51 | 13. 400 y 401 |
| 2. 5 y 6 | 5. 12 y 13 | 8. 23 y 24 | 11. 62 y 63 | 14. 890 y 891 |
| 3. 8 y 9 | 6. 15 y 16 | 9. 30 y 31 | 12. 101 y 102 | 15. 1,002 y 1,003 |

460

MANERA DE HALLAR EL CUADRADO DE UN NÚMERO CUANDO SE CONOCE EL CUADRADO DEL NÚMERO ANTERIOR

Cuando queremos averiguar el cuadrado de un número conociendo el cuadrado del anterior, bastará añadirle a este cuadrado el doble de dicho número anterior más una unidad.

Así, si queremos hallar el cuadrado de 13, sabiendo que $12^2 = 144$, haremos lo siguiente:

$$13^2 = 144 + 2 \times 12 + 1 = 144 + (24 + 1) = 169 \quad \text{R.}$$

200

Ejercicio

- | | | | |
|--------------------------|-----|--------------|------------------|
| 1. Hallar el cuadrado de | 8 | sabiendo que | $7^2 = 49$ |
| 2. " " " " | 12 | " " | $11^2 = 121$ |
| 3. " " " " | 15 | " " | $14^2 = 196$ |
| 4. " " " " | 21 | " " | $20^2 = 400$ |
| 5. " " " " | 18 | " " | $17^2 = 289$ |
| 6. " " " " | 32 | " " | $31^2 = 961$ |
| 7. " " " " | 57 | " " | $56^2 = 3,136$ |
| 8. " " " " | 74 | " " | $73^2 = 5,329$ |
| 9. " " " " | 102 | " " | $101^2 = 10,201$ |

461

DIFERENCIA DE LOS CUBOS DE DOS NÚMEROS ENTEROS CONSECUTIVOS. TEOREMA

La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triple del cuadrado del menor, más el triple del menor, más la unidad.

Sean los números enteros consecutivos N y $N + 1$. Vamos a demostrar que: $(N + 1)^3 - N^3 = 3N^2 + 3N + 1$.

En efecto: $(N + 1)^3 - N^3 = (N^3 + 3 \cdot N^2 \cdot 1 + 3 \cdot N \cdot 1^2 + 1^3) - N^3 = 3N^2 + 3N + 1$ que era lo que queríamos demostrar.

Hallar la diferencia de los cubos de 7 y 8.

$$8^3 - 7^3 = 3 \times 7^2 + 3 \times 7 + 1 = 147 + 21 + 1 = 169 \quad \text{R.}$$

Ejemplo

Aplicando la regla anterior, hallar la diferencia de los cubos de:

- | | | | |
|-----------|------------|------------|---------------|
| 1. 2 y 3 | 4. 10 y 11 | 7. 20 y 21 | 10. 100 y 101 |
| 2. 4 y 5 | 5. 13 y 14 | 8. 30 y 31 | 11. 201 y 202 |
| 3. 9 y 10 | 6. 17 y 18 | 9. 50 y 51 | 12. 500 y 501 |

201

Ejercicio

MANERA DE HALLAR EL CUBO DE UN NÚMERO CUANDO SE CONOCE EL CUBO DEL NÚMERO ANTERIOR

462

Cuando queremos averiguar el cubo de un número conociendo el cubo del número anterior, bastará sumarle a este cubo el triple del cuadrado de dicho número anterior, más el triple del mismo número, más la unidad.

Así, si queremos hallar el cubo de 14, sabiendo que $13^3 = 2,197$, haremos lo siguiente:

$$14^3 = 2,197 + 3 \times 13^2 + 3 \times 13 + 1 = 2,197 + (507 + 39 + 1) = 2,744 \quad \text{R.}$$

- | | | |
|----------------------|----------------|---------------------|
| 1. Hallar el cubo de | 3 sabiendo que | $2^3 = 8$ |
| 2. " " " " | 4 " " | $3^3 = 27$ |
| 3. " " " " | 7 " " | $6^3 = 216$ |
| 4. " " " " | 10 " " | $9^3 = 729$ |
| 5. " " " " | 11 " " | $10^3 = 1,000$ |
| 6. " " " " | 14 " " | $13^3 = 2,197$ |
| 7. " " " " | 18 " " | $17^3 = 4,913$ |
| 8. " " " " | 31 " " | $30^3 = 27,000$ |
| 9. " " " " | 101 " " | $100^3 = 1,000,000$ |

202

Ejercicio

POTENCIA DE POTENCIA. TEOREMA

463

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base, poniéndole por exponente el producto de los exponentes.

Sea la potencia a^m . Vamos a demostrar que $(a^m)^n = a^{mn}$.

En efecto: elevar a^m a la potencia n , significa que a^m se toma como factor n veces; luego,

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \dots}^{n \text{ veces}} = \overbrace{a^{m \times m \times m \times \dots}}^{n \text{ veces}} = a^{mn}, \text{ que era lo que queríamos demostrar.}$$

Ejemplo

Desarrollar $(2^3)^4$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4,096 \quad \text{R.}$$

203

Desarrollar:

Ejercicio

- | | | | |
|--|-----------------------|--|----------------------------|
| 1. $(2^2)^2$ | R. 16 | 11. $(a^3)^x$ | R. a^{3x} |
| 2. $(2^2)^3$ | R. 64 | 12. $(x^a)^2$ | R. x^{2a} |
| 3. $(2^3)^4$ | R. 4,096 | 13. $[(2 \times 3)^2]^2$ | R. 1,296 |
| 4. $(3^3)^4$ | R. 531,441 | 14. $[(abc)^3]^4$ | R. $a^{12}b^{12}c^{12}$ |
| 5. $(1^3)^5$ | R. 1 | 15. $\left[\left(\frac{m}{n}\right)^4\right]^5$ | R. $\frac{m^{20}}{n^{20}}$ |
| 6. $(5^2)^3$ | R. 15,625 | 16. $[(0.2^2)^2]^4$ | R. 0.000000000065536 |
| 7. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$ | R. $\frac{1}{64}$ | 17. $[(0.3^2)^3]^2$ | R. 0.000000531441 |
| 8. $(0.01^2)^3$ | R. 0.000000000001 | 18. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$ | R. $\frac{64}{729}$ |
| 9. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^4$ | R. $\frac{1}{65,536}$ | 19. $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3$ | R. $\frac{729}{15,625}$ |
| 10. $[(3^2)^3]^2$ | R. 531,441 | 20. $\left[\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2\right]^2$ | R. $\frac{256}{6,561}$ |

464

AGRUPACIÓN DE LOS CASOS ESTUDIADOS

En algunas expresiones pueden reunirse dos o más de los casos de elevación a potencias estudiados. Por ser de interés esta materia, resolveremos los siguientes

Ejemplos

1) Desarrollar $\left(\frac{2 \times 0.3 \times 5}{0.1 \times 3 \times 0.2}\right)^2$

$$\left(\frac{2 \times 0.3 \times 5}{0.1 \times 3 \times 0.2}\right)^2 \times = \frac{(2 \times 0.3 \times 5)^2}{(0.1 \times 3 \times 0.2)^2} = \frac{2^2 \times 0.3^2 \times 5^2}{0.1^2 \times 3^2 \times 0.2^2} = \frac{4 \times 0.09 \times 25}{0.01 \times 9 \times 0.04} = \frac{9}{0.0036} = 2,500 \quad \text{R.}$$

2) Desarrollar $\left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}}\right)^2$

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{16}{9} \times \frac{1}{25}}{\frac{4}{25} \times \frac{16}{25}} = \frac{\frac{16}{900}}{\frac{64}{625}} = \frac{25}{144} \quad \text{R.}$$

3) Desarrollar $\left[\frac{2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right]^2$

$$\left[\frac{2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right]^2 = \left[\frac{2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right]^2 = \frac{(2^3)^2 \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2}{(3^2)^2 \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2} = \frac{2^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6}{3^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{64 \times \frac{1}{64}}{81 \times \frac{16}{81}} = \frac{1}{16} \quad \text{R.}$$

1. $\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$ R. $\frac{1}{4}$

2. $\left(\frac{0.2 \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}\right)^3$ R. $\frac{64}{125}$

3. $\left(\frac{2^2 \times 3^5 \times 4^2}{2^4 \times 3^2}\right)^2$ R. 11,664

4. $\left[\left(\frac{ab}{c}\right)^5\right]^6$ R. $\frac{a^{30}b^{30}}{c^{30}}$

5. $\left[\left(\frac{ax}{bm}\right)^4\right]^3$ R. $\frac{a^{12}x^{12}}{b^{12}m^{12}}$

6. $\frac{(2^2)^3 \times (3^3)^2}{(3^2)^3 \times (2^3)^4}$ R. $\frac{1}{64}$

7. $\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2$ R. 4

8. $\frac{[(2^3)^3]^2}{(4^3)^2}$ R. 64

9. $\left(\frac{2a^2b^2}{x^3}\right)^2$ R. $\frac{4a^4b^4}{x^6}$

10. $\left(\frac{3 \times 0.3 \times 10}{2 \times 0.2 \times 20}\right)^2$ R. $1\frac{17}{64}$

11. $\left(\frac{\frac{3}{4} \times 4 \times \frac{1}{6}}{\frac{5}{6} \times 6 \times \frac{1}{10}}\right)^3$ R. 1

12. $\left[\frac{3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2$ R. 81

204

Ejercicio

CUADRADO PERFECTO

465

Un número es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de otro número. Así, 9 es cuadrado perfecto porque $3^2 = 9$; 81 es cuadrado perfecto porque $9^2 = 81$.

El único número que es el cuadrado de él mismo es 1.

Todo número cuadrado perfecto tiene raíz cuadrada exacta, que será el número del cual él es el cuadrado.

CONDICIÓN DE RACIONALIDAD

466

Para que un número sea cuadrado perfecto es necesario que todos sus factores primos estén elevados a exponentes pares.

En efecto: elevar un número al cuadrado es lo mismo que elevar al cuadrado el producto de sus factores primos, y al hacer esta operación el exponente de cada factor primo se multiplica por 2; luego queda par.

Así, al elevar $24 = 2^3 \cdot 3$ al cuadrado, tenemos:

$$24^2 = (2^3 \cdot 3)^2 = (2^3)^2 \cdot 3^2 = 2^6 \cdot 3^2, \text{ exponentes pares.}$$

Al elevar $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ al cuadrado, tenemos:

$$60^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = (2^2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2, \text{ exponentes pares.}$$

467

CARACTERES DE EXCLUSIÓN DE CUADRADOS PERFECTOS

Son ciertas señales de los números que nos permiten afirmar, por simple inspección, que el número que tenga alguna de ellas, **no es cuadrado perfecto**, o sea, **que no tiene raíz cuadrada exacta**.

Enumeraremos los principales caracteres de exclusión de cuadrados perfectos.

No son cuadrados perfectos:

- 1) Los números que contengan algún factor primo elevado a un exponente impar.

Ejemplo

El número 108 no es cuadrado perfecto porque descompuesto en sus factores primos da $108 = 2^2 \times 3^3$, y vemos que el exponente del factor primo 3 es impar.

- 2) Los números terminados en 2, 3, 7 u 8.

Ejemplo

152, 273, 867 y 1,048 no son cuadrados perfectos por terminar respectivamente en 2, 3, 7 y 8.

- 3) Los números terminados en 5 cuya cifra de las decenas no sea 2.

Ejemplo

345 no es cuadrado perfecto, porque termina en 5 y la cifra de las decenas no es 2, sino 4.

- 4) Los números que siendo divisibles entre un factor primo no lo sean entre su cuadrado.

Ejemplo

134 no es cuadrado perfecto porque es divisible entre 2 y no lo es entre el cuadrado de 2, 4; 567 no tiene raíz cuadrada exacta porque es divisible entre 7 y no lo es entre el cuadrado de 7, 49.

5) Los números enteros terminados en un número impar de ceros.

5,000 no es cuadrado perfecto porque termina en tres ceros.

Ejemplo

6) Los números pares que no sean divisibles entre 4.

1,262 no tiene raíz cuadrada exacta porque es par y no es divisible entre 4.

Ejemplo

7) Los números impares que, disminuidos en una unidad, no son divisibles entre 4.

1,131 no es cuadrado perfecto porque disminuyéndolo en una unidad queda 1,130 y este número no es divisible entre 4.

Ejemplo

8) Los números decimales terminados en un número impar de cifras decimales.

3.786 no es cuadrado perfecto porque tiene tres cifras decimales.

Ejemplo

NOTA

Estas señales indican que el número que tenga alguna de ellas *no es cuadrado perfecto*, pero por el solo hecho de que un número no tenga ninguna de estas señales con excepción de la primera, *no podemos afirmar que sea cuadrado perfecto*. Un número que no tenga ninguna de estas señales será cuadrado perfecto si cumple la *condición general de racionalidad (466)* de que descompuesto en sus factores primos, *todos los exponentes de estos factores sean pares*.

Así, 425 termina en 5 y la cifra de sus decenas es 2 y, sin embargo, no es cuadrado perfecto porque $425 = 5^2 \times 17$ y aquí vemos que el exponente del factor primo 17 es impar, la unidad.

CUBO PERFECTO

Un número es cubo perfecto cuando es el cubo de otro número. Así, 64 es cubo perfecto porque $4^3 = 64$; 729 es cubo perfecto porque $9^3 = 729$.

El único número que es el cubo de él mismo es 1.

Todo número cubo perfecto tiene raíz cúbica exacta.

469

CONDICIÓN DE RACIONALIDAD

Para que un número dado sea cubo perfecto es necesario que todos sus factores estén elevados a exponentes múltiplos de 3.

En efecto: elevar un número al cubo es lo mismo que elevar al cubo el producto de sus factores primos, y al realizar esta operación el exponente de cada factor primo se multiplica por 3; luego queda múltiplo de 3.

Así, al elevar $12 = 2^2 \cdot 3$ al cubo, tenemos:

$$12^3 = (2^2 \cdot 3)^3 = (2^2)^3 \cdot 3^3 = 2^6 \cdot 3^3, \text{ exponentes múltiplos de 3.}$$

470

CARACTERES DE EXCLUSIÓN DE CUBOS PERFECTOS

Son ciertas señales de los números que nos permiten afirmar, por simple inspección, que el número que tenga algunas de ellas, **no es cubo perfecto**, o sea, **que no tiene raíz cúbica exacta**.

Enumeraremos los principales caracteres de exclusión de cubos perfectos.

No son cubos perfectos:

- 1) Los números que contengan algún factor primo elevado a un exponente que no sea múltiplo de 3.

Ejemplo

El número 5,400 no es cubo perfecto porque descompuesto en sus factores primos da $5,400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$, y vemos que el exponente del factor primo 5 no es múltiplo de 3.

- 2) Los números que siendo divisibles entre un factor primo no lo sean entre su cubo.

Ejemplo

3,124 no es cubo perfecto porque es divisible entre 2 y no lo es entre el cubo de 2, 8, 8,600 no es cubo perfecto porque es divisible entre el factor primo 5 y no lo es entre el cubo de 5, 125.

- 3) Los números enteros terminados en un número de ceros que no sea múltiplo de 3.

Ejemplo

400 no es cubo perfecto porque termina en un número de ceros que no es múltiplo de 3.

- 4) Los números pares que no sean divisibles entre 8.

116 no es cubo perfecto porque es par y no es divisible entre 8.

Ejemplo

5) Los números impares que disminuidos en una unidad no sean divisibles entre 8.

2,135 no es cubo perfecto, porque disminuyéndolo en una unidad queda 2,134 y este número no es divisible entre 8.

Ejemplo

6) Los números decimales terminados en un número de cifras decimales que no sea múltiplo de 3.

0.0067 no es cubo perfecto porque tiene cuatro cifras decimales y este número de cifras no es múltiplo de 3.

Ejemplo

OBSERVACIÓN

Estas señales indican que el número que tenga alguna de ellas *no es cubo perfecto*, pero por el solo hecho de que un número no tenga ninguna de estas señales, con excepción de la primera, *no podemos afirmar que sea cubo perfecto*.

Un número que no tenga ninguna de estas señales será cubo perfecto si cumple la **condición general de racionalidad (469)** de que descompuesto en sus factores primos, **todos los exponentes de estos factores sean múltiplos de 3**.

5,000 es divisible entre 2 y entre el cubo de 2, 8 y termina en un número de ceros múltiplo de 3, pero no es cubo perfecto porque descompuesto en sus factores primos da $5,000 = 2^3 \cdot 5^4$ y aquí vemos que el exponente del factor primo 5 no es múltiplo de 3.

Ejemplo

Decir si los números siguientes son o no cuadrados perfectos y por qué:

- | | | | |
|----------|-----------|-------------|------------|
| 1. 108 | 4. 13.352 | 7. 900 | 10. 70,000 |
| 2. 325 | 5. 400 | 8. 256 | 11. 8,400 |
| 3. 5,000 | 6. 530 | 9. 19. 2963 | 12. 1,425 |

Decir si los números siguientes son o no cubos perfectos y por qué:

- | | | |
|-----------|------------|-----------|
| 13. 324 | 16. 512 | 19. 18.56 |
| 14. 3,000 | 17. 70,000 | 20. 540 |
| 15. 0.532 | 18. 729 | 21. 1,331 |

205

Ejercicio



La palabra "raíz" viene del latín *radix*, *radicis*; pero es indudable que los árabes conocían la radicación, que habían tomado de los indios. Es decir, que la radicación era conocida mucho antes de que los romanos inventaran una palabra para

nombrarla. Los árabes la designaban con la palabra *gidr*, una traducción de la palabra sánscrita *mula*, que significa vegetal y también raíz cuadrada de un número.

Capítulo **XXXI**

RADICACIÓN

471 LEYES DE LA RADICACIÓN

Las leyes de la radicación son dos: la ley de uniformidad y la ley distributiva.

472 I. LEY DE UNIFORMIDAD

Esta ley puede enunciarse de dos modos:

1) La raíz de un grado dado de un número tiene un valor único o siempre es igual.

Así: $\sqrt{49} = 7$ únicamente, porque 7 es el único número que elevado al cuadrado da 49.

2) Puesto que números iguales son el mismo número, podemos decir:

Si a los dos miembros de una igualdad se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

Ejemplos

1) Siendo $a = 25$ se tendrá $\sqrt{a} = \sqrt{25}$ o sea $\sqrt{a} = 5$.

2) Siendo $m = n$ se tendrá $\sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{n}$.

3) Siendo $x^2 = 81$ se tendrá $\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$ o sea $x = 9$.

II. LEY DISTRIBUTIVA

473

La radicación no es distributiva con relación a la suma y a la resta. Así

$$\sqrt{36 + 64} \text{ no es igual a } \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

porque: $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ y $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$

Igualmente: $\sqrt{25 - 9}$ no es igual a $\sqrt{25} - \sqrt{9}$

porque: $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$

La radicación es distributiva con relación a la multiplicación y a la división.

RAÍZ DE UN PRODUCTO INDICADO. TEOREMA

474

La raíz de cualquier grado de un producto indicado de varios factores es igual al producto de las raíces del mismo grado de cada uno de los factores.

Sea el producto $a \cdot b \cdot c$. Vamos a demostrar que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

En efecto: según la definición de raíz, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ será la raíz enésima de $a \cdot b \cdot c$ si elevada a la potencia n reproduce el producto $a \cdot b \cdot c$.

Elevando la raíz a la enésima potencia, tendremos:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n \times (\sqrt[n]{c})^n = a \cdot b \cdot c$$

Luego queda demostrado lo que nos proponíamos.

Esta propiedad es la **ley distributiva de la radicación con relación a la multiplicación**.

1) $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$ R.

2) $\sqrt{1 \times 16 \times 25} = \sqrt{1} \times \sqrt{16} \times \sqrt{25} = 1 \times 4 \times 5 = 20$ R.

Ejemplos

Efectuar:

1. $\sqrt{4 \times 25}$

R. 10

4. $\sqrt{4 \times 25 \times 36}$

R. 60

7. $\sqrt[3]{1 \times 64 \times 125}$

R. 20

2. $\sqrt{9 \times 16}$

R. 12

5. $\sqrt{64 \times 81 \times 100}$

R. 720

8. $\sqrt[3]{8 \times 27 \times 216}$

R. 36

3. $\sqrt{36 \times 49}$

R. 42

6. $\sqrt[3]{8 \times 27}$

R. 6

Ejercicio

206

RAÍZ DE UN NÚMERO FRACCIONARIO. TEOREMA

475

La raíz de cualquier grado de un cociente exacto o un quebrado es igual a la raíz de dicho grado del numerador dividida entre la raíz del mismo grado del denominador.

Sea la fracción $\frac{a}{b}$. Vamos a demostrar que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

En efecto: según la definición de raíz, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ será la raíz enésima de $\frac{a}{b}$, si elevada a la potencia n reproduce el quebrado $\frac{a}{b}$.

Elevemos $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ a la potencia enésima y tendremos: $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$ luego, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ es la raíz enésima de $\frac{a}{b}$.

Esta propiedad es la **ley distributiva de la radicación en relación con la división exacta**.

Ejemplos

$$1) \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{R.}$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} \quad \text{R.}$$

207

Aplicar la ley distributiva:

Ejercicio

$$1. \sqrt{9 \div 4} \quad \text{R. } \frac{3}{2}$$

$$3. \sqrt{1 \div 36} \quad \text{R. } \frac{1}{6}$$

$$5. \sqrt[3]{8 \div 27} \quad \text{R. } \frac{2}{3}$$

$$2. \sqrt{\frac{16}{25}} \quad \text{R. } \frac{4}{5}$$

$$4. \sqrt{\frac{49}{81}} \quad \text{R. } \frac{7}{9}$$

$$6. \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \quad \text{R. } \frac{1}{4}$$

476

RAÍZ DE UNA POTENCIA. TEOREMA

La raíz de cualquier grado de una potencia se obtiene dividiendo el exponente de la potencia entre el índice de la raíz.

Sea la potencia a^m . Vamos a demostrar que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

En efecto: según la definición de raíz, $a^{\frac{m}{n}}$ será la raíz enésima de a^m si elevada a la potencia n reproduce la cantidad subradical a^m .

Elevando $a^{\frac{m}{n}}$ a la potencia n según lo demostrado en potencia de potencia (463), tendremos:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

luego, queda demostrado lo que nos proponíamos.

Ejemplos

$$1) \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4 \quad \text{R.}$$

$$2) \sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8 \quad \text{R.}$$

$$3) \sqrt{2^4 \times 5^4} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{5^4} = 2^{\frac{4}{2}} \times 5^{\frac{4}{2}} = 2^2 \times 5^2 = 100 \quad \text{R.}$$

Efectuar:

- | | | | | | |
|-----------------|--------|--------------------|--------|------------------------|--------|
| 1. $\sqrt{2^6}$ | R. 8 | 5. $\sqrt{3^{12}}$ | R. 729 | 9. $\sqrt[3]{2^{15}}$ | R. 32 |
| 2. $\sqrt{3^4}$ | R. 9 | 6. $\sqrt[3]{4^3}$ | R. 4 | 10. $\sqrt[4]{2^8}$ | R. 4 |
| 3. $\sqrt{5^6}$ | R. 125 | 7. $\sqrt[3]{2^6}$ | R. 4 | 11. $\sqrt[5]{3^{15}}$ | R. 27 |
| 4. $\sqrt{2^8}$ | R. 16 | 8. $\sqrt[3]{5^9}$ | R. 125 | 12. $\sqrt[6]{5^{24}}$ | R. 625 |

208

Ejercicio

Efectuar:

- | | | | | | |
|----------------------------|--------|--|----------|--|--------|
| 1. $\sqrt{2^2 \times 3^2}$ | R. 6 | 5. $\sqrt{5^2 \times 6^2 \times 3^4}$ | R. 270 | 9. $\sqrt[3]{2^6 \times 3^3 \times 5^6}$ | R. 300 |
| 2. $\sqrt{2^4 \times 3^4}$ | R. 36 | 6. $\sqrt{2^{10} \times 3^2 \times 5^4}$ | R. 2,400 | 10. $\sqrt[4]{2^8 \times 3^4}$ | R. 12 |
| 3. $\sqrt{2^6 \times 3^4}$ | R. 72 | 7. $\sqrt[3]{2^6 \times 3^9}$ | R. 108 | 11. $\sqrt[5]{2^{10} \times 3^{15}}$ | R. 108 |
| 4. $\sqrt{2^8 \times 3^6}$ | R. 432 | 8. $\sqrt[3]{2^9 \times 3^{12}}$ | R. 648 | 12. $\sqrt[6]{2^{18} \times 3^{24}}$ | R. 648 |

209

Ejercicio

EXPONENTE FRACCIONARIO. SU ORIGEN

477

Hemos visto en el número anterior que para extraer una raíz a una potencia, se divide el exponente de la potencia entre el índice de la raíz. Si el exponente no es divisible entre el índice, hay que dejar indicada la división, originándose de este modo el exponente fraccionario.

- 1) $\sqrt{2} = \sqrt{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$ R.
- 2) $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$ R.
- 3) $\sqrt[4]{3^2 \times 5^3} = \sqrt[4]{3^2} \times \sqrt[4]{5^3} = 3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{3}{4}}$ R.

Ejemplos

Expresar con exponente fraccionario:

- | | | | | | |
|--------------------|----------------------|---------------------|-----------------------|---|--|
| 1. $\sqrt{3}$ | R. $3^{\frac{1}{2}}$ | 5. $\sqrt[6]{3^3}$ | R. $3^{\frac{1}{2}}$ | 9. $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{3^2}$ | R. $5^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ |
| 2. $\sqrt[3]{5^2}$ | R. $5^{\frac{2}{3}}$ | 6. $\sqrt[7]{2^5}$ | R. $2^{\frac{5}{7}}$ | 10. $\sqrt{3 \times 5}$ | R. $2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ |
| 3. $\sqrt[4]{2^3}$ | R. $2^{\frac{3}{4}}$ | 7. $\sqrt[8]{2^4}$ | R. $2^{\frac{1}{2}}$ | 11. $\sqrt[3]{2 \times 3^2}$ | R. $2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ |
| 4. $\sqrt[5]{2^4}$ | R. $2^{\frac{4}{5}}$ | 8. $\sqrt[11]{7^5}$ | R. $7^{\frac{5}{11}}$ | 12. $\sqrt[5]{2^3 \times 3^4 \times 5^2}$ | R. $2^{\frac{3}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}} \times 5^{\frac{2}{5}}$ |

210

Ejercicio

INTERPRETACIÓN DEL EXPONENTE FRACCIONARIO

478

Hemos visto en el número anterior que el exponente fraccionario proviene de extraer una raíz a una potencia, cuando el exponente de la potencia no es divisible entre el índice de la raíz, así que $a^{\frac{2}{3}}$ proviene de extraer la raíz cúbica a a^2 . Por lo tanto, podemos decir que:

Una cantidad elevada a un exponente fraccionario equivale a una raíz cuyo índice es el denominador del exponente y la cantidad subradical es la base de la potencia elevada al exponente que indica el numerador de su exponente.

Ejemplos

$$1) 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \quad \text{R.}$$

$$2) 3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81} \quad \text{R.}$$

$$3) 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \quad \text{R.}$$

211

Expresar con signo radical:

Ejercicio

$$1. 3^{\frac{1}{3}} \quad \text{R. } \sqrt[3]{3}$$

$$5. 3^{\frac{1}{2}} \quad \text{R. } \sqrt{3}$$

$$9. 11^{\frac{2}{5}} \quad \text{R. } \sqrt[5]{121}$$

$$2. 2^{\frac{2}{5}} \quad \text{R. } \sqrt[5]{4}$$

$$6. 7^{\frac{2}{5}} \quad \text{R. } \sqrt[5]{49}$$

$$10. 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \quad \text{R. } \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}$$

$$3. 5^{\frac{2}{3}} \quad \text{R. } \sqrt[3]{25}$$

$$7. 5^{\frac{2}{3}} \quad \text{R. } \sqrt[3]{25}$$

$$11. 5^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}} \quad \text{R. } \sqrt{5} \times \sqrt[3]{9}$$

$$4. 2^{\frac{3}{4}} \quad \text{R. } \sqrt[4]{8}$$

$$8. 6^{\frac{3}{4}} \quad \text{R. } \sqrt[4]{216}$$

$$12. 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{5}} \quad \text{R. } \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{5}$$

479

RAÍZ DE UNA RAÍZ. TEOREMA

La raíz de cualquier grado de una raíz se obtiene multiplicando los índices de ambas raíces.

Se trata de extraer la raíz cúbica de \sqrt{a} . Vamos a demostrar que

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3 \times 2]{a} = \sqrt[6]{a}$$

En efecto: según la definición de raíz, $\sqrt[6]{a}$ será la raíz cúbica de \sqrt{a} si elevada al cubo reproduce la cantidad subradical \sqrt{a} y en efecto:

$$(\sqrt[6]{a})^3 = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 = a^{\frac{1}{6} \times 3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

luego, queda demostrado lo que nos proponíamos.

212

Efectuar:

Ejercicio

$$1. \sqrt{\sqrt{2}} \quad \text{R. } \sqrt[4]{2}$$

$$4. \sqrt[3]{\sqrt{7}} \quad \text{R. } \sqrt[6]{7}$$

$$7. \sqrt[5]{\sqrt{3}} \quad \text{R. } \sqrt[10]{3}$$

$$2. \sqrt[3]{\sqrt{3}} \quad \text{R. } \sqrt[6]{3}$$

$$5. \sqrt[3]{\sqrt[3]{11}} \quad \text{R. } \sqrt[9]{11}$$

$$8. \sqrt[3]{\sqrt[5]{13}} \quad \text{R. } \sqrt[15]{13}$$

$$3. \sqrt[4]{\sqrt{5}} \quad \text{R. } \sqrt[8]{5}$$

$$6. \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} \quad \text{R. } \sqrt[12]{7}$$

Esta propiedad, a la inversa, nos permite extraer la **raíz cuarta** extrayendo dos veces la raíz cuadrada; la **raíz sexta** extrayendo la raíz cuadrada y la cúbica, etc. Así:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{R.}$$

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{R.}$$

Hallar:

1. $\sqrt[4]{81}$

R. 3

3. $\sqrt[6]{64}$

R. 2

5. $\sqrt[8]{256}$

R. 2

2. $\sqrt[4]{625}$

R. 5

4. $\sqrt[6]{729}$

R. 3

6. $\sqrt[10]{1,024}$

R. 2

213

Ejercicio

TEOREMA

Todo número entero que no tiene raíz exacta entera, tampoco la tiene fraccionaria.

Sea el número entero P , que no tiene raíz exacta entera de grado n . Vamos a demostrar que la raíz enésima exacta de P no puede ser un quebrado.

En efecto: supongamos que la raíz enésima exacta de P fuera un quebrado irreducible, por ejemplo $\frac{a}{b}$, o sea, supongamos que $\sqrt[n]{P} = \frac{a}{b}$.

Si el quebrado $\frac{a}{b}$ fuera la raíz enésima exacta de P , este quebrado elevado a la potencia n tendría que dar P , porque toda raíz exacta, elevada a la potencia que indica el índice de la raíz, tiene que reproducir la cantidad subradical; luego tendríamos que

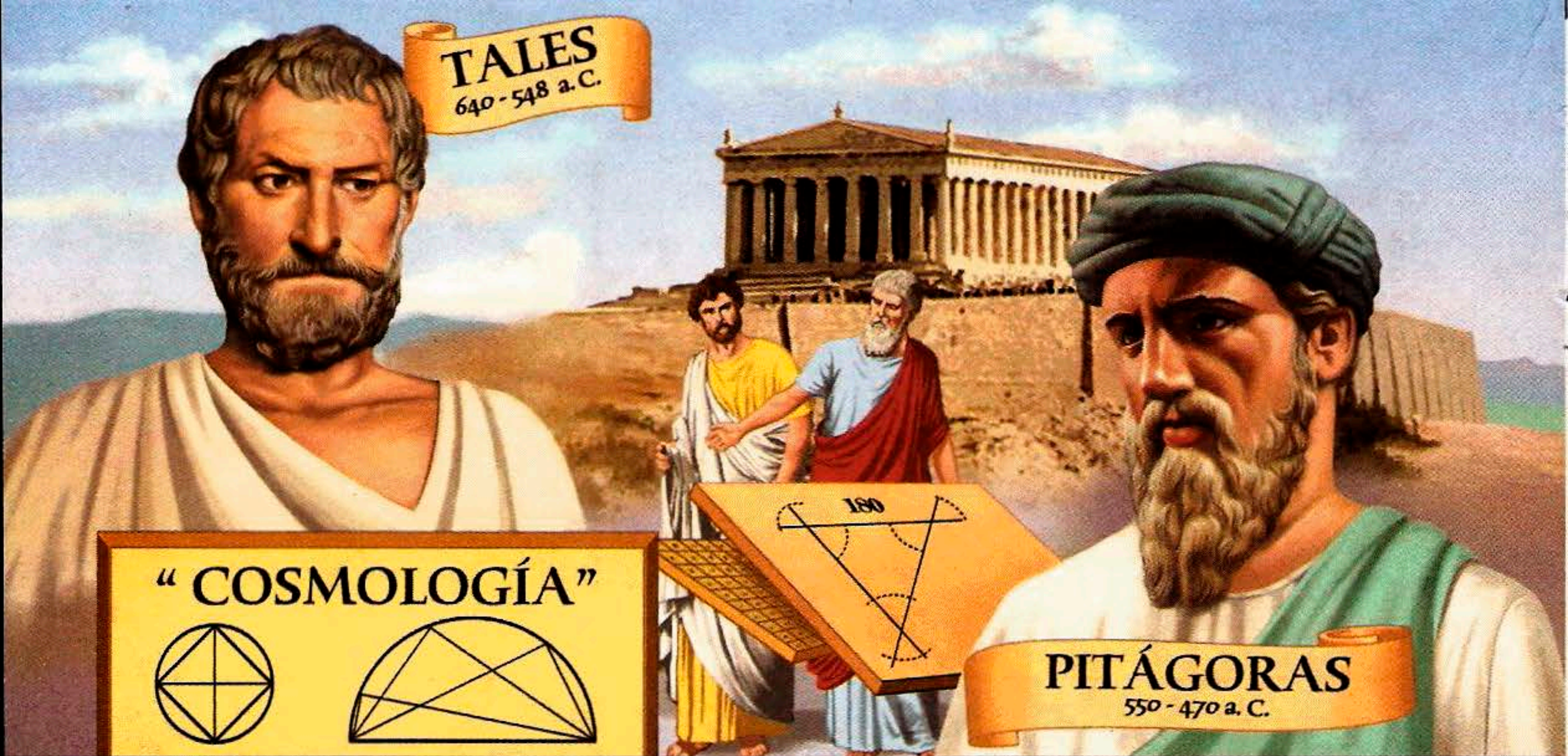
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = P \text{ o sea } \frac{a^n}{b^n} = P$$

lo cual es imposible, porque $\frac{a}{b}$ es un quebrado irreducible que, elevado a n , dará otro quebrado irreducible, porque cualquier potencia de un quebrado irreducible es otro quebrado irreducible (361), y un quebrado no puede ser igual a un entero; luego, queda demostrado que la raíz enésima exacta de P no puede ser un quebrado.

Así, 5 no tiene raíz cuadrada exacta entera y tampoco puede tener raíz cuadrada exacta fraccionaria; 7 no tiene raíz cuadrada exacta entera y tampoco puede tener raíz exacta fraccionaria; 9 no tiene raíz cúbica exacta entera y tampoco puede tener raíz cúbica exacta fraccionaria.

Estas raíces que no pueden expresarse exactamente por ningún número entero ni fraccionario, son **inconmensurables con la unidad** y se llaman **raíces inconmensurables** o **números irracionales**.

481



Se ignora quién haya descubierto los números irracionales; pero, en cambio, se sabe que los pitagóricos hacia fines del siglo V a. C. en Grecia, conocían la irracionalidad del radical $\sqrt{2}$ (números inconmensurables). Dando muestras de una fina

intuición matemática, los griegos de la Escuela de Crotona, trataron de hallar valores aproximados de $\sqrt{2}$, mediante soluciones sucesivas de $2x^2 - y^2 = \pm 1$.

Capítulo **XXXII**

RADICALES

LIGERO ESTUDIO DE LOS RADICALES DE SEGUNDO Y TERCER GRADO

482

Los **números irracionales** o raíces indicadas que no pueden expresarse exactamente por ningún número entero ni fraccionario, reciben el nombre de **radicales**.

Así pues, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$ son radicales.

El **grado** de un radical lo indica el índice de la raíz. Así, $\sqrt{2}$ es un radical de segundo grado; $\sqrt[3]{5}$ es un radical de tercer grado.

Radicales semejantes son los que tienen el mismo grado y la misma cantidad bajo el signo radical. Así, $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$ son semejantes; $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ no son semejantes.

483

COEFICIENTE

El número que precede a un radical y que está multiplicado por él, se llama **coeficiente**. Así, en $3\sqrt{2}$ el coeficiente es 3; en $5\sqrt{3}$ el coeficiente es 5.

El coeficiente indica las veces que el radical se toma como sumando. Así, $3\sqrt{2}$ equivale a $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$ equivale a $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$.

I. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Un radical está **reducido a su más simple expresión** cuando descomponiendo en sus factores primos la cantidad subradical se observa que todos los factores primos están elevados a exponentes **menores que el índice del radical**.

Así, $\sqrt{30}$ está reducido a su más simple expresión porque descomponiendo 30 en sus factores primos se tiene: $\sqrt{30} = \sqrt{2 \times 3 \times 5}$ y aquí observamos que los exponentes de los factores primos son menores que el índice del radical 2.

$\sqrt{24}$ no está reducido a su más simple expresión porque descomponiendo 24 en sus factores primos tenemos: $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3}$ y aquí vemos que el exponente del factor primo 2 es 3, mayor que el índice del radical.

Para reducir un radical a su más simple expresión se descompone la cantidad subradical en factores primos y se hacen con ellos los arreglos que se indican a continuación.

1) Simplificar $\sqrt{18}$.

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad \text{R.}$$

2) Simplificar $\sqrt{72}$.

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 3 \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \quad \text{R.}$$

3) Simplificar $3\sqrt{720}$.

$$3\sqrt{720} = 3\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 3 \cdot 2^2 \cdot 3\sqrt{5} = 36\sqrt{5} \quad \text{R.}$$

4) Simplificar $\frac{2}{3}\sqrt{45}$.

$$\frac{2}{3}\sqrt{45} = \frac{2}{3}\sqrt{3^2 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{6}{3}\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Simplificar:

1. $\sqrt{50}$ R. $5\sqrt{2}$

7. $\sqrt{180}$ R. $6\sqrt{5}$

13. $\frac{1}{2}\sqrt{8}$ R. $\sqrt{2}$

2. $\sqrt{27}$ R. $3\sqrt{3}$

8. $\sqrt{300}$ R. $10\sqrt{3}$

14. $\frac{2}{3}\sqrt{18}$ R. $2\sqrt{2}$

3. $\sqrt{32}$ R. $4\sqrt{2}$

9. $2\sqrt{108}$ R. $12\sqrt{3}$

15. $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ R. $3\sqrt{3}$

4. $\sqrt{162}$ R. $9\sqrt{2}$

10. $5\sqrt{490}$ R. $35\sqrt{10}$

16. $\frac{1}{5}\sqrt{50}$ R. $\sqrt{2}$

5. $\sqrt{250}$ R. $5\sqrt{10}$

11. $3\sqrt{243}$ R. $27\sqrt{3}$

17. $\frac{1}{6}\sqrt{72}$ R. $\sqrt{2}$

6. $\sqrt{160}$ R. $4\sqrt{10}$

12. $7\sqrt{432}$ R. $84\sqrt{3}$

18. $\frac{3}{8}\sqrt{80}$ R. $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

214

Ejercicio

5) Simplificar $\sqrt[3]{24}$.

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} \quad \text{R.}$$

6) Simplificar $\sqrt[3]{432}$.

$$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} \quad \text{R.}$$

7) Simplificar $2\sqrt[3]{2,187}$.

$$2\sqrt[3]{2,187} = 2\sqrt[3]{3^6 \cdot 3} = 2 \cdot 3^2 \sqrt[3]{3} = 18\sqrt[3]{3} \quad \text{R.}$$

8) Simplificar $\frac{3}{5}\sqrt[3]{375}$.

$$\frac{3}{5}\sqrt[3]{375} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = \frac{3}{5} \cdot 5\sqrt[3]{3} = \frac{15}{5}\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} \quad \text{R.}$$

215

Simplificar:

Ejercicio

1. $\sqrt[3]{81}$ R. $3\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{56}$ R. $2\sqrt[3]{7}$

3. $\sqrt[3]{250}$ R. $5\sqrt[3]{2}$

4. $\sqrt[3]{162}$ R. $3\sqrt[3]{6}$

5. $\sqrt[3]{375}$ R. $\sqrt[3]{3}$

6. $\sqrt[3]{48}$ R. $2\sqrt[3]{6}$

7. $\sqrt[3]{144}$ R. $2\sqrt[3]{18}$

8. $\sqrt[3]{192}$ R. $4\sqrt[3]{3}$

9. $2\sqrt[3]{360}$ R. $4\sqrt[3]{45}$

10. $5\sqrt[3]{3,000}$ R. $50\sqrt[3]{3}$

11. $7\sqrt[3]{5,488}$ R. $98\sqrt[3]{2}$

12. $6\sqrt[3]{16,000}$ R. $120\sqrt[3]{2}$

13. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ R. $\sqrt[3]{2}$

14. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$ R. $2\sqrt[3]{2}$

15. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}$ R. $3\sqrt[3]{2}$

16. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$ R. $\sqrt[3]{3}$

17. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{600}$ R. $\frac{6}{5}\sqrt[3]{75}$

18. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{192}$ R. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$

II. SUMA Y RESTA DE RADICALES

485

REGLA

Simplifíquense los radicales dados si es posible y efectúense las operaciones indicadas.

Ejemplos

1) Efectuar $\sqrt{45} + \sqrt{80}$.

Primero descomponemos en factores primos las cantidades subradicales para simplificar y tendremos:

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Por tanto: $\sqrt{45} + \sqrt{80} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5} \quad \text{R.}$

porque es evidente que *tres veces* $\sqrt{5}$ más *cuatro veces* $\sqrt{5}$ equivale a *siete veces* $\sqrt{5}$.2) Efectuar $2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - \sqrt{48}$.

Simplificando los radicales, tenemos: $2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$5\sqrt{27} = 5\sqrt{3^2 \cdot 3} = 5 \cdot 3\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Entonces: $2\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (2 + 15 - 4)\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$ R.

3) Efectuar $2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12}$.

$$2\sqrt{75} = 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Entonces: $2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12} = 10\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$
 $= 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{7} = (10 - 2)\sqrt{3} + 2\sqrt{7} = 8\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$ R.

$2\sqrt{7}$ no se puede sumar con $8\sqrt{3}$ porque estos radicales no son semejantes.

4) Efectuar $\frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{5}\sqrt{50} - \frac{1}{3}\sqrt{45}$.

Simplificando: $\frac{2}{3}\sqrt{18} = \frac{2}{3}\sqrt{3^2 \cdot 2} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$$\frac{3}{5}\sqrt{50} = \frac{3}{5}\sqrt{5^2 \cdot 2} = \frac{3}{5} \cdot 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{45} = \frac{1}{3}\sqrt{3^2 \cdot 5} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Entonces: $\frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{5}\sqrt{50} - \frac{1}{3}\sqrt{45} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{5} = 5\sqrt{2} - \sqrt{5}$ R.

Simplificar:

1. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

R. $5\sqrt{2}$

2. $6\sqrt{5} + 8\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$

R. $21\sqrt{5}$

3. $3\sqrt{5} + \sqrt{20}$

R. $5\sqrt{5}$

4. $\sqrt{12} + \sqrt{27}$

R. $5\sqrt{3}$

5. $\sqrt{18} + \sqrt{50}$

R. $8\sqrt{2}$

6. $3\sqrt{20} - \sqrt{45}$

R. $3\sqrt{5}$

7. $\sqrt{32} + \sqrt{72}$

R. $10\sqrt{2}$

8. $\sqrt{108} - \sqrt{75}$

R. $\sqrt{3}$

9. $3\sqrt{28} - \sqrt{63}$

R. $3\sqrt{7}$

10. $3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45}$

R. $8\sqrt{5}$

11. $\sqrt{12} + \sqrt{48} + \sqrt{75}$

R. $11\sqrt{3}$

12. $4\sqrt{300} + \sqrt{192} + \sqrt{243}$

R. $57\sqrt{3}$

13. $\frac{1}{2}\sqrt{8} + \frac{3}{5}\sqrt{50}$

R. $4\sqrt{2}$

14. $\frac{1}{3}\sqrt{27} + \frac{3}{4}\sqrt{48} + \frac{1}{2}\sqrt{12}$

R. $5\sqrt{3}$

15. $\frac{1}{5}\sqrt{125} + \frac{2}{3}\sqrt{45} - \frac{3}{7}\sqrt{245}$

R. 0

5) Efectuar $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$.

Simplificando los radicales, tenemos: $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Entonces:

$$\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} \quad \text{R.}$$

6) Efectuar $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{625}$.

Simplificando: $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$

$$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5\sqrt[3]{5}$$

Entonces:

$$\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{625} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} = 0 \quad \text{R.}$$

7) Efectuar $\sqrt[5]{16} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{128}$.

Simplificando: $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2\sqrt[5]{2}$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{16} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{128} &= 2\sqrt[5]{2} + 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2} \\ &= 2\sqrt[5]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[5]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3} \quad \text{R.} \end{aligned}$$

8) Efectuar $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{54} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{250}$.

Simplificando: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{54} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{2}{5}\sqrt[3]{250} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \frac{2}{5} \cdot 5\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{54} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \quad \text{R.}$$

217

Ejercicio

Efectuar:

1. $3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5}$

R. $5\sqrt[3]{5}$

2. $\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$

R. $9\sqrt[3]{2}$

3. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$

R. $5\sqrt[3]{3}$

4. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$

R. $7\sqrt[3]{2}$

5. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

R. $\sqrt[3]{2}$

6. $3\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{500}$

R. $\sqrt[3]{4}$

7. $\sqrt[3]{648} + \sqrt[3]{1,029}$

R. $13\sqrt[3]{3}$

8. $2\sqrt[3]{1,024} - \sqrt[3]{2,000}$

R. $6\sqrt[3]{2}$

9. $3\sqrt[3]{189} + 6\sqrt[3]{448}$

R. $33\sqrt[3]{7}$

10. $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{1,715} + \sqrt[3]{320}$

R. $13\sqrt[3]{5}$

11. $5\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{192}$

R. $19\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{7}$

12. $2\sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{432} - \sqrt[3]{384}$

R. $6\sqrt[3]{2}$

13. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{250}$

R. $2\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$

14. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{24} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{375} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{1,029}$

R. $5\sqrt[3]{3}$

15. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{128} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{250} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{135}$

R. $5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$

III. MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

REGLA

486

Para multiplicar radicales del mismo índice se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí, y el producto de las cantidades subradicales se coloca bajo el signo radical común.

1) Efectuar $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}$.

Tendremos: $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{6 \cdot 10} = \sqrt{60} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$ R.

En efecto: se ha demostrado (474) que para extraer la raíz de cualquier grado de un producto se extrae la raíz de cada factor y se multiplican entre sí estas raíces, luego:

$$\sqrt{6 \cdot 10} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{10}$$

o lo que es lo mismo $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{6 \cdot 10}$ que es la regla que hemos aplicado. (El resultado debe siempre reducirse a su más simple expresión.)

2) Efectuar $2\sqrt{3 \cdot 5} \sqrt{18}$.

$$2\sqrt{3 \cdot 5} \sqrt{18} = 2 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 18} = 10 \sqrt{54} = 10 \sqrt{3^2 \cdot 3 \cdot 2} = 30\sqrt{6}$$
 R.

3) Efectuar $3\sqrt[3]{10 \cdot 5} \sqrt[3]{12}$.

$$3\sqrt[3]{10 \cdot 5} \sqrt[3]{12} = 3 \cdot 5 \sqrt[3]{10 \cdot 12} = 15 \sqrt[3]{120} = 15 \sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot 5} = 30\sqrt[3]{15}$$
 R.

4) Efectuar $\frac{2}{3}\sqrt{15} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{30} \cdot \frac{5}{6}\sqrt{8}$.

$$\frac{2}{3}\sqrt{15} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{30} \cdot \frac{5}{6}\sqrt{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \sqrt{15 \cdot 30 \cdot 8} = \frac{5}{12} \sqrt{3,600}$$

$$= \frac{5}{12} \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \frac{5}{12} 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = \frac{5}{12} 4 \cdot 3 \cdot 5 = 25$$
 R.

Ejemplos

218

Ejercicio

Efectuar:

- | | | | |
|--|--------------------|---|----------------------------|
| 1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$ | R. $2\sqrt{3}$ | 11. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{2}$ | R. $2\sqrt[3]{6}$ |
| 2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$ | R. $3\sqrt{7}$ | 12. $2\sqrt[3]{3} \cdot 3\sqrt[3]{4} \cdot 4\sqrt[3]{10}$ | R. $48\sqrt[3]{15}$ |
| 3. $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{20}$ | R. 60 | 13. $\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{15}$ | R. $\sqrt{10}$ |
| 4. $3\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{35}$ | R. $105\sqrt{5}$ | 14. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4} \cdot 3\sqrt[3]{6}$ | R. $3\sqrt[3]{3}$ |
| 5. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$ | R. $2\sqrt[3]{3}$ | 15. $\frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{15}$ | R. $1\frac{1}{4}\sqrt{30}$ |
| 6. $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$ | R. $2\sqrt[3]{25}$ | 16. $\frac{5}{6}\sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{5}\sqrt[3]{16} \cdot 6\sqrt[3]{12}$ | R. $4\sqrt[3]{12}$ |
| 7. $3\sqrt[3]{6} \cdot 2\sqrt[3]{36}$ | R. 36 | | |
| 8. $2\sqrt[3]{12} \cdot 5\sqrt[3]{72}$ | R. $60\sqrt[3]{4}$ | | |
| 9. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$ | R. $4\sqrt{6}$ | | |
| 10. $3\sqrt{10} \cdot 7\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}$ | R. $210\sqrt{7}$ | | |

IV. DIVISIÓN DE RADICALES

487

REGLA

Para dividir radicales del mismo índice se dividen los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí y el cociente de las cantidades subradicales se coloca bajo el signo radical común.

Ejemplos

- 1) Efectuar
- $\sqrt{150} \div \sqrt{2}$
- .

Tendremos: $\sqrt{150} \div \sqrt{2} = \sqrt{150 \div 2} = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$ R.En efecto: hemos probado en el número anterior que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{2 \cdot 75} = \sqrt{150}$ Si dividimos el producto $\sqrt{150}$ entre uno de los factores $\sqrt{2}$ evidentemente obtendremos el otro factor, $\sqrt{75}$ y tendremos: $\sqrt{150} \div \sqrt{2} = \sqrt{75}$ que es la regla que hemos aplicado.

- 2) Efectuar
- $10\sqrt{10} \div 5\sqrt{2}$
- .

$$10\sqrt{10} \div 5\sqrt{2} = \frac{10}{5}\sqrt{10} \div 2 = 2\sqrt{5}$$
 R.

- 3) Efectuar
- $3\sqrt[3]{108} \div 4\sqrt[3]{4}$
- .

$$3\sqrt[3]{108} \div 4\sqrt[3]{4} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{108} \div 4 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{27} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{3^3} = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$
 R.

- 4) Efectuar
- $\frac{2}{3}\sqrt{350} \div \frac{3}{4}\sqrt{7}$
- .

$$\frac{2}{3}\sqrt{350} \div \frac{3}{4}\sqrt{7} = \frac{2/3}{3/4}\sqrt{350} \div 7 = \frac{8}{9}\sqrt{50} = \frac{8}{9}\sqrt{2 \cdot 5^2} = \frac{8}{9} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{40}{9}\sqrt{2} = 4\frac{4}{9}\sqrt{2}$$
 R.

219

Ejercicio

Efectuar:

1. $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ R. 2

2. $\sqrt{10} \div \sqrt{5}$ R. $\sqrt{2}$

3. $\sqrt{24} \div \sqrt{3}$ R. $2\sqrt{2}$

4. $\sqrt{60} \div \sqrt{5}$ R. $2\sqrt{3}$

5. $4\sqrt{75} \div 2\sqrt{3}$ R. 10

6. $5\sqrt{120} \div 6\sqrt{40}$ R. $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

7. $7\sqrt{140} \div 8\sqrt{7}$ R. $1\frac{8}{4}\sqrt{5}$

8. $5\sqrt{560} \div 7\sqrt{10}$ R. $1\frac{3}{7}\sqrt{14}$

9. $\frac{1}{2}\sqrt{10} \div 2\sqrt{5}$ R. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

10. $\frac{3}{5}\sqrt{500} \div \frac{3}{2}\sqrt{20}$ R. 2

11. $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{3}$ R. $2\sqrt[3]{2}$

12. $\sqrt[3]{200} \div \sqrt[3]{25}$ R. 2

13. $2\sqrt[3]{405} \div 3\sqrt[3]{3}$ R. $2\sqrt[3]{5}$

14. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} \div 2\sqrt[3]{2}$ R. $\frac{1}{2}$

15. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{686} \div \frac{6}{5}\sqrt[3]{2}$ R. $3\frac{1}{2}$

16. $\frac{7}{8}\sqrt[3]{1024} \div \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ R. $9\frac{1}{3}$

V. POTENCIAS DE RADICALES

REGLA

488

Para elevar un radical a una potencia cualquiera se eleva a esa potencia la cantidad subradical.

1) Elevar $\sqrt{2}$ al cubo.

Tendremos: $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ R.

En efecto: recordando (477) que $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ tendremos:

$$(\sqrt{2})^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} \text{ (478)}$$

luego queda justificada la regla aplicada.

2) Elevar $\sqrt[3]{2}$ a la cuarta potencia.

$$(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$
 R.

Ejemplos

220

Ejercicio

Efectuar:

1. $(\sqrt{5})^2$ R. 5

2. $(\sqrt{3})^3$ R. $3\sqrt{3}$

3. $(\sqrt{5})^4$ R. 25

4. $(\sqrt{10})^2$ R. 10

5. $(\sqrt[3]{4})^2$ R. $2\sqrt[3]{2}$

6. $(\sqrt[3]{18})^2$ R. $3\sqrt[3]{12}$

7. $(\sqrt[3]{15})^2$ R. $\sqrt[3]{225}$

8. $(\sqrt[4]{20})^2$ R. $2\sqrt[4]{25}$

9. $(\sqrt[5]{50})^3$ R. $5\sqrt[5]{40}$

VI. RAÍCES DE RADICALES

489

REGLA

Se multiplican los índices de los radicales y se coloca la cantidad subradical bajo un radical que tenga por índice el producto de los índices de los radicales.

Ejemplo

Extraer la raíz cúbica de $\sqrt[3]{128}$.

$$\text{Tendremos: } \sqrt[3]{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = 2\sqrt[6]{2} \quad \text{R.}$$

221

Efectuar:

Ejercicio

- | | | | | | |
|-----------------------|-------------------|--------------------------------|-------------------|---------------------------------|--------------------|
| 1. $\sqrt{\sqrt{16}}$ | R. 2 | 4. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{256}}$ | R. $2\sqrt[3]{4}$ | 7. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{20}}$ | R. $\sqrt[12]{20}$ |
| 2. $\sqrt{\sqrt{32}}$ | R. $2\sqrt[4]{2}$ | 5. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1,024}}$ | R. $2\sqrt[9]{2}$ | 8. $\sqrt[5]{\sqrt[5]{2,048}}$ | R. $2\sqrt[10]{2}$ |
| 3. $\sqrt{\sqrt{80}}$ | R. $2\sqrt[4]{5}$ | 6. $\sqrt[4]{\sqrt[4]{6,561}}$ | R. 3 | 9. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6,561}}}$ | R. 3 |

VII. RACIONALIZACIÓN

490

RACIONALIZAR EL DENOMINADOR DE UN QUEBRADO es transformar un quebrado que tenga por denominador un número irracional en otro quebrado equivalente cuyo denominador sea racional, es decir, que tenga raíz exacta, a fin de extraer esta raíz y que **desaparezca el signo radical del denominador**.

491

RACIONALIZAR EL DENOMINADOR DE UN QUEBRADO CUANDO EL DENOMINADOR ES UN RADICAL DE SEGUNDO GRADO

REGLA

Se multiplican los dos términos del quebrado por el radical que multiplicado por el denominador lo convierte en cuadrado perfecto y se simplifica el resultado.

Ejemplos

- 1) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

Se multiplican los dos términos del quebrado por $\sqrt{2}$ y se efectúan operaciones:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{R.}$$

2) Racionalizar el denominador de $\frac{5}{2\sqrt{3}}$.

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \quad \text{R.}$$

3) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt{18}}$.

Como $18 = 2 \cdot 3^2$ multiplicamos ambos términos del quebrado por $\sqrt{2}$ para que el exponente del 2 se haga par:

$$\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2} \quad \text{R.}$$

Racionalizar el denominador de:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

R. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

7. $\frac{2}{\sqrt{12}}$

R. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

13. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

R. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

2. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

R. $1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

8. $\frac{3}{\sqrt{27}}$

R. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

14. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

R. $\frac{1}{9}\sqrt{3}$

3. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

R. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

9. $\frac{14}{\sqrt{15}}$

R. $\frac{14}{15}\sqrt{15}$

15. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

R. $\frac{3}{4}\sqrt{2}$

4. $\frac{3}{\sqrt{7}}$

R. $\frac{3}{7}\sqrt{7}$

10. $\frac{5}{\sqrt{90}}$

R. $\frac{1}{6}\sqrt{10}$

16. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$

R. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

5. $\frac{7}{\sqrt{10}}$

R. $\frac{7}{10}\sqrt{10}$

11. $\frac{9}{\sqrt{32}}$

R. $1\frac{1}{8}\sqrt{2}$

17. $\frac{1}{3\sqrt{5}}$

R. $\frac{1}{15}\sqrt{5}$

6. $\frac{11}{\sqrt{6}}$

R. $1\frac{5}{6}\sqrt{6}$

12. $\frac{6}{\sqrt{128}}$

R. $\frac{3}{8}\sqrt{2}$

18. $\frac{7}{4\sqrt{7}}$

R. $\frac{1}{4}\sqrt{7}$

222

Ejercicio

RACIONALIZAR EL DENOMINADOR DE UN QUEBRADO CUANDO EL DENOMINADOR ES UN RADICAL DE TERCER GRADO

492

REGLA

Se multiplican los dos términos del quebrado por el radical que multiplicado por el denominador lo convierte en cubo perfecto y se simplifica el resultado.

Ejemplos

- 1) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$.

Se multiplican ambos términos del quebrado por $\sqrt[3]{2^2}$ y se efectúan operaciones:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4} \quad \text{R.}$$

- 2) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}$.

Se multiplican ambos términos del quebrado por $\sqrt[3]{3^2}$ y tenemos:

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{3\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3 \cdot 3} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{9} = \frac{2}{9}\sqrt[3]{9} \quad \text{R.}$$

- 3) Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt[3]{12}}$.

Como $12 = 2^2 \cdot 3$ hay que multiplicar ambos términos por $\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$ para que los exponentes queden múltiplos de 3 y tenemos:

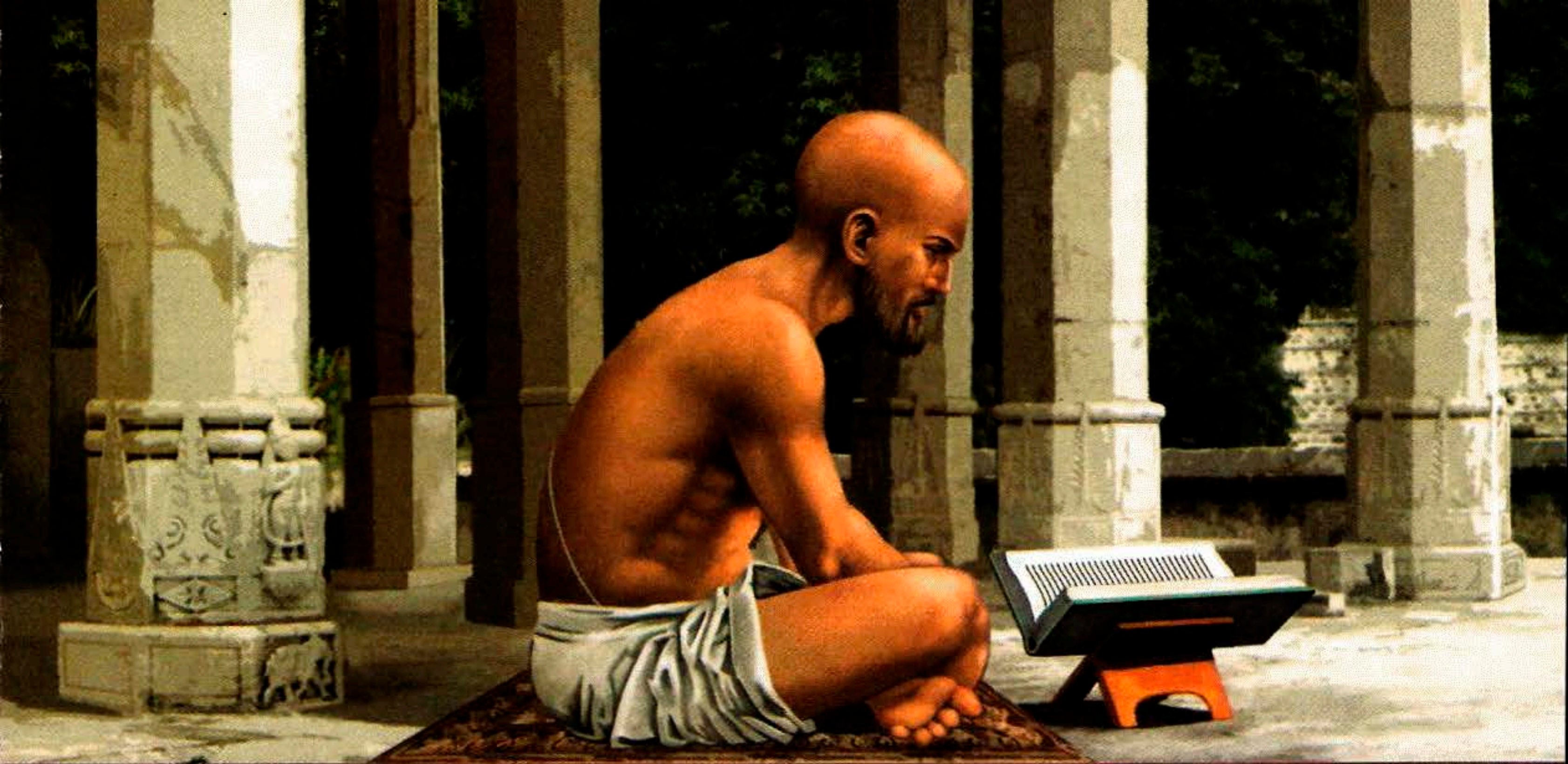
$$\frac{3}{\sqrt[3]{12}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{18}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{18} \quad \text{R.}$$

223

Racionalizar el denominador de:

Ejercicio

- | | | | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | R. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ | 6. $\frac{7}{\sqrt[3]{11}}$ | R. $\frac{7}{11}\sqrt[3]{121}$ | 11. $\frac{5}{3\sqrt[3]{2}}$ | R. $\frac{5}{6}\sqrt[3]{4}$ |
| 2. $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ | R. $2\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ | 7. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ | R. $\sqrt[3]{2}$ | 12. $\frac{7}{5\sqrt[3]{5}}$ | R. $\frac{7}{25}\sqrt[3]{25}$ |
| 3. $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ | R. $\sqrt[3]{9}$ | 8. $\frac{9}{\sqrt[3]{9}}$ | R. $3\sqrt[3]{3}$ | 13. $\frac{1}{10\sqrt[3]{7}}$ | R. $\frac{1}{70}\sqrt[3]{49}$ |
| 4. $\frac{7}{\sqrt[3]{5}}$ | R. $1\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$ | 9. $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$ | R. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{36}$ | 14. $\frac{5}{2\sqrt[3]{4}}$ | R. $1\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$ |
| 5. $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$ | R. $\sqrt[3]{4}$ | 10. $\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}$ | R. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$ | 15. $\frac{3}{5\sqrt[3]{10}}$ | R. $\frac{3}{50}\sqrt[3]{100}$ |



El grado de desarrollo a que llegaron los indios en matemáticas se debe al carácter abstracto de su pensamiento. Esto los llevó a plantearse problemas numéricos de mayor profundidad, mucho antes que otros pueblos preciados de más cultos

y civilizados. En el siglo VI d. C. **Aryabhata** estableció el valor aproximado de π (3.14159...), y además dio la regla para la extracción de la raíz cuadrada.

Capítulo **XXXIII**

RAÍZ CUADRADA

RAÍZ CUADRADA EXACTA de un número es el número que elevado al cuadrado reproduce exactamente el número dado.

Así, 3 es la raíz cuadrada exacta de 9 porque $3^2 = 9$; 5 es la raíz cuadrada exacta de 25 porque $5^2 = 25$.

RAÍZ CUADRADA INEXACTA O ENTERA de un número es el mayor número cuyo cuadrado está contenido en el número dado (**raíz cuadrada inexacta por defecto**) o el número cuyo cuadrado excede en menos al número dado (**raíz cuadrada inexacta por exceso**).

Así, 5 es la raíz cuadrada inexacta por defecto de 32 porque $5^2 = 25$ y 5 es el mayor número cuyo cuadrado está contenido en 32; 6 es la raíz cuadrada inexacta por exceso de 32 porque $6^2 = 36$, y 6 es el número cuyo cuadrado excede en menos a 32.

RESIDUO POR DEFECTO DE LA RAÍZ CUADRADA INEXACTA DE UN NÚMERO es la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz cuadrada por defecto.

Así, la raíz cuadrada de 52 es 7 y el residuo es $52 - 7^2 = 52 - 49 = 3$; la raíz cuadrada de 130 es 11 y el residuo es $130 - 11^2 = 130 - 121 = 9$.

493

494

495

I. RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

496

CASOS QUE OCURREN

Pueden ocurrir dos casos: **1)** Que el número dado sea menor que 100. **2)** Que el número dado sea mayor que 100.

497

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO MENOR QUE 100

REGLA

Se busca entre los nueve primeros números aquel cuyo cuadrado sea igual o se acerque más al número dado, y dicho número será la raíz cuadrada del número dado.

Ejemplo

$\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$; $\sqrt{71} = 8$ porque $8^2 = 64$ y es el que más se acerca.

498

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO MAYOR QUE 100

La regla para este caso se funda en los siguientes teoremas.

499

TEOREMA

La raíz cuadrada entera de las centenas de un número es exactamente las decenas de la raíz cuadrada de dicho número.

Sea el número N , cuya raíz cuadrada, que consta de decenas y unidades, la vamos a representar por $d + u$, donde d representa las decenas y u las unidades de la raíz, y sea R el resto.

Según la definición de la raíz cuadrada, tendremos:

$$N = (d + u)^2 + R = d^2 + 2du + u^2 + R \text{ (si hay resto)}$$

$$\text{o sea } N = d^2 + 2du + u^2 + R$$

es decir, que el número N está compuesto del cuadrado de las decenas de la raíz, más el doble de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, más el resto si lo hay.

Ahora bien: d^2 da centenas; luego, estará contenido en las centenas de N ; pero en las centenas de N puede haber otras centenas además de las que provienen de d^2 , pudiendo provenir estas nuevas centenas de $2du$ y de R ; luego, extrayendo la raíz cuadrada de las centenas de N , obtendremos un número que no será menor que las decenas de la raíz y que tampoco será mayor, porque si lo fuera, habría más centenas en el cuadrado de las decenas de la raíz que en el número dado, lo cual es imposible. Luego, si la raíz cuadrada de las centenas de N no es mayor ni menor que las decenas de la raíz, es exactamente dichas decenas, que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA

Si de un número se resta el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada y el resto, separando la primera cifra de la derecha, se divide entre el doble de dichas decenas, el cociente será la cifra de las unidades de la raíz o una cifra mayor.

En efecto:

Ya sabemos que $N = d^2 + 2du + u^2 + R$.

Si de N , o sea, de su igual $d^2 + 2du + u^2 + R$ restamos d^2 , tendremos:

$$N - d^2 = d^2 + 2du + u^2 + R - d^2 = 2du + u^2 + R$$

o sea,

$$N - d^2 = 2du + u^2 + R$$

Ahora bien: $2du$ produce decenas que están contenidas en las decenas del resto; pero en este resto también puede haber otras decenas que provengan de u^2 y de R . Luego, dividiendo las decenas del resto $N - d^2$ entre $2d$, obtendremos u o una cifra mayor.

REGLA PRÁCTICA PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO MAYOR QUE 100

Se divide el número dado en grupos de dos cifras, empezando por la derecha; el último grupo, periodo o sección puede tener una o dos cifras. Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo o periodo y ésta será la primera cifra de la raíz. Esta cifra se eleva al cuadrado y este cuadrado se resta de dicho primer periodo. A la derecha de este resto se coloca la sección siguiente; se separa con una coma la primera cifra de la derecha y lo que queda a la izquierda lo dividimos entre el doble de la raíz hallada. El cociente representará la cifra siguiente de la raíz o una cifra mayor. Para probar si esa cifra es buena se la escribe a la derecha del doble de la raíz hallada, y el número así formado se multiplica por la cifra que se comprueba. Si este producto se puede restar del número del cual separamos la primera cifra de la derecha, la cifra es buena y se sube a la raíz; si no se puede restar, se le disminuye una unidad o más hasta que el producto se pueda restar. Hecho esto, se resta dicho producto; a la derecha del resto se escribe la sección siguiente y se repiten las operaciones anteriores hasta haber bajado el último periodo.

Extraer la raíz cuadrada de 103,681.

$\begin{array}{r} \sqrt{10,36,81} \\ - 9 \\ \hline 13,6 \\ - 12 \\ \hline 0128,1 \\ - 64 \\ \hline 0640 \end{array}$	$\begin{array}{r} 321 \\ \hline 3 \times 2 = 6 \\ 62 \times 2 = 124 \\ 32 \times 2 = 64 \\ 642 \times 2 = 1,284 \\ 641 \times 1 = 641 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \div 6 = 2 \\ 128 \div 64 = 2 \end{array}$
---	--	---

EXPLICACIÓN

Hemos dividido el número dado en grupos de dos cifras, empezando por la derecha. Extraemos la raíz cuadrada del primer periodo de la raíz 10, que es 3, la elevamos al cuadrado y nos da 9; este 9 lo restamos del primer periodo. Nos da 1 de resto. A la derecha de este 1 bajamos el segundo periodo, 36, y se forma el número 136. Separamos la primera cifra de la derecha y queda 13,6. Lo que queda a la izquierda, 13, lo dividimos entre el doble de la raíz hallada que es 6 y nos da de cociente 2. Para ver si esta cifra es buena la escribimos al lado del doble de la raíz y se forma el número 62, que lo multiplicamos por la misma cifra 2, siendo el producto 124.

Como este producto se puede restar de 136 lo restamos y subimos el 2 a la raíz. La resta nos da 12, le escribimos a la derecha la sección siguiente, 81, y se forma el número 1,281. Separamos su primera cifra de la derecha y queda 128,1 y dividimos 128 entre el doble de la raíz 32, que es 64 y nos da de cociente 2. Para probar esta cifra la escribimos al lado del 64 y formamos el número 642 que lo multiplicamos por 2 y nos da 1,284. Como este producto no se puede restar de 1,281 la cifra 2 no es buena; la rebajamos una unidad y queda 1; probamos el 1 escribiéndolo al lado del 64 y formamos el número 641; este producto lo multiplicamos por 1, nos da 641, y como 641 se puede restar de 1,281 lo restamos y subimos el 1 a la raíz. 640 es el resto de la raíz.

OBSERVACIÓN

Si al separar la primera cifra de la derecha nos encontramos con que lo que queda a la izquierda no se puede dividir entre el doble de la raíz, ponemos cero en la raíz, bajamos el periodo siguiente y continuamos la operación.

502**PRUEBA DE LA RAÍZ CUADRADA**

Se eleva al cuadrado la raíz; a este cuadrado se le suma el residuo, y la suma debe dar la cantidad subradical.

Así, en el ejemplo anterior, tendremos: ➔

Cuadrado de la raíz: $321 \times 321 =$	103,041
Residuo	+ 640
Cantidad subradical:	103,681

503**PRUEBA DEL 9 EN LA RAÍZ CUADRADA**

Se halla el residuo entre 9 de la cantidad subradical y de la raíz. El residuo entre 9 de la raíz se eleva al cuadrado; a este cuadrado se le halla el residuo entre 9 y este residuo se suma con el residuo entre 9 del residuo de la raíz cuadrada, si lo hay. El residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 de la cantidad subradical.

Así, en el ejemplo anterior,
tendremos: ➔

Residuo entre 9 de 103,681	1
Residuo entre 9 de 321	6
Cuadrado de este residuo	36
Residuo entre 9 de este cuadrado	0
Residuo entre 9 del residuo 640	1
Suma de estos dos últimos residuos. $0 + 1 =$	1
Residuo entre 9 de esta suma	1

224

Ejercicio

Hallar la raíz cuadrada de:

1. 324	R. 18	10. 641,601	R. 801
2. 841	R. 29	11. 822,649	R. 907
3. 3,969	R. 63	12. 870,620	R. 933; res. 131
4. 9,409	R. 97	13. 999,437	R. 999; res. 1,436
5. 9,801	R. 99	14. 1,003,532	R. 1,001; res. 1,531
6. 10,201	R. 101	15. 21,487,547	R. 4,635; res. 4,322
7. 11,881	R. 109	16. 111,001,210	R. 10,535; res. 14,985
8. 254,016	R. 504	17. 2,025,150,194	R. 45,001; res. 60,193
9. 603,729	R. 777	18. 552,323,657,856	R. 743,184; res. 1,200,000

TEOREMA

504

El residuo de la raíz cuadrada de un número entero es siempre menor que el doble de la raíz más 1.

Sea A un número entero, N su raíz cuadrada inexacta por defecto y R el residuo. Tendremos: $A = N^2 + R$

Siendo N la raíz cuadrada inexacta por defecto de A , $N + 1$ será la raíz cuadrada por exceso y tendremos: $A < (N + 1)^2$, o sea, $A < N^2 + 2N + 1$

Ahora bien, como $A = N^2 + R$ en lugar de A podemos poner $N^2 + R$ y la última desigualdad se convierte en: $N^2 + R < N^2 + 2N + 1$

Suprimiendo N^2 en los dos miembros de la desigualdad anterior, ésta no varía y nos queda: $R < 2N + 1$ que era lo que queríamos demostrar.

II. RAÍZ CUADRADA DE LOS DECIMALES

REGLA

505

Se separa el número decimal en grupos de dos cifras a derecha e izquierda del punto decimal, teniendo cuidado de añadir un cero al último grupo de la derecha si quedara con una sola cifra decimal. Hecho esto, se extrae la raíz como si fuera un número entero, poniendo punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo decimal o también separando en la raíz, de derecha a izquierda, con un punto decimal, tantas cifras como sea la mitad de las cifras decimales del número dado.

• Extraer la raíz cuadrada de 1,703.725.

$\begin{array}{r} \sqrt{17,03.72,50} \\ - 16 \\ \hline 10,3 \\ - 81 \\ \hline 227,2 \\ - 1644 \\ \hline 6285,0 \\ - 57729 \\ \hline 5121 \end{array}$	$\begin{array}{r} 41.27 \\ \hline 4 \times 2 = 8 \\ 81 \times 1 = 81 \\ \hline 41 \times 2 = 82 \\ 822 \times 2 = 1,644 \\ \hline 412 \times 2 = 824 \\ 8,247 \times 7 = 57,729 \end{array}$
---	--

Prueba:

$$\begin{array}{r} 41.27 \times 41.27 = 1,703.2129 \\ + 0.5121 \\ \hline 1,703.7250 \end{array}$$

Ejemplo

Obsérvese que al dividir en grupos de dos cifras, a partir del punto, como el último grupo de la derecha, 5, quedaba con una sola cifra le añadimos un cero. El punto decimal lo hemos puesto en la raíz al bajar el grupo 72, que es el primer grupo decimal.

225

Ejercicio

Hallar la raíz cuadrada de:

- | | | | |
|-------------|-------------------------|-------------------|-----------------------------|
| 1. 1.69 | R. 1.3 | 10. 0.3256432 | R. 0.5706; res. 0.00005884 |
| 2. 5.29 | R. 2.3 | 11. 17.89645 | R. 4.230; res. 0.003550 |
| 3. 0.0001 | R. 0.01 | 12. 135.05643 | R. 11.621; res. 0.008789 |
| 4. 2.3409 | R. 1.53 | 13. 100.201 | R. 10.01; res. 0.0009 |
| 5. 25.1001 | R. 5.01 | 14. 4,021.143 | R. 63.41; res. 0.3149 |
| 6. 0.001331 | R. 0.036; res. 0.000035 | 15. 62.04251 | R. 7.876; res. 0.011134 |
| 7. 9.8596 | R. 3.14 | 16. 11.9494069 | R. 3.4567; res. 0.00063201 |
| 8. 49.8436 | R. 7.06 | 17. 4,100.1617797 | R. 64.0325; res. 0.00072345 |
| 9. 9.503 | R. 3.08; res. 0.0166 | 18. 9,663.49454 | R. 98.303; res. 0.014731 |

III. RAÍZ CUADRADA DE LOS QUEBRADOS

506

CASOS QUE OCURREN

Pueden ocurrir dos casos: 1) Que el denominador del quebrado sea cuadrado perfecto. 2) Que el denominador del quebrado no sea cuadrado perfecto.

1) Raíz cuadrada de un quebrado cuando el denominador es cuadrado perfecto.

REGLA

Se extrae la raíz cuadrada del numerador y denominador, simplificando la raíz del numerador, si no es exacta.

Ejemplos

$$1) \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{R.}$$

$$2) \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \quad \text{R.}$$

o también

$$\sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \quad \text{con error} < \frac{1}{5}$$

$$3) \sqrt{\frac{75}{121}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{121}} = \frac{\sqrt{5^2 \cdot 3}}{11} = \frac{5\sqrt{3}}{11} = \frac{5}{11}\sqrt{3} \quad \text{R.}$$

o también

$$\sqrt{\frac{75}{121}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{121}} = \frac{8}{11} \quad \text{con error} < \frac{1}{11}$$

OBSERVACIÓN

En el ejemplo 2 decimos $\frac{4}{5}$ es la raíz cuadrada de $\frac{20}{25}$ con error menor que $\frac{1}{5}$. En efecto: $\frac{4}{5}$ es

menor que la raíz exacta de $\frac{20}{25}$ porque elevando $\frac{4}{5}$ al cuadrado se tiene $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} < \frac{20}{25}$. Sin embargo, lo que falta a $\frac{4}{5}$ para ser la raíz exacta de $\frac{20}{25}$ es menos que $\frac{1}{5}$, porque si a $\frac{4}{5}$ le añadimos $\frac{1}{5}$ nos da $\frac{5}{5}$ y $\left(\frac{5}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} > \frac{20}{25}$. Así que la verdadera raíz de $\frac{20}{25}$ es mayor que $\frac{4}{5}$ y menor que $\frac{5}{5}$, o sea que a $\frac{4}{5}$ le falta menos de $\frac{1}{5}$ para ser la raíz cuadrada exacta de $\frac{20}{25}$.

Hallar la raíz cuadrada de:

1. $\frac{1}{4}$ R. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{18}{25}$ R. $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ o $\frac{4}{5}$

3. $\frac{30}{49}$ R. $\frac{1}{7}\sqrt{30}$ o $\frac{5}{7}$

4. $\frac{50}{36}$ R. $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ o $1\frac{1}{6}$

5. $\frac{60}{81}$ R. $\frac{2}{9}\sqrt{15}$ o $\frac{7}{9}$

6. $\frac{42}{64}$ R. $\frac{1}{8}\sqrt{42}$ o $\frac{3}{4}$

7. $\frac{63}{100}$ R. $\frac{3}{10}\sqrt{7}$ o $\frac{7}{10}$

8. $\frac{80}{121}$ R. $\frac{4}{11}\sqrt{5}$ o $\frac{8}{11}$

9. $\frac{96}{169}$ R. $\frac{4}{13}\sqrt{6}$ o $\frac{9}{13}$

10. $\frac{121}{144}$ R. $\frac{11}{12}$

11. $\frac{40}{289}$ R. $\frac{2}{17}\sqrt{10}$ o $\frac{6}{17}$

12. $\frac{81}{225}$ R. $\frac{3}{5}$

13. $\frac{90}{256}$ R. $\frac{3}{16}\sqrt{10}$ o $\frac{9}{16}$

14. $\frac{169}{324}$ R. $\frac{13}{18}$

15. $\frac{108}{361}$ R. $\frac{6}{19}\sqrt{3}$ o $\frac{10}{19}$

226

Ejercicio

2) Raíz cuadrada de un quebrado cuando el denominador no es cuadrado perfecto.

Cuando el denominador de un quebrado no es cuadrado perfecto, pueden presentarse los dos casos siguientes:

a) Que al simplificar el quebrado se obtenga un denominador cuadrado perfecto, con lo cual estaremos en el caso anterior.

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{105}{560}$.

Simplificando el quebrado, tenemos: $\frac{105}{560} = \frac{21}{112} = \frac{3}{16}$

El denominador de este último quebrado, 16, es cuadrado perfecto, luego podemos aplicar la regla del caso anterior:

$$\sqrt{\frac{105}{560}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Ejemplo

Hallar la raíz cuadrada de:

1. $\frac{12}{18}$ R. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ o $\frac{2}{3}$

2. $\frac{8}{32}$ R. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{35}{80}$ R. $\frac{1}{4}\sqrt{7}$ o $\frac{1}{2}$

4. $\frac{14}{175}$ R. $\frac{1}{5}\sqrt{2}$ o $\frac{1}{5}$

5. $\frac{21}{108}$ R. $\frac{1}{6}\sqrt{7}$ o $\frac{1}{3}$

6. $\frac{80}{245}$ R. $\frac{4}{7}$

7. $\frac{18}{486}$ R. $\frac{1}{9}\sqrt{3}$ o $\frac{1}{9}$

8. $\frac{84}{700}$ R. $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ o $\frac{3}{10}$

9. $\frac{96}{968}$ R. $\frac{2}{11}\sqrt{3}$ o $\frac{3}{11}$

10. $\frac{6}{294}$ R. $\frac{1}{7}$

11. $\frac{7}{567}$ R. $\frac{1}{9}$

12. $\frac{40}{2,000}$ R. $\frac{1}{10}\sqrt{2}$ o $\frac{1}{10}$

227

Ejercicio

- b) Que el quebrado sea irreducible o que después de simplificado el denominador no sea cuadrado perfecto.

Ejemplos

- 1) Hallar la raíz cuadrada de $\frac{35}{160}$.

Simplificamos: $\frac{35}{160} = \frac{7}{32}$

Como 32 no es cuadrado perfecto hay que *racionalizar* el *denominador* multiplicando los dos términos del quebrado por 2, porque de esa manera queda $32 \times 2 = 64$ cuadrado perfecto, y tendremos:

$$\sqrt{\frac{35}{160}} = \sqrt{\frac{7}{32}} = \frac{\sqrt{7 \cdot 2}}{\sqrt{32 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{14} \quad \text{R.}$$

- 2) Hallar la raíz cuadrada de $\frac{4}{45}$.

Este quebrado es irreducible. Hay que *racionalizar* el *denominador*, multiplicando los dos términos del quebrado por 5 porque de ese modo tenemos $45 \times 5 = 225$, cuadrado perfecto, y tendremos:

$$\sqrt{\frac{4}{45}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{\sqrt{45 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5}}{15} = \frac{2}{15}\sqrt{5} \quad \text{R.}$$

- 3) Hallar la raíz cuadrada de $\frac{5}{252}$.

Cuando el denominador es un número alto, como en este caso, no es fácil ver por cuál factor hay que multiplicar los dos términos del quebrado para que el denominador se convierta en cuadrado perfecto. En casos como éste, debe descomponerse el denominador en factores primos y tendremos: $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

Aquí vemos que 252 no es cuadrado perfecto porque el exponente del factor primo 7 es impar. Para que se convierta en cuadrado perfecto es necesario que este exponente sea par y para ello bastará multiplicar 252 por 7, porque tendremos: $252 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$. Así que hay que multiplicar los dos términos del quebrado por 7 y tendremos:

$$\sqrt{\frac{5}{252}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{252 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2}} = \frac{\sqrt{35}}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{\sqrt{35}}{42} = \frac{1}{42}\sqrt{35} \quad \text{R.}$$

- 4) Hallar la raíz cuadrada de $\frac{9}{7,700}$.

Descomponiendo 7,700 en sus factores primos tenemos: $7,700 = 2^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$. Para que 7,700 se convierta en cuadrado perfecto hay que lograr que los exponentes de 7 y 11 sean pares; para eso hay que multiplicar 7,700 por 7 y por 11, o sea por 77 y tendremos: $7,700 \times 77 = 2^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$. Así que hay que multiplicar los dos términos del quebrado por 77 y tendremos:

$$\sqrt{\frac{9}{7,700}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 77}}{\sqrt{7,700 \cdot 77}} = \frac{\sqrt{693}}{\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2}} = \frac{\sqrt{693}}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{\sqrt{693}}{770} = \frac{\sqrt{3^2 \cdot 7 \cdot 11}}{770} = \frac{3}{770}\sqrt{77} \quad \text{R.}$$

228

Ejercicio

Hallar la raíz cuadrada de:

1. $\frac{1}{2}$

R. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{3}$

R. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

3. $\frac{2}{5}$

R. $\frac{1}{5}\sqrt{10}$

4. $\frac{3}{8}$

R. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$

5. $\frac{11}{72}$

R. $\frac{1}{12}\sqrt{22}$

6. $\frac{10}{14}$

R. $\frac{1}{7}\sqrt{35}$

7. $\frac{7}{20}$

R. $\frac{1}{10}\sqrt{35}$

8. $\frac{1}{6}$

R. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

9. $\frac{5}{24}$

R. $\frac{1}{12}\sqrt{30}$

10. $\frac{4}{27}$

R. $\frac{2}{9}\sqrt{3}$

11. $\frac{1}{40}$

R. $\frac{1}{20}\sqrt{10}$

12. $\frac{7}{54}$

R. $\frac{1}{18}\sqrt{42}$

13. $\frac{9}{80}$

R. $\frac{3}{20}\sqrt{5}$

14. $\frac{21}{24}$

R. $\frac{1}{4}\sqrt{14}$

15. $\frac{7}{70}$

R. $\frac{1}{10}\sqrt{10}$

16. $\frac{5}{21}$

R. $\frac{1}{21}\sqrt{105}$

17. $\frac{25}{12}$

R. $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

18. $\frac{10}{98}$

R. $\frac{1}{7}\sqrt{5}$

19. $\frac{11}{48}$

R. $\frac{1}{12}\sqrt{33}$

20. $\frac{49}{44}$

R. $\frac{7}{22}\sqrt{11}$

21. $\frac{7}{26}$

R. $\frac{1}{26}\sqrt{182}$

22. $\frac{21}{40}$

R. $\frac{1}{20}\sqrt{210}$

23. $\frac{7}{48}$

R. $\frac{1}{12}\sqrt{21}$

24. $\frac{5}{96}$

R. $\frac{1}{24}\sqrt{30}$

25. $\frac{8}{99}$

R. $\frac{2}{33}\sqrt{22}$

26. $\frac{21}{90}$

R. $\frac{1}{30}\sqrt{210}$

27. $\frac{11}{135}$

R. $\frac{1}{45}\sqrt{165}$

28. $\frac{11}{450}$

R. $\frac{1}{30}\sqrt{22}$

29. $\frac{5}{84}$

R. $\frac{1}{42}\sqrt{105}$

30. $\frac{7}{600}$

R. $\frac{1}{60}\sqrt{42}$

31. $\frac{7}{540}$

R. $\frac{1}{90}\sqrt{105}$

32. $\frac{9}{700}$

R. $\frac{3}{70}\sqrt{7}$

33. $\frac{11}{1,200}$

R. $\frac{1}{60}\sqrt{33}$

34. $\frac{77}{1,500}$

R. $\frac{1}{150}\sqrt{1,115}$

35. $\frac{9}{2,000}$

R. $\frac{3}{100}\sqrt{5}$

36. $\frac{13}{3,250}$

R. $\frac{1}{50}\sqrt{10}$

RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS MIXTOS

507

REGLA

Se reduce el mixto a quebrado y se extrae la raíz cuadrada de este quebrado.

Hallar la raíz cuadrada de $1\frac{1}{8}$.

$$\sqrt{1\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{\sqrt{8 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3^2 \cdot 2}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \quad \text{R.}$$

Ejemplo

Hallar la raíz cuadrada de:

1. $1\frac{3}{4}$

R. $\frac{1}{2}\sqrt{7}$

2. $14\frac{1}{5}$

R. $\frac{1}{5}\sqrt{355}$

3. $3\frac{1}{72}$

R. $\frac{1}{12}\sqrt{434}$

4. $6\frac{1}{20}$

R. $1\frac{1}{10}\sqrt{5}$

5. $15\frac{2}{27}$

R. $\frac{1}{9}\sqrt{1,221}$

6. $13\frac{6}{25}$

R. $1\frac{4}{5}$

7. $14\frac{1}{17}$

R. $\frac{1}{17}\sqrt{4,063}$

8. $3\frac{1}{40}$

R. $\frac{11}{20}\sqrt{10}$

9. $4\frac{1}{90}$

R. $\frac{19}{30}\sqrt{10}$

229

Ejercicio

508

RAÍZ CUADRADA DE FRACCIONES COMUNES QUE NO SEAN CUADRADOS PERFECTOS MEDIANTE LA REDUCCIÓN A DECIMAL

Cuando el denominador de una fracción no es cuadrado perfecto, puede hallarse la raíz cuadrada de dicha fracción reduciéndola a fracción decimal y hallando la raíz cuadrada de ésta.

Ejemplo

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{5}{11}$.

Reduciendo a decimal:

$$\begin{array}{r} 0.454545... \\ 11 \overline{) 5.000000} \\ \underline{60} \\ 50 \\ \underline{60} \\ 50 \\ \underline{60} \end{array}$$

$$\frac{5}{11} = 0.454545...$$

Ahora hallamos la raíz cuadrada de este decimal:

$$\begin{array}{r} \sqrt{0.45, 45, 45} \quad 0.674 \\ \underline{9 \ 4,5} \quad 127 \times 7 = 889 \\ -8 \ 89 \quad 1,344 \times 4 = 5,376 \\ \hline 0 \ 56 \ 4,5 \\ -5 \ 376 \\ \hline 0269 \end{array}$$

• luego $\sqrt{\frac{5}{11}} = 0.674$ R.

230

Hallar la raíz cuadrada de las fracciones siguientes mediante la reducción a decimal:

Ejercicio

1. $\frac{5}{8}$

R. 0.79 res. 0.0009

7. $\frac{4}{15}$

R. 0.516 res. 0.00041

2. $\frac{7}{20}$

R. 0.591 res. 0.000719

8. $\frac{13}{95}$

R. 0.369 res. 0.000681

3. $\frac{2}{9}$

R. 0.471 res. 0.000381

9. $\frac{17}{360}$

R. 0.217 res. 0.000133

4. $\frac{7}{40}$

R. 0.418 res. 0.000276

10. $5\frac{3}{17}$

R. 2.275 res. 0.000845

5. $\frac{1}{5}$

R. 0.447 res. 0.000191

11. $2\frac{8}{31}$

R. 1.502 res. 0.00206

6. $\frac{11}{80}$

R. 0.37 res. 0.0006

12. $9\frac{6}{49}$

R. 3.02 res. 0.002049

MÉTODO ABREVIADO PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA

509

Cuando se quiere hallar la raíz cuadrada de un número de muchas cifras, y se quiere abreviar la operación, se puede aplicar la siguiente **regla**:

Se hallan por el método explicado la mitad más 1 de las cifras de la raíz. Para hallar las cifras restantes se bajan todos los periodos que falten y se divide el número así formado entre el doble de la raíz hallada, añadiéndole tantos ceros como periodos faltaban por bajar. El cociente de esta división será la parte que falta de la raíz cuadrada.

Si el número de cifras del cociente es menor que el número de cifras que faltan en la raíz, se escriben entre la parte hallada por el método corriente y el cociente de la división los ceros necesarios para completar las cifras que se necesitan.

El residuo de la raíz cuadrada se halla restando el cuadrado del cociente de la división del residuo de la división.

Hallar la raíz cuadrada de 18,020,516,012,314 por el método abreviado.

$\sqrt{18,020,516,012,314}$	<u>4,245,057</u>
-16	$82 \times 2 = 164$
<u>20,2</u>	
-164	$844 \times 4 = 3,376$
<u>380,5</u>	
-3376	$8,485 \times 5 = 42,425$
<u>4291,6</u>	
-42425	<u>8,490,000</u>
<u>00491012314</u>	57
66512314	
Residuo de la división 7082314	
$57^2 \dots\dots\dots 3249$	
Residuo de la raíz 7079065	

Ejemplo

EXPLICACIÓN

Como la cantidad subradical tiene 7 periodos, en la raíz habrá 7 cifras. Hemos hallado las 4 primeras cifras 4,245 por el método corriente y tenemos un residuo que es 491. Bajamos los tres periodos que faltan 012,314; los escribimos al lado de 491 y se forma el número 491,012,314. Este número lo dividimos entre el doble de la raíz hallada 4,245 que es 8,490, añadiéndole 3 ceros, porque faltaban tres periodos por bajar y se forma el número 8,490,000. Dividimos 491,012,314 entre 8,490,000 y nos da de cociente 57. Las cifras que escribimos en la raíz son 057 porque faltaban tres cifras y el cociente de esta división sólo tiene 2 cifras. Para hallar el residuo de la raíz hemos elevado el cociente de la división, 57, al cuadrado y nos dio 3,249; este número lo restamos del residuo de la división 7,082,314 y la diferencia 7,079,065 es el residuo de la raíz cuadrada.

231

Ejercicio

Hallar la raíz cuadrada de los números siguientes por el método abreviado:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1. 1,000,002,000,001 | R. 1,000,001 |
| 2. 4,008,012,008,004 | R. 2,002,002 |
| 3. 25,030,508,130,200 | R. 5,003,049 res. 8,833,799 |
| 4. 91,234,560,102,233 | R. 9,551,678 res. 7,486,549 |
| 5. 403,040,512,567,832 | R. 20,075,868 res. 36,614,408 |
| 6. 8,134,131,712,153,401 | R. 90,189,421 res. 51,838,160 |
| 7. 234,569,801,435,476 | R. 15,315,671 res. 23,255,235 |
| 8. 498,143,000,001,172,314 | R. 705,792,462 res. 585,150,870 |
| 9. 10,002,976,543,201,023 | R. 100,014,881 res. 121,756,862 |
| 10. 2,134,567,030,405,060,406 | R. 1,461,015,752 res. 2,812,934,902 |

APROXIMACIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA

510

RAÍZ CUADRADA DE UN ENTERO CON APROXIMACIÓN DECIMAL

REGLA

Para extraer la raíz cuadrada de un entero con una aproximación de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se pone punto decimal al entero y se le añade doble número de ceros que las cifras decimales de la aproximación. Hecho esto, se extrae la raíz cuadrada, teniendo cuidado de poner el punto decimal al bajar el primer grupo decimal.

De esta regla se deduce que para hallar la raíz cuadrada de un número entero con **aproximación de 0.1**, ponemos punto decimal al entero y le añadimos **dos ceros**; para hallar la raíz con error que **0.01** añadiremos **cuatro ceros**; para hallar la raíz en menor de **0.001** añadiremos **seis ceros**, y así sucesivamente.

Ejemplos

1) $\sqrt{17}$ con aproximación de 0.1.2) $\sqrt{31}$ con error < 0.001 .

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{17.00} & 4.1 \\
 -16 & 2 \times 4 = 8 \\
 \hline
 10,0 & 81 \times 1 = 81 \\
 -81 & \\
 \hline
 19 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{31.00,00,00} & 5.567 \\
 -25 & 5 \times 2 = 10 \\
 \hline
 60,0 & 105 \times 5 = 525 \\
 -525 & \\
 \hline
 750,0 & 55 \times 2 = 110 \\
 -6636 & 1,106 \times 6 = 6,636 \\
 \hline
 8640,0 & 556 \times 2 = 1,112 \\
 -77889 & 11,127 \times 7 = 77,889 \\
 \hline
 8511 &
 \end{array}$$

232

Ejercicio

Hallar la raíz cuadrada de:

- | | | |
|----------|--------------------------|-------------------|
| 1. 7 | con aproximación de 0.1. | R. 2.6 res. 0.24 |
| 2. 14 | " " " 0.1. | R. 3.7 res. 0.31 |
| 3. 115 | " " " 0.1. | R. 10.7 res. 0.51 |
| 4. 1,268 | " " " 0.1. | R. 35.6 res. 0.64 |

5. 6	"	"	"	0.01.	R. 2.44 res. 0.0464
6. 185	"	"	"	0.01.	R. 13.60 res. 0.04
7. 3,001	"	"	"	0.01.	R. 54.78 res. 0.1516
8. 25,325	"	"	"	0.01.	R. 159.13 res. 2.6431
9. 2	"	"	"	0.001.	R. 1.414 res. 0.000604
10. 186	"	"	"	0.001.	R. 13.638 res. 0.004956
11. 8,822	"	"	"	0.001.	R. 93.925 res. 0.094375
12. 6,813	"	"	"	0.0001.	R. 82.5408 res. 0.01633536
13. 999	"	"	"	0.00001.	R. 31.60696 res. 0.0000795584
14. 326	"	"	"	0.000001.	R. 18.055470 res. 0.000003079100

RAÍZ CUADRADA DE UN DECIMAL CON APROXIMACIÓN DECIMAL

511

REGLA

Para extraer la raíz cuadrada de un decimal con aproximación de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se añaden al decimal los ceros necesarios para que el número total de cifras decimales sea el doble de las cifras decimales de la aproximación. Hecho esto se extrae la raíz cuadrada, teniendo cuidado de poner el punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo decimal.

1) $\sqrt{0.6}$ con aproximación de 0.01.

Como la aproximación 0.01 tiene *dos cifras decimales*, el número tendrá que tener *cuatro* y como ya tiene una cifra decimal, el 6, le añadiremos *tres ceros* y quedará 0.6000. Ahora se extrae la raíz cuadrada de 0.6000;

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0.60,00} & 0.77 \\ -49 & 7 \times 2 = 14 \\ \hline 110,0 & 147 \times 7 = 1,029 \\ -1029 & \\ \hline 71 & \end{array}$$

2) $\sqrt{8.72}$ en menos de 0.0001.

Como la aproximación 0.0001 tiene *cuatro cifras decimales*, el número tendrá que tener *ocho*, y como ya tiene dos cifras decimales, 72, le añadiremos *seis ceros* y quedará 8.72000000. Ahora, extraemos la raíz cuadrada de 8.72000000:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{8.72,00,00,00} & 2.9529 \\ -4 & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 47,2 & 49 \times 9 = 441 \\ -441 & \\ \hline 310,0 & 29 \times 2 = 58 \\ -2925 & 585 \times 5 = 2,925 \\ \hline 1750,0 & 295 \times 2 = 590 \\ -11804 & 5,902 \times 2 = 11,804 \\ \hline 56960,0 & 2,952 \times 2 = 5,904 \\ -531441 & 59,049 \times 9 = 531,441 \\ \hline 38159 & \end{array}$$

Ejemplos

233

Hallar la raíz cuadrada de:

Ejercicio

1. 0.3	con error menor que 0.01.	R. 054 res. 0.0084
2. 7.3	" " " " 0.01.	R. 2.70 res. 0.01
3. 9.3	" " " " 0.01.	R. 3.04 res. 0.0584
4. 9.325	" " " " 0.01.	R. 3.05 res. 0.0225
5. 117.623	" " " " 0.01.	R. 10.84 res. 0.1174
6. 150.5	" " " " 0.001.	R. 12.267 res. 0.020711
7. 64.03	" " " " 0.0001.	R. 8.0018 res. 0.00119676
8. 0.006	" " " " 0.00001.	R. 0.07745 res. 0.0000014975
9. 0.005	" " " " 0.000001.	R. 0.070710 res. 0.000000095900
10. 6.003	" " " " 0.00000001.	R. 2.45010203 res. 0.0000000425898791

512

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO CON APROXIMACIÓN FRACCIONARIA**REGLA**

Para extraer la raíz cuadrada de un número en menos de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ se multiplica el número dado por el cuadrado del denominador de la aproximación buscada, se halla la raíz cuadrada de este producto, y esta raíz cuadrada se divide entre el denominador de la aproximación buscada.

Ejemplos

1) $\sqrt{19}$ en menos de $\frac{1}{5}$.

Multiplicamos 19 por el cuadrado de 5: $19 \times 25 = 475$

Extraemos la raíz cuadrada de 475: $\sqrt{475} = 21$

21 se divide entre 5: $21 \div 5 = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$ R.

2) $\sqrt{3.25}$ en menos de $\frac{1}{7}$.

Multiplicamos 3.25 por el cuadrado de 7: $3.25 \times 49 = 159.25$

Extraemos la raíz cuadrada de 159.25: $\sqrt{159.25} = 12.6$

12.6 se divide entre 7: $12.6 \div 7 = 1.8$ R.

3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ en menos de $\frac{1}{8}$.

Multiplicamos $\frac{2}{3}$ por el cuadrado de 8: $\frac{2}{3} \times 64 = \frac{128}{3}$

$$\sqrt{\frac{128}{3}} = \frac{\sqrt{128 \times 3}}{\sqrt{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{384}}{\sqrt{9}} = \frac{19}{3}$$

$\frac{19}{3}$ se divide entre 8: $\frac{19}{3} \div 8 = \frac{19}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{19}{24}$ R.

234

Ejercicio

Hallar la raíz cuadrada de:

1. 20 con error $< \frac{1}{4}$. R. $4\frac{1}{4}$
2. 21 " " $< \frac{1}{5}$. R. $4\frac{2}{5}$
3. 40 " " $< \frac{1}{6}$. R. $6\frac{1}{6}$
4. 60 " " $< \frac{1}{7}$. R. $7\frac{5}{7}$
5. 75 " " $< \frac{1}{8}$. R. $8\frac{5}{8}$
6. 115 " " $< \frac{1}{9}$. R. $10\frac{2}{3}$
7. 120 " " $< \frac{1}{3}$. R. $10\frac{2}{3}$
8. 135 " " $< \frac{1}{11}$. R. $11\frac{6}{11}$
9. 128 " " $< \frac{1}{8}$. R. $11\frac{1}{4}$

10. 23 con error $< \frac{1}{9}$. R. $4\frac{7}{9}$
11. 0.5 " " $< \frac{1}{4}$. R. $\frac{1}{2}$
12. 0.13 " " $< \frac{1}{7}$. R. $\frac{5}{14}$
13. 3.16 " " $< \frac{1}{3}$. R. $1\frac{23}{30}$
14. $\frac{1}{2}$ " " $< \frac{1}{5}$. R. $\frac{7}{10}$
15. $\frac{3}{5}$ " " $< \frac{1}{4}$. R. $\frac{3}{4}$
16. $\frac{1}{3}$ " " $< \frac{1}{100}$. R. $\frac{173}{300}$
17. $13\frac{2}{7}$ " " $< \frac{1}{5}$. R. $33\frac{22}{35}$
18. $5\frac{2}{5}$ " " $< \frac{1}{11}$. R. $2\frac{17}{55}$

APLICACIONES DE LA RAÍZ CUADRADA

La suma de los cuadrados de los números es 613 y el número mayor es 18. Hallar el menor.

513

613 contiene el cuadrado de 18 y el cuadrado del número buscado; luego, si a 613 le restamos el cuadrado de 18, obtendremos el cuadrado del número buscado:

$$613 - 18^2 = 613 - 324 = 289$$

289 es el cuadrado del número que se busca; luego, el número que se busca será $\sqrt{289} = 17$. R.

Un terreno cuadrado de $1,369 \text{ m}^2$ de superficie se quiere rodear con una cerca que vale \$60 el m. ¿Cuánto importa la obra?

514

La superficie $1,369 \text{ m}^2$ es el cuadrado del lado del terreno; luego, el lado del terreno será:

$$\sqrt{1,369 \text{ m}^2} = 37 \text{ m}$$

Si un lado mide 37 m, el perímetro del terreno será $37 \times 4 = 148 \text{ m}$. Sabiendo que cada metro de cerca importa \$60, los 148 m importarán $148 \text{ m} \times \$60 = \$8,880$. R.

Se ha comprado cierto número de CD por \$625. Sabiendo que el número de CD comprados es igual al número que representa el precio de un CD, ¿cuántos CD se compraron y cuánto costó cada uno?

515

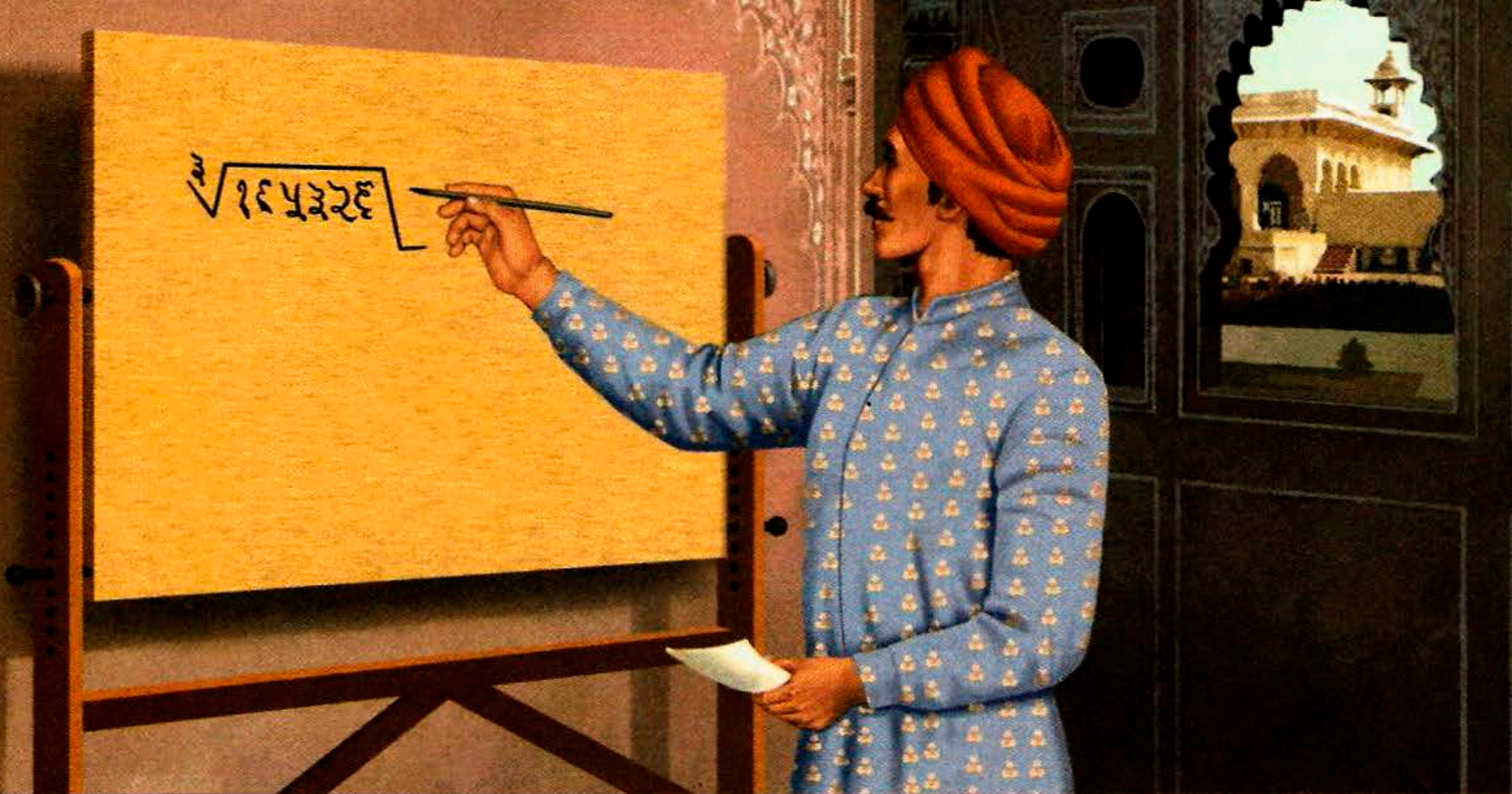
El importe de la venta, \$625, es el producto del número de CD por el precio de uno, pero el número de CD es igual al precio de uno; luego, \$625 es el cuadrado del número de CD y del que representa el precio de un CD; luego, $\sqrt{625} = 25$ representa el número de CD comprados y el precio de cada uno.

Se compraron 25 CD y cada uno costó \$25 R.

235

Ejercicio

1. La suma de los cuadrados de dos números es 1,186 y el número menor es 15. Hallar el número mayor. R. 31
2. La suma de los cuadrados de dos números es 3,330 y el número mayor es 51. Hallar el número menor. R. 27
3. Una mesa cuadrada tiene 225 dm^2 de superficie. Hallar sus dimensiones. R. 15 dm de lado.
4. ¿Cuántos metros de longitud tendrá la cerca de un solar cuadrado de 145.2025 m^2 de superficie? R. 48.20 m
5. La superficie de un terreno cuadrado es 400 m^2 . ¿Cuánto importará cercarlo si el metro de cerca vale 25,000 bolívares? R. bs. 2,000,000
6. Un terreno tiene 500 metros de largo y 45 de ancho. Si se le diera forma cuadrada, ¿cuáles serían las dimensiones de este cuadrado? R. 150 m de lado.
7. Se tiene una mesa de 16 m de largo por 9 de ancho. ¿Cuánto se deberá disminuir la longitud y aumentar el ancho para que, sin variar su superficie, tenga forma cuadrada? R. 4 m; 3 m
8. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado equivale a los $\frac{2}{3}$ de 24? R. 4
9. Hallar el lado del cuadrado cuya superficie es los $\frac{2}{5}$ de la superficie de un rectángulo de 50 m de largo por 14.45 m de ancho. R. 17 m
10. El cuadrado de la suma de dos números es 5,625 y el cuadrado de su diferencia 625. Hallar los números. R. 50 y 25.
11. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado multiplicado por 2 y dividido entre 9 da 8? R. 6
12. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado multiplicado por 3; añadiendo 6 a este producto y dividiendo esta suma entre 3 se obtiene por resultado 291? R. 17
13. Se quieren distribuir los 144 soldados de una compañía formando un cuadrado. ¿Cuántos hombres habrá en cada lado del cuadrado? R. 12
14. Se compra cierto número de relojes por Q 5,625. Sabiendo que el número de relojes comprados es igual al precio de un reloj, ¿cuántos se han comprado y cuánto costó cada uno? R. 75 relojes; Q 75
15. El número de CD que he comprado es igual al precio que he pagado por cada CD. Si hubiera comprado 2 CD más y hubiera pagado \$2 más por cada uno, habría gastado \$1,681. ¿Cuántos CD compré y cuánto pagué por cada uno? R. 39 CD; \$39
16. Un comerciante compró cierto número de DVD y el precio que pagó por cada uno era la cuarta parte del número de DVD que compró. Si gastó \$30,976, ¿cuántos DVD compró y cuánto pagó por cada uno? R. 352 DVD; \$88
17. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de 722 m^2 si su longitud es el doble del ancho? R. 38 m \times 19 m



Se da por seguro que fueron los indios los primeros en hallar las reglas para la extracción de las raíces cuadrada y cúbica. Resulta curioso conocer la terminología que ellos empleaban. Para la raíz tenían el vocablo sánscrito *mula*, que además

quiere decir vegetal, al cual añadían *varga* o *ghana*, y formaban las expresiones *varga mula* o *ghana mula*, que significaba raíz cuadrada y raíz cúbica, respectivamente.

Capítulo **XXXIV**

RAÍZ CÚBICA

RAÍZ CÚBICA EXACTA de un número es el número que elevado al cubo reproduce exactamente el número dado.

Así, 3 es la raíz cúbica exacta de 27 porque $3^3 = 27$; 6 es la raíz cúbica exacta de 216 porque $6^3 = 216$.

RAÍZ CÚBICA INEXACTA O ENTERA de un número es el mayor número cuyo cubo está contenido en el número dado (**raíz cúbica inexacta por defecto**) o el número cuyo cubo excede en menos al número dado (**raíz cúbica inexacta por exceso**).

Así, 5 es la raíz cúbica inexacta por defecto de 130 porque $5^3 = 125$ y 5 es el mayor número cuyo cubo está contenido en 130; 6 es la raíz cúbica inexacta por exceso de 130 porque $6^3 = 216$ y es el número cuyo cubo excede en menos a 130.

RESIDUO POR DEFECTO DE LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO es la diferencia entre el número y el cubo de su raíz cúbica por defecto. Así, la raíz cúbica de 40 es 3 y el residuo es $40 - 3^3 = 40 - 27 = 13$; la raíz cúbica de 350 es 7 y el residuo es $350 - 7^3 = 350 - 343 = 7$.

516

517

518

I. RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

519 CASOS QUE OCURREN

Pueden ocurrir dos casos: 1) Que el número dado sea menor que 1,000. 2) Que el número dado sea mayor que 1,000.

520 RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO MENOR QUE 1,000

REGLA

Se busca entre los nueve primeros números aquel cuyo cubo sea igual o más se acerque al número dado, y este número será la raíz cúbica del número dado.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{347} = 7, \text{ porque, } 7^3 = 343$$

$$\sqrt[3]{512} = 8, \text{ porque } 8^3 = 512$$

521 RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO MAYOR QUE 1,000

La regla para este caso se funda en los siguientes teoremas.

522 TEOREMA

La raíz cúbica de los millares de un número es exactamente las decenas de la raíz cúbica de dicho número.

Sea el número N , cuya raíz cúbica, que consta de decenas y unidades, la vamos a representar por $d + u$, donde d representa las decenas y u las unidades, y sea R el resto.

Según la definición de raíz cúbica, tendremos: $N = (d + u)^3 + R = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$, o sea, $N = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$; es decir, que el número N está compuesto del cubo de las decenas de la raíz, más el triple del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triple de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, más el resto si lo hay.

Ahora bien: d^3 da millares; luego, estará contenido en los millares de N ; pero en los millares de N puede haber otros millares además de los que provienen de d^3 , pudiendo provenir de $3d^2u$, de $3du^2$, de u^3 y de R : luego, extrayendo la raíz cúbica de los millares de N , obtendremos un número que no será menor que las decenas de la raíz, pero tampoco será mayor, porque si lo fuera, habría más millares en el cubo de las decenas de la raíz que en el número dado, lo cual, es imposible. Luego, si la raíz cúbica de los millares de N no es menor ni mayor que las decenas de la raíz, es exactamente dichas decenas, que era lo que queríamos demostrar.

523 TEOREMA

Si de un número se resta el cubo de las decenas de su raíz cúbica y el resto, separando las dos primeras cifras de la derecha, se divide entre el triple del cuadrado de estas decenas, el cociente será la cifra de las unidades o una cifra mayor.

En efecto: ya sabemos que $N = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$

Si de N , o sea de su igual $d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$, restamos d^3 , tendremos:

$$N - d^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R - d^3 = 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$$

o sea, $N - d^3 = 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$

Ahora bien: $3d^2u$ produce centenas que estarán contenidas en las centenas del resto, pero en este resto puede haber otras centenas que provengan de $3du^2$, de u^3 y de R . Luego, dividiendo las centenas del resto $N - d^3$ por $3d^2$ obtendremos de cociente u o una cifra mayor, que era lo que queríamos demostrar.

REGLA PRÁCTICA PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO MAYOR QUE 1,000

524

Se divide el número dado en grupos o periodos de tres cifras empezando por la derecha; el último periodo puede tener una o dos cifras. Se extrae la raíz cúbica del primer periodo y ésta será la primera cifra de la raíz. Esta cifra se eleva al cubo y este cubo se resta del primer periodo. A la derecha de este resto se coloca la sección siguiente; se separan con una coma las dos primeras cifras de la derecha y lo que queda a la izquierda se divide entre el triple del cuadrado de la raíz hallada. El cociente representará la cifra de las unidades o una cifra mayor. Para probarla se forman tres sumandos: 1) Triple del cuadrado de la raíz hallada por la cifra que se prueba, multiplicado por 100. 2) Triple de la raíz hallada por el cuadrado de la cifra que se prueba por 10. 3) Cubo de la cifra que se prueba. Se efectúan estos productos y se suman. Si esta suma se puede restar del número del cual separamos las dos primeras cifras de la derecha, la cifra hallada es buena y se sube a la raíz; si no se puede restar se le disminuye una unidad o más hasta que esta suma se pueda restar. Hecho esto, se resta dicho producto, a la derecha del resto se escribe la sección o periodo siguiente y se repiten las operaciones anteriores hasta haber bajado el último periodo.

Extraer la raíz cúbica de 12,910,324:

$\begin{array}{r} \sqrt[3]{12,910,324} \\ - 8 \\ \hline 49,10 \\ - 4167 \\ \hline 07433,24 \\ - 645904 \\ \hline 097420 \end{array}$	$\begin{array}{l} 234 \\ \hline 3 \times 2^2 = 12 \\ 49 \div 12 = 4 \\ \hline 3 \times 23^2 = 1,587 \\ 7,433 \div 1,587 = 4 \end{array}$
--	--

Pruebas:

$$\begin{array}{r} 3 \times 2^2 \times 4 \times 100 = 4,800 \\ 3 \times 2 \times 4^2 \times 10 = 960 \\ 4^3 = 64 \\ \hline 5,824 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 2^2 \times 3 \times 100 = 3,600 \\ 3 \times 2 \times 3^2 \times 10 = 540 \\ 3^3 = 27 \\ \hline 4,167 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 23^2 \times 4 \times 100 = 634,800 \\ 3 \times 23 \times 4^2 \times 10 = 11,040 \\ 4^3 = 64 \\ \hline 645,904 \end{array}$$

Ejemplo

EXPLICACIÓN

Hemos dividido el número dado en grupos de tres cifras empezando por la derecha. Extraemos la raíz cúbica del primer periodo de la izquierda que es 12 y su raíz cúbica 2; este 2 lo escribimos en la raíz, lo elevamos al cubo y nos da 8 y este 8 lo restamos del primer periodo. Nos da 4 de resto. A la derecha de este 4 escribimos el siguiente periodo 910 y se forma el número 4,910. Separamos las dos primeras cifras de la derecha y nos queda 49,10. Lo que queda a la izquierda, 49, lo dividimos entre el triple del cuadrado de la raíz hallada, $3 \times 2^2 = 12$ y nos da de cociente 4. Para probar este 4 y ver si es buena cifra, formamos tres sumandos: $3 \times 2^2 \times 4 \times 100$, $3 \times 2 \times 4^2 \times 10$ y 4^3 , los efectuamos y sumamos y vemos que nos da 5,824 que es mayor que 4,910, lo que indica que la cifra 4 es muy grande. Le rebajamos una unidad y probamos el 3. Esta suma 4,167 se puede restar de 4,910, luego el 3 es buena cifra; la subimos a la raíz y restamos 4,167 de 4,910. Nos resta 743. Escribimos a la derecha de este resto el siguiente periodo 324 y se forma el número 743,324. Separamos sus dos primeras cifras de la derecha y queda 7,433.24. Dividimos lo que queda a la izquierda, 7,433, entre el triple del cuadrado de la raíz que es $3 \times 23^2 = 1,587$ y nos da de cociente 4. Para probar este 4 formamos tres sumandos: $3 \times 23^2 \times 4 \times 100$, $3 \times 23 \times 4^2 \times 10$ y 4^3 , los efectuamos y sumamos y nos da 645,904 y como esta suma se puede restar de 743,324 el 4 es buena cifra. Lo subimos a la raíz y restamos la suma 645,904 de 743,324. 97,420 será el resto de la raíz.

OBSERVACIÓN

Si al separar las dos primeras cifras de la derecha, lo que queda a la izquierda no se puede dividir entre el triple del cuadrado de la raíz, se pone cero en la raíz y se baja el periodo siguiente, continuando la operación. Si algún cociente resulta mayor que 9 se prueba el 9.

525**PRUEBA DE LA RAÍZ CÚBICA**

Se eleva al cubo la raíz; a este cubo se le suma el residuo y la suma debe dar la cantidad subradical.

Así, en el ejemplo anterior, tendremos:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Cubo de la raíz:} & 234 \times 234 \times 234 = & 12,812,904 \\
 \text{Residuo:} & & + \quad 97,420 \\
 \text{Cantidad subradical} & \dots\dots\dots & 12,910,324
 \end{array}$$

526**PRUEBA DEL 9 EN LA RAÍZ CÚBICA**

Se halla el residuo entre 9 de la cantidad subradical y de la raíz. El residuo entre 9 de la raíz se eleva al cubo; a este cubo se le halla el residuo entre 9 y este residuo se suma con el residuo entre 9 del residuo de la raíz cúbica, si lo hay. El residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 de la cantidad subradical.

Así, en la raíz cúbica siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{} 1,953,264 & 125 \\
 - 1 & 3 \times 1^2 = 3 \\
 \hline
 09,53 & \\
 - 728 & \\
 \hline
 2252,64 & \\
 - 225125 & 3 \times 12^2 = 432 \\
 \hline
 000139 &
 \end{array}$$

Pruebas:

$$\begin{aligned}
 3 \times 1^2 \times 2 \times 100 &= 600 \\
 3 \times 1 \times 2^2 \times 10 &= 120 \\
 2^3 &= 8 \\
 \hline
 &728
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \times 12^2 \times 5 \times 100 &= 216,000 \\
 3 \times 12 \times 5^2 \times 10 &= 9,000 \\
 5^3 &= 125 \\
 \hline
 &225,125
 \end{aligned}$$

la prueba del 9 sería:

Residuo entre 9 de 1,953,264.	3
Residuo entre 9 de 125.	8
Cubo de este residuo.	512
Residuo entre 9 de este cubo.	8
Residuo entre 9 de 139.	4
Suma de estos dos últimos residuos.	12
Residuo entre 9 de esta suma.	3

Hallar la raíz cúbica de:

- | | | | |
|--------------|------------------|---------------------|--------------------------|
| 1. 2,744 | R. 14 | 10. 28,372,625 | R. 305 |
| 2. 1,250 | R. 10 res. 250 | 11. 77,308,776 | R. 426 |
| 3. 5,832 | R. 18 | 12. 181,321,496 | R. 566 |
| 4. 12,167 | R. 23 | 13. 356,794,011 | R. 709 res. 393,182 |
| 5. 19,103 | R. 26 res. 1,527 | 14. 876,532,784 | R. 957 res. 65,291 |
| 6. 91,125 | R. 45 | 15. 1,003,567,185 | R. 1,001 res. 564,184 |
| 7. 912,673 | R. 97 | 16. 196,874,325,009 | R. 5,817 res. 41,651,496 |
| 8. 186,345 | R. 57 res. 1,152 | 17. 41,278,242,816 | R. 3,456 |
| 9. 1,030,301 | R. 101 | 18. 754,330,668,451 | R. 9,103 res. 14,132,724 |

236

Ejercicio

TEOREMA

El residuo de la raíz cúbica de un número entero es siempre menor que el triple del cuadrado de la raíz, más el triple de la raíz, más 1.

Sea A un número entero, N su raíz cúbica inexacta por defecto y R el residuo. Tendremos:

$$A = N^3 + R$$

527

Siendo N la raíz cúbica inexacta por defecto de A , $N + 1$ será la raíz cúbica por exceso y tendremos:

$$A < (N + 1)^3, \text{ o sea, } A < N^3 + 3N^2 + 3N + 1$$

Ahora bien, como $A = N^3 + R$, en lugar de A podemos poner $N^3 + R$ y la última desigualdad se convierte en:

$$N^3 + R < N^3 + 3N^2 + 3N + 1$$

Suprimiendo N^3 en los dos miembros de la desigualdad anterior, ésta no varía y nos queda:

$$R < 3N^2 + 3N + 1$$

que era lo que queríamos demostrar.

II. RAÍZ CÚBICA DE LOS DECIMALES

REGLA

528

Se separa el número decimal en grupos de tres cifras a derecha e izquierda del punto decimal, teniendo cuidado de añadir uno o dos ceros al último grupo de la derecha si quedara con dos o una cifra decimal. Hecho esto, se extrae la raíz cúbica como si fuera un entero, poniendo punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo decimal o también separando en la raíz, de derecha a izquierda, con un punto decimal, tantas cifras como sea la tercera parte de las cifras decimales del número dado.

Ejemplo

Extraer la raíz cúbica de 143.0003.

$\begin{array}{r} \sqrt{143.000,300} \\ - 125 \\ \hline 180,00 \\ - 15608 \\ \hline 23923,00 \\ - 1628648 \\ \hline 763652 \end{array}$	$\begin{array}{l} \bullet 5.22 \\ 3 \times 5^2 = 75 \\ 180 \div 75 = 2 \\ 3 \times 52^2 = 8,112 \\ 23,923 \div 8,112 = 2 \end{array}$
---	---

Pruebas:

$$\begin{array}{r} 3 \times 5^2 \times 2 \times 100 = 15,000 \\ 3 \times 5 \times 2^2 \times 10 = 600 \\ 2^3 = 8 \\ \hline 15,608 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 52^2 \times 2 \times 100 = 1,622,400 \\ 3 \times 52 \times 2^2 \times 10 = 6,240 \\ 2^3 = 8 \\ \hline 1,628,648 \end{array}$$

Prueba:

$$\begin{array}{r} 5.22^3 = 142.236648 \\ + 0.763652 \\ \hline 143.000300 \end{array}$$

Obsérvese que al dividir en grupos de tres cifras, a partir del punto decimal, como el último grupo de la derecha, 3, quedaba con una sola cifra, le añadimos dos ceros. El punto decimal, lo hemos puesto en la raíz al bajar el grupo 000, que es el primer grupo decimal.

237

Ejercicio

Hallar la raíz cúbica de:

- | | | | |
|--------------|-----------------------|------------------|---------------------------|
| 1. 0.05 | R. 0.3 res. 0.023 | 9. 874.00356 | R. 9.56 res. 0.280744 |
| 2. 6.03 | R. 1.8 res. 0.198 | 10. 187.1536 | R. 5.72 res. 0.004352 |
| 3. 14.003 | R. 2.4 res. 0.179 | 11. 0.0082505 | R. 0.202 res. 0.000008092 |
| 4. 0.000064 | R. 0.04 | 12. 4.0056325 | R. 1.588 res. 0.001103028 |
| 5. 0.00018 | R. 0.05 res. 0.000055 | 13. 70240.51778 | R. 41.26 res. 0.005404 |
| 6. 912.98 | R. 9.7 res. 0.307 | 14. 343.44121388 | R. 7.003 res. 0.000024853 |
| 7. 1.04027 | R. 1.01 res. 0.009969 | 15. 512.76838407 | R. 8.004 res. 0.000000006 |
| 8. 221.44516 | R. 6.05 res. 0.000035 | | |

III. RAÍZ CÚBICA DE LOS QUEBRADOS

CASOS QUE OCURREN

529

Pueden ocurrir dos casos: 1) Que el denominador del quebrado sea cubo perfecto. 2) Que el denominador del quebrado no sea cubo perfecto.

1) Raíz cúbica de un quebrado cuando el denominador es cubo perfecto.

REGLA

Se extrae la raíz cúbica del numerador y denominador, simplificando la raíz del numerador si no es exacta.

$$1) \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4} \quad \text{R.}$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{16}{125}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}{5} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{5} \quad \text{R.}$$

$$\text{o también } \sqrt[3]{\frac{16}{125}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5} \text{ con error } < \frac{1}{5}$$

$$3) \sqrt[3]{\frac{135}{729}} = \frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{\sqrt[3]{3^3 \cdot 5}}{9} = \frac{3\sqrt[3]{5}}{9} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{5} \quad \text{R.}$$

$$\text{o también } \sqrt[3]{\frac{135}{729}} = \frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{5}{9} \text{ con error } < \frac{1}{9}$$

OBSERVACIÓN

En el ejemplo 2 decimos que $\frac{2}{5}$ es la raíz cúbica de $\frac{16}{125}$ con error menor que $\frac{1}{5}$. En efecto: $\frac{2}{5}$ es menor que la raíz cúbica exacta de $\frac{16}{125}$ porque elevando $\frac{2}{5}$ al cubo se tiene $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125} < \frac{16}{125}$. Sin embargo, lo que falta a $\frac{2}{5}$ para ser la raíz cúbica exacta de $\frac{16}{125}$ es menos que $\frac{1}{5}$ porque si a $\frac{2}{5}$

Ejemplos

le añadimos $\frac{1}{5}$ nos da $\frac{3}{5}$ y $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} > \frac{16}{125}$. Así que la verdadera raíz de $\frac{16}{125}$ es mayor que $\frac{2}{5}$ y menor que $\frac{3}{5}$ o sea que a $\frac{2}{5}$ le falta menos de $\frac{1}{5}$ para ser la raíz cúbica exacta de $\frac{16}{125}$.

238

Ejercicio

1. $\frac{8}{27}$

R. $\frac{2}{3}$

2. $\frac{64}{125}$

R. $\frac{4}{5}$

3. $\frac{343}{216}$

R. $1\frac{1}{6}$

4. $\frac{24}{343}$

R. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{3}$ o $\frac{2}{7}$

5. $\frac{250}{512}$

R. $\frac{5}{8}\sqrt[3]{2}$ o $\frac{3}{4}$

6. $\frac{32}{729}$

R. $\frac{2}{9}\sqrt[3]{4}$ o $\frac{1}{3}$

7. $\frac{375}{1,000}$

R. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$ o $\frac{7}{10}$

8. $\frac{54}{1,331}$

R. $\frac{3}{11}\sqrt[3]{2}$ o $\frac{3}{11}$

9. $\frac{686}{1,728}$

R. $\frac{7}{12}\sqrt[3]{2}$ o $\frac{2}{3}$

10. $\frac{160}{2,197}$

R. $\frac{2}{13}\sqrt[3]{20}$ o $\frac{5}{13}$

11. $\frac{24}{2,744}$

R. $\frac{1}{7}\sqrt[3]{3}$ o $\frac{1}{7}$

12. $\frac{125}{2,197}$

R. $\frac{5}{13}$

13. $\frac{54}{3,375}$

R. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{2}$ o $\frac{1}{5}$

14. $\frac{128}{4,096}$

R. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$ o $\frac{5}{16}$

15. $\frac{375}{8,000}$

R. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}$ o $\frac{7}{20}$

2) Raíz cúbica de un quebrado cuando el denominador no es cubo perfecto.

Cuando el denominador del quebrado no es cubo perfecto, pueden presentarse los dos casos siguientes.

a) Que al simplificar el quebrado obtengamos un denominador cubo perfecto, con lo cual estaremos en el caso anterior.

Ejemplo

Hallar la raíz cúbica de $\frac{108}{250}$.

Simplificando el quebrado, tenemos: $\frac{108}{250} = \frac{54}{125}$

El denominador de este último quebrado, 125, es cubo perfecto, luego podemos aplicar la regla del caso anterior:

$$\sqrt[3]{\frac{108}{250}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{5} = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^3}}{5} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{5} \quad \text{R.}$$

239

Hallar la raíz cúbica de:

1. $\frac{2}{16}$

R. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{5}{135}$

R. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{27}{81}$

R. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$ o $\frac{2}{3}$

4. $\frac{135}{320}$

R. $\frac{3}{4}$

5. $\frac{160}{1,250}$

R. $\frac{2}{5}\sqrt[3]{2}$ o $\frac{2}{5}$

6. $\frac{56}{1,512}$

R. $\frac{1}{3}$

7. $\frac{243}{3,037}$

R. $\frac{3}{7}$

8. $\frac{324}{2,048}$

R. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{3}$ o $\frac{1}{2}$

9. $\frac{5}{1,080}$

R. $\frac{1}{6}$

10. $\frac{6}{24}$

R. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ o $\frac{1}{2}$

11. $\frac{45}{1,029}$

R. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{15}$ o $\frac{2}{7}$

12. $\frac{20}{1,024}$

R. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{10}$ o $\frac{1}{4}$

b) Que el quebrado sea irreducible o que, después de simplificado, el denominador no sea cubo perfecto.

- 1) Hallar la raíz cúbica de $\frac{15}{20}$.

Simplificando el quebrado tenemos $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Como el denominador 4, no es cubo perfecto, hay que *racionalizar el denominador*, multiplicando los dos términos del quebrado por 2, porque de esa manera queda $4 \times 2 = 8$, cubo perfecto, y tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{15}{20}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 2}}{\sqrt[3]{4 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{6} \quad \text{R.}$$

- 2) Hallar la raíz cúbica de $\frac{8}{25}$.

Este quebrado es irreducible. Hay que *racionalizar el denominador*, multiplicando los dos términos del quebrado por 5, porque con ello se tiene $25 \times 5 = 125$, cubo perfecto, y tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{25}} = \frac{\sqrt[3]{8 \cdot 5}}{\sqrt[3]{25 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}}{5} = \frac{2 \sqrt[3]{5}}{5} = \frac{2}{5} \sqrt[3]{5} \quad \text{R.}$$

- 3) Hallar la raíz cúbica de $\frac{7}{675}$.

Cuando el denominador es un número alto, como en este caso, no es fácil ver por qué número hay que multiplicar los dos términos del quebrado para que el denominador se convierta en cubo perfecto. En casos como éste debe descomponerse el denominador en factores primos y tendremos:

$$675 = 3^3 \cdot 5^2$$

Aquí vemos que 675 no es cubo perfecto porque el exponente del factor primo 5 no es múltiplo de 3. Para que se convierta en cubo perfecto es necesario que este exponente sea múltiplo de 3 y para eso bastará multiplicar 675 por 5, porque tendremos: $675 \times 5 = 3^3 \times 5^3$. Así que hay que multiplicar los dos términos del quebrado por 5 y tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{7}{675}} = \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 5}{675 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3}} = \frac{\sqrt[3]{35}}{3 \cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{35}}{15} = \frac{1}{15} \sqrt[3]{35} \quad \text{R.}$$

- 4) Hallar la raíz cúbica de $\frac{11}{900}$.

Descomponiendo 900 en sus factores primos tenemos: $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Para que 900 se convierta en cubo perfecto hay que lograr que los exponentes de 2, 3 y 5 sean múltiplos de 3; para eso hay que multiplicar 900 por 2, por 3 y por 5, o sea por 30, y tendremos: $900 \times 30 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$.

Así que hay que multiplicar los dos términos del quebrado por 30 y tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{11}{900}} = \sqrt[3]{\frac{11 \times 30}{900 \times 30}} = \frac{\sqrt[3]{330}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3}} = \frac{\sqrt[3]{330}}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{330}}{30} = \frac{1}{30} \sqrt[3]{330} \quad \text{R.}$$

240

Hallar la raíz cúbica de:

Ejercicio

- | | | | | | | | |
|--------------------|-------------------------------|----------------------|--------------------------------|-------------------------|-------------------------------|-----------------------|----------------------------------|
| 1. $\frac{1}{2}$ | R. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ | 9. $\frac{3}{64}$ | R. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}$ | 17. $\frac{11}{54}$ | R. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{44}$ | 25. $\frac{7}{2,000}$ | R. $\frac{1}{20}\sqrt[3]{28}$ |
| 2. $\frac{5}{9}$ | R. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{15}$ | 10. $\frac{8}{81}$ | R. $\frac{2}{9}\sqrt[3]{9}$ | 18. $\frac{81}{250}$ | R. $\frac{3}{10}\sqrt[3]{12}$ | 26. $\frac{11}{300}$ | R. $\frac{1}{30}\sqrt[3]{990}$ |
| 3. $\frac{11}{32}$ | R. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{22}$ | 11. $\frac{5}{36}$ | R. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{30}$ | 19. $\frac{125}{192}$ | R. $\frac{5}{12}\sqrt[3]{9}$ | 27. $\frac{13}{400}$ | R. $\frac{1}{20}\sqrt[3]{260}$ |
| 4. $\frac{5}{7}$ | R. $\frac{1}{7}\sqrt[3]{245}$ | 12. $\frac{5}{13}$ | R. $\frac{1}{13}\sqrt[3]{845}$ | 20. $\frac{343}{500}$ | R. $\frac{7}{10}\sqrt[3]{2}$ | 28. $\frac{23}{540}$ | R. $\frac{1}{30}\sqrt[3]{1,150}$ |
| 5. $\frac{9}{16}$ | R. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{36}$ | 13. $\frac{1}{20}$ | R. $\frac{1}{10}\sqrt[3]{50}$ | 21. $\frac{5}{432}$ | R. $\frac{1}{12}\sqrt[3]{20}$ | 29. $\frac{29}{600}$ | R. $\frac{1}{30}\sqrt[3]{1,305}$ |
| 6. $\frac{3}{25}$ | R. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$ | 14. $\frac{27}{200}$ | R. $\frac{3}{10}\sqrt[3]{5}$ | 22. $\frac{9}{686}$ | R. $\frac{1}{14}\sqrt[3]{36}$ | 30. $\frac{51}{800}$ | R. $\frac{1}{20}\sqrt[3]{510}$ |
| 7. $\frac{13}{36}$ | R. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{78}$ | 15. $\frac{5}{108}$ | R. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{10}$ | 23. $\frac{729}{1,536}$ | R. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{9}$ | | |
| 8. $\frac{8}{49}$ | R. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{7}$ | 16. $\frac{7}{24}$ | R. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{63}$ | 24. $\frac{64}{2,187}$ | R. $\frac{4}{27}\sqrt[3]{9}$ | | |

530

RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS MIXTOS**REGLA**

Se reduce el mixto a quebrado y se extrae la raíz cúbica de este quebrado.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{5\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{\frac{46}{9}} = \frac{\sqrt[3]{46 \cdot 3}}{\sqrt[3]{9 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{138}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{138}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{138} \quad \text{R.}$$

241

Hallar la raíz cúbica de:

Ejercicio

- | | | | | | |
|--------------------|-------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|
| 1. $1\frac{1}{8}$ | R. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$ | 4. $3\frac{2}{125}$ | R. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{377}$ | 7. $3\frac{1}{500}$ | R. $\frac{1}{10}\sqrt[3]{3,002}$ |
| 2. $3\frac{1}{16}$ | R. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{196}$ | 5. $4\frac{7}{81}$ | R. $\frac{1}{9}\sqrt[3]{2,979}$ | 8. $1\frac{43}{200}$ | R. $\frac{3}{10}\sqrt[3]{45}$ |
| 3. $6\frac{2}{3}$ | R. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{180}$ | 6. $2\frac{43}{343}$ | R. $1\frac{2}{7}$ | 9. $8\frac{1}{9}$ | R. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{219}$ |

531

RAÍZ CÚBICA DE FRACCIONES COMUNES QUE NO SEAN CUBOS PERFECTOS MEDIANTE LA REDUCCIÓN A DECIMAL

Cuando el denominador de una fracción común no es cubo perfecto puede también hallarse la raíz cúbica de dicha fracción reduciéndola a fracción decimal y hallando la raíz cúbica de ésta.

Hallar la raíz cúbica de $\frac{5}{7}$.

Reduciendo a decimal:

$$\begin{array}{r} 0.714285... \\ 7 \overline{) 5.000000} \\ \underline{10} \\ 30 \\ \underline{20} \\ 60 \\ \underline{40} \\ 5 \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{5}{7} = 0.714285...$$

Ahora hallamos la raíz cúbica de este decimal:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{0.714,285} \quad 0.89 \\ - 512 \\ \hline 202,85 \\ - 192969 \\ \hline 009316 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \times 8^2 = 192 \\ 2022 \div 192 = 9 \end{array}$$

Prueba:

$$\begin{array}{r} 3 \times 8^2 \times 9 \times 100 = 172,800 \\ 3 \times 8 \times 9^2 \times 10 = 19,440 \\ 9^3 = 729 \\ \hline 192,969 \end{array}$$

luego $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = 0.89$ R.

Ejemplo

Hallar la raíz cúbica de las fracciones siguientes, mediante la reducción a decimal:

1. $\frac{3}{4}$ R. 0.908 res. 0.001386688

7. $\frac{2}{15}$ R. 0.5108 res. 0.000057113621

2. $\frac{5}{8}$ R. 0.854 res. 0.002164136

8. $\frac{11}{40}$ R. 0.65 res. 0.000375

3. $\frac{2}{3}$ R. 0.873 res. 0.001328049

9. $\frac{17}{5}$ R. 1.503 res. 0.004709473

4. $\frac{5}{9}$ R. 0.822 res. 0.000143307

10. $4\frac{1}{10}$ R. 1.6005 res. 0.000158799875

5. $\frac{3}{14}$ R. 0.598 res. 0.000438522

11. $3\frac{2}{21}$ R. 1.45 res. 0.046613

6. $\frac{7}{13}$ R. 0.813 res. 0.001093741

12. $8\frac{5}{28}$ R. 2.01 res. 0.05797

242

Ejercicio

MÉTODO ABREVIADO PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA

532

Cuando se quiere hallar la raíz cúbica de un número de muchas cifras se puede abreviar la operación, aplicando la siguiente regla:

Se hallan, por el método explicado, la mitad más 1 de las cifras de la raíz. Para hallar las cifras restantes, se bajan todos los periodos que falten por bajar y se divide el número así formado entre el triple del cuadrado de la parte de raíz hallada, seguido de tantos grupos de dos ceros como periodos faltaban por bajar.

El cociente de esta división será la parte que falta de la raíz cúbica.

Si el número de cifras de este cociente es menor que el número de cifras que faltan en la raíz, se escriben entre la parte hallada por el método corriente y el cociente de esta división los ceros necesarios para completar las cifras que se necesitan.

El residuo de la raíz cúbica se obtiene restándole al residuo de la división la suma del cubo del cociente, más el triple del cuadrado del cociente multiplicado por la parte de raíz hallada por el método corriente, reducida a unidades.

Ejemplo

Extraer la raíz cúbica de 1,009,063,243,757,297,728 por el método abreviado:

$ \begin{array}{r} \sqrt[3]{1,009,063,243,757,297,728} \\ \underline{-1} \\ 00\,090632,43 \\ \underline{-90270\,27} \\ 00362\,16757297728 \\ 060\,36487297728 \\ \text{Residuo de la división.} \dots\dots\dots 00\,00433297728 \\ 12^3 + 3 \times 12^2 \times 1003000 \dots\dots\dots - 433297728 \\ \text{Residuo de la raíz.} \dots\dots\dots 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1003012 \\ \hline 3 \times 1^2 = 3 \\ 3 \times 10^2 = 300 \\ 3 \times 100^2 = 30,000 \\ 3 \times 1,003^2 = 3,018,027 \\ \hline 3018027000000 \\ \hline 12 \end{array} $
--	---

Prueba de la cifra 3:

$3 \times 100^2 \times 3 \times 100 =$	9,000,000
$3 \times 100 \times 3^2 \times 10 =$	27,000
$3^3 =$	27
	9,027,027

EXPLICACIÓN

Como la cantidad subradical tiene 7 periodos en la raíz habrá 7 cifras.

Hemos hallado las cuatro primeras cifras 1,003 por el método corriente y tenemos un residuo que es 36,216. Bajamos los tres periodos que faltan por bajar y se forma el número 36,216,757,297,728. Este número lo dividimos entre el triple del cuadrado de la parte de raíz hallada 1,003 que es 3,018,027, pero añadimos a este número tres grupos de dos ceros, porque faltaban por bajar tres periodos y tenemos 3,018,027,000,000. Dividimos 36,216,757,297,728 entre 3,018,027,000,000 y nos da de cociente 12. Las cifras que escribimos en la raíz son 012 porque faltaban tres cifras y el cociente de esta división sólo tiene dos cifras.

Para hallar el residuo de la raíz, elevamos al cubo el cociente 12, $12^3 = 1,728$ y le sumamos $3 \times 12^2 \times 1,003,000 = 433,296,000$ y esta suma nos da 433,297,728. Esta suma la restamos del residuo de la división y vemos que la diferencia es 0, luego la raíz es exacta.

243

Ejercicio

Hallar, por el método abreviado, la raíz cúbica de:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1. 1,000,300,030,001 | R. 10,001 |
| 2. 8,244,856,482,408 | R. 20,202 |
| 3. 27,000,810,008,100,027 | R. 300,003 |
| 4. 1,371,775,034,556,928 | R. 111,112 |
| 5. 10,973,933,607,682,085,048 | R. 2,222,222 |
| 6. 1,866,459,733,247,500,606 | R. 1,231,231 res. 1,215 |

IV. APROXIMACIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA

RAÍZ CÚBICA DE UN ENTERO CON APROXIMACIÓN DECIMAL

533

REGLA

Para extraer la raíz cúbica de un entero con una aproximación de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se pone punto decimal al entero y se le añade triple número de ceros que las cifras decimales de la aproximación. Hecho esto, se extrae la raíz cúbica, teniendo cuidado de poner el punto decimal al bajar el primer grupo decimal.

De esta regla se deduce que para hallar la raíz cúbica de un entero con **aproximación de 0.1**, ponemos punto decimal al entero y le añadimos **tres ceros**; para hallar la raíz con error menor que **0.01**, añadiremos **seis ceros**; para hallar la raíz en menos de **0.001**, añadiremos **nueve ceros**, y así sucesivamente.

 $\sqrt[3]{17}$ con aproximación de 0.01.

$\sqrt[3]{17.000,000}$	2.57
- 8	$3 \times 2^2 = 12$
90,00	$90 \div 12 = 7$
- 7625	$3 \times 25^2 = 1,875$
13750,00	$13,750 \div 1,875 = 7$
- 1349593	
25407	

Pruebas:

$3 \times 2^2 \times 5 \times 100 =$	6,000
$3 \times 2 \times 5^2 \times 10 =$	1,500
$5^3 =$	125
	7,625
$3 \times 25^2 \times 7 \times 100 =$	1,312,500
$3 \times 25 \times 7^2 \times 10 =$	36,750
$7^3 =$	343
	1,349,593

Ejemplos

Hallar la raíz cúbica de:

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1. 7 con aprox. de 0.1 | R. 1.9 res. 0.141 |
| 2. 251 " " " 0.1 | R. 6.3 res. 0.953 |
| 3. 232 " " " 0.01 | R. 6.14 res. 0.524456 |
| 4. 2 " " " 0.01 | R. 1.25 res. 0.046875 |

244

Ejercicio

5. 520 con aprox. de 0.01	R. 8.04 res. 0.281536
6. 542 " " " 0.01	R. 8.15 res. 0.656625
7. 874 " " " 0.01	R. 9.56 res. 0.277184
8. 54 " " " 0.001	R. 3.779 res. 0.032701861
9. 72 " " " 0.0001	R. 4.1601 res. 0.003512195199
10. 162 " " " 0.0001	R. 5.4513 res. 0.005507616303

534

RAÍZ CÚBICA DE UN DECIMAL CON APROXIMACIÓN DECIMAL

REGLA

Para extraer la raíz cúbica de un decimal con aproximación de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se añaden al decimal los ceros necesarios para que el número total de cifras decimales del decimal sea el triple de las cifras decimales de la aproximación. Hecho esto, se extrae la raíz cúbica, teniendo cuidado de poner punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo.

Ejemplo

 $\sqrt[3]{5.03}$ con aproximación de 0.01.

 $\sqrt[3]{5.030,000}$

-1

40,30

-39 13

01 170,00

- 872 11

297 89

1.71

$$3 \times 1^2 = 3$$

$$40 \div 3 = 13$$

$$3 \times 17^2 = 867$$

$$1,170 \div 867 = 1$$

Pruebas:

$$3 \times 1^2 \times 7 \times 100 = 2,100$$

$$3 \times 1 \times 7^2 \times 10 = 1,470$$

$$7^3 = 343$$

$$3,913$$

$$3 \times 17^2 \times 1 \times 100 = 86,700$$

$$3 \times 17 \times 1^2 \times 10 = 510$$

$$1^3 = 1$$

$$87,211$$

245

Hallar la raíz cúbica de:

Ejercicio

1. 5.4	en menos de 0.01	R. 1.75 res. 0.040625
2. 18.65	" " " 0.01	R. 2.65 res. 0.040375
3. 746.2	" " " 0.01	R. 9.07 res. 0.057357
4. 231.48	" " " 0.01	R. 6.14 res. 0.004456
5. 28.03	" " " 0.001	R. 3.037 res. 0.018628347
6. 0.00399	" " " 0.0001	R. 0.1586 res. 0.000000581944
7. 0.0000061	" " " 0.0001	R. 0.0182 res. 0.000000071432
8. 0.0000334	" " " 0.0001	R. 0.0322 res. 0.000000013752
9. 0.0056	" " " 0.00001	R. 0.17758 res. 0.000000075716488
10. 0.000000349	" " " 0.00001	R. 0.00704 res. 0.000000000086336

RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO CON APROXIMACIÓN FRACCIONARIA

535

REGLA

Para extraer la raíz cúbica de un número en menos de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, se multiplica el número dado por el cubo del denominador de la aproximación buscada; se halla la raíz cúbica de este producto y esta raíz cúbica se divide entre el denominador de la aproximación buscada.

Ejemplos

1) $\sqrt[3]{56}$ con error $< \frac{1}{3}$.

56 se multiplica por el cubo de: $56 \times 27 = 1,512$

Se halla la raíz cúbica de 1,512: $\sqrt[3]{1,512} = 11$

11 se divide entre 3: $11 \div 3 = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ R.

2) $\sqrt[3]{0.16}$ en menos de $\frac{1}{5}$.

Multiplicamos 0.16 por el cubo de 5: $0.16 \times 125 = 20$

Extraemos la raíz cúbica de 20: $\sqrt[3]{20} = 2$

2 se divide entre 5: $2 \div 5 = \frac{2}{5} = 0.4$ R.

3) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ en menos de $\frac{1}{4}$.

Multiplicamos $\frac{5}{27}$ por el cubo de 4: $\frac{5}{27} \times 64 = \frac{320}{27}$

Extraemos la raíz cúbica de $\frac{320}{27}$: $\sqrt[3]{\frac{320}{27}} = \frac{\sqrt[3]{320}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{6}{3} = 2$

2 se divide entre 4: $2 \div 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ R.

Hallar la raíz cúbica de:

1. 25 con error $< \frac{1}{4}$

R. $2\frac{3}{4}$

2. 60 " " $< \frac{1}{5}$

R. $3\frac{4}{5}$

3. 96 " " $< \frac{1}{6}$

R. $4\frac{1}{2}$

4. 120 " " $< \frac{1}{7}$

R. $4\frac{6}{7}$

5. 185 " " $< \frac{1}{8}$

R. $5\frac{5}{8}$

6. 300 con error $< \frac{1}{9}$

R. $6\frac{2}{3}$

7. 800 " " $< \frac{1}{10}$

R. $9\frac{1}{5}$

8. 1,050 " " $< \frac{1}{8}$

R. $10\frac{1}{8}$

9. 2,000 " " $< \frac{1}{4}$

R. $12\frac{1}{2}$

10. 19 " " $< \frac{1}{9}$

R. $2\frac{2}{3}$

246

Ejercicio

11. 0.6 con error $< \frac{1}{3}$	R. $\frac{5}{6}$	15. $\frac{1}{18}$ con error $< \frac{1}{6}$	R. $\frac{1}{3}$
12. 3.83 " " $< \frac{1}{9}$	R. $1\frac{5}{9}$	16. $\frac{3}{4}$ " " $< \frac{1}{10}$	R. $\frac{9}{10}$
13. 0.04 " " $< \frac{1}{5}$	R. $\frac{1}{5}$	17. $3\frac{1}{2}$ " " $< \frac{1}{4}$	R. $1\frac{1}{2}$
14. $\frac{1}{5}$ " " $< \frac{1}{4}$	R. $\frac{11}{20}$	18. $5\frac{4}{5}$ " " $< \frac{1}{3}$	R. $1\frac{11}{15}$

APLICACIONES DE LA RAÍZ CÚBICA

536

Una caja de forma cúbica tiene $27,000 \text{ cm}^3$ de volumen. ¿Cuál es su arista?

Si la caja es de forma cúbica, el largo es igual al ancho e igual a la altura, y como el volumen se halla multiplicando entre sí las tres dimensiones de la caja, $27,000 \text{ cm}^3$ es el producto de tres factores iguales, o sea el cubo de la arista; luego, la arista será: $\sqrt[3]{27,000} \text{ cm}^3 = 30 \text{ cm}$ R.

537

El volumen de una caja de forma cúbica es $216,000 \text{ cm}^3$. Si se corta la mitad superior, ¿cuáles serán las dimensiones de la nueva caja?

$\sqrt[3]{216,000} \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}$; luego, esta caja tiene 60 cm de largo, 60 cm de ancho y 60 cm de altura. Cortando la mitad superior resulta una caja de 60 cm de largo, 60 cm de ancho y 30 cm de altura. R.

538

Un comerciante compró cierto número de DVD por \$512. Si el precio de un DVD es el cuadrado del número de DVD comprados, ¿cuántos compró y cuánto costó cada uno?

El importe de la venta, \$512, es el producto del número de DVD por el precio de uno, pero como el precio de un DVD es el cuadrado del número de DVD, 512 es el cubo del número de DVD comprados; luego, el número de DVD comprados es $\sqrt[3]{512} = 8$ DVD, y el precio de un DVD, $8^2 = \$64$ R.

247

Ejercicio

- Una sala de forma cúbica tiene $3,375 \text{ m}^3$. Hallar sus dimensiones. R. 15 m
- Un cubo tiene $1,728 \text{ dm}^3$. ¿Cuál es la longitud de su arista? R. 12 dm
- ¿Cuáles serán las dimensiones de un depósito cúbico cuya capacidad es igual a la de otro depósito de 45 m de largo, 24 m de ancho y 25 m de alto. R. 30 m de arista
- A un depósito de 49 m de largo, 21 m de profundidad y 72 m de ancho se le quiere dar forma cúbica, sin que varíe su capacidad. ¿Qué alteración sufrirán sus dimensiones?
R. El largo disminuye 7 m, el ancho 30 m y la profundidad aumenta 21 m.
- ¿Cuál será la arista de un cubo cuyo volumen es $\frac{3}{4}$ del volumen de una pirámide de $288,000 \text{ m}^3$?
R. 60 m

6. Una caja de forma cúbica tiene $2,197 \text{ cm}^3$. Si se corta la mitad superior, ¿cuáles serán las dimensiones de lo restante? **R. 13 m largo y ancho; 6.50 m alto.**
7. ¿Cuál es el número cuyo cubo, multiplicado por 4, da 256? **R. 4**
8. La suma de los cubos de dos números es 91 y el número menor es 3. Hallar el número mayor.
R. 4
9. La suma de los cubos de dos números es 468 y el número mayor es 7. Hallar el número menor.
R. 5
10. La suma de los cubos de dos números es 728 y los $\frac{2}{3}$ del cubo del número menor equivalen a 144. Hallar el mayor. **R. 8**
11. En un depósito hay $250,047 \text{ dm}^3$ de agua, la cual adopta la forma de cubo. Si el agua llega a 15 dm del borde, ¿cuáles serán las dimensiones del estanque? **R. 63 dm de ancho y largo; 78 dm de alto.**
12. ¿Por cuál número habrá que multiplicar la raíz cúbica de 1,331 para que dé 3.3? **R. Por 0.3**
13. ¿Entre cuál número hay que dividir la raíz cúbica de 5,832 para obtener 0.2 de cociente?
R. Entre 90
14. El cubo de un número multiplicado por 3 y dividido entre 7 da por resultado 147. Hallar el número.
R. 7
15. ¿Cuál es el número cuyo cubo aumentado en 4; disminuyendo esta suma en 41; multiplicando esta diferencia por 2 y dividiendo el producto entre 74 da por resultado 1,368? **R. 37**
16. Se compra cierto número de CD por \$729. Si el número de CD comprados es el cuadrado del precio de un CD, ¿cuántos CD se compraron y cuánto costó cada uno? **R. 81 CD, \$9**
17. Se ha comprado cierto número de libros pagando por cada uno una cantidad igual al cuadrado del número de libros comprados. Si hubiera comprado dos libros más y hubiera pagado por cada uno una cantidad igual al cuadrado de este número nuevo de libros hubiera pagado por ellos \$2,197. ¿Cuántos libros he comprado y cuánto pagué por cada uno? **R. 11 libros; \$121**
18. El quinto de un número multiplicado por el cuadrado del mismo número da por resultado 200. Hallar el número. **R. 10**
19. Un comerciante compró cierto número de cajas grandes de madera, las que contenían paquetes de corbatas. En cada caja de madera hay 1,024 paquetes de corbatas. Si el número de paquetes de corbatas de cada caja de madera es el doble del cubo del número de cajas de madera, ¿cuántas cajas de madera compró el comerciante y cuántos paquetes de corbatas? **R. 8; 8,192**
20. La altura de una caja es el triple de su longitud y de su ancho. Si el volumen de la caja es de $24,000 \text{ cm}^3$, ¿cuáles son las dimensiones de la caja? **R. 20 cm de largo y ancho; 60 cm de altura.**



El primero que propuso un sistema decimal para las medidas fue el matemático flamenco **Simón Stevin**. Transcurrieron dos siglos hasta que en 1790, **Talleyrand** llamó la atención de la Asamblea Nacional Francesa para que buscara un siste-

ma uniforme de medidas. Después de designar una comisión de cinco miembros para realizar los estudios necesarios, la Asamblea adoptó el **Sistema Métrico Decimal**.

Capítulo **XXXV**

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

539

MAGNITUD EN GENERAL

Se ha visto (8) que **magnitud** es todo lo abstracto que puede compararse y sumarse y que **cantidad** es todo estado de una magnitud.

Así, la **longitud** es una magnitud y la longitud de una regla o la de una sala son cantidades; el **peso** es una magnitud y mi peso o el de un libro son cantidades; la **velocidad** es una magnitud y la velocidad de un auto o la de un tren son cantidades.

540

CANTIDADES MENSURABLES son las cantidades que pueden **medirse**. Tales son las cantidades continuas.

La comparación de cantidades homogéneas (de la misma magnitud) puede verificarse a veces **directamente**.

Así, yo puedo comparar la longitud de una regla con la longitud de un libro, poniendo el libro junto a la regla de modo que uno de sus extremos coincida, y de este modo podré ver si el libro y la regla tienen igual longitud o si uno es más largo que el otro.

Del mismo modo, es fácil comparar el peso de dos objetos poniendo uno de ellos en un platillo de una balanza y otro en el otro platillo. Si la balanza queda en equilibrio, ambos pesos

son iguales, y si uno de los platillos queda más bajo que el otro, el peso del objeto que se halle en el platillo más bajo es mayor que el peso del objeto que se halla en el otro.

MEDICIÓN

541

La comparación directa de cantidades de la misma magnitud de que se ha hablado en el número anterior, no siempre es posible. Así, yo no podría comparar de ese modo la longitud de la sala de mi casa y la longitud de otra sala.

En estos casos se verifica la comparación **indirecta**, que consiste en comparar cada una de las cantidades dadas con otra cantidad de la misma magnitud elegida como **unidad de medida**, y esta operación se llama **medición**.

Así, en el ejemplo citado, yo tomaré la cantidad elegida como unidad de medida, por ejemplo el metro, y lo llevaré sobre la longitud de la sala de mi casa.

De este modo veré cuántas veces la cantidad (longitud de la sala de mi casa) contiene a la unidad (el metro). Supongamos que la contiene 5 veces. Entonces 5 **metros** es la **medida** de la longitud de mi sala. Repetiré entonces la operación con la otra sala y supongamos que la longitud de ésta contiene 4 veces el metro. 4 **metros** es la **medida** de la otra sala. Entonces ya yo sé que la longitud de la sala de mi casa es mayor que la longitud de la otra sala.

De modo semejante podrían compararse los pesos de dos personas. Una de ellas se para en una pesa y vemos qué número de libras (unidad de medida) equilibra su peso. Supongamos que sean 120 libras. La otra hace lo mismo después que ella y supongamos que el peso que equilibra el suyo es 150 libras. 120 libras y 150 libras expresan las **medidas** de los pesos de ambas personas y yo sabré que la primera tiene menos peso que la segunda.

UNIDADES DE MEDIDA. DISTINTAS CLASES

542

Visto lo anterior podemos decir que **unidades de medida** son las cantidades elegidas para comparar con ellas las demás cantidades de su misma magnitud.

Medir una cantidad es compararla con la unidad de medida para saber cuántas veces la cantidad contiene a la unidad. Este número de veces seguido del **nombre** de la unidad expresa la **medida** de la cantidad.

Habiendo cantidades de distintas magnitudes y debiendo ser la unidad de la misma magnitud que la cantidad, habrá necesariamente distintas clases de unidades de medida.

Así, el metro, la vara, la yarda son unidades de medida para longitudes; el metro cuadrado, la vara cuadrada, la yarda cuadrada son unidades de medida para superficie; el metro cúbico y el pie cúbico son unidades de medida para el volumen; el gramo, la libra son unidades de medida para el peso; el litro es una unidad de medida para la capacidad.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL es el conjunto de medidas que se derivan del metro.

543

Es un **sistema** porque es un conjunto de medidas; **métrico**, porque su unidad fundamental es el metro; **decimal**, porque sus medidas aumentan y disminuyen como las potencias de 10.

544

ORIGEN

Debido a la gran variedad de medidas que se empleaban en los distintos países y aun en las provincias o regiones de un mismo país, lo que dificultaba las transacciones comerciales, en Francia surgió la idea de crear un sistema de medidas cuya unidad fundamental fuera la unidad de longitud, que ésta tuviera relación con las dimensiones de la Tierra y que sus diversas medidas guardaran entre sí la relación que guardan las potencias de 10.

En 1792, la Academia de Ciencias de París designó a los profesores Mechain y Delambre para que midieran el arco de meridiano comprendido entre las ciudades de Dunkerque, en Francia, y Barcelona, en España.

Hecha esta medida, y por cálculos sucesivos, se halló la longitud de la distancia del Polo Norte al Ecuador, o sea de un cuadrante de meridiano terrestre, y a la diezmillonésima parte de esa longitud se le llamó **metro**, que quiere decir **medida**, haciéndose una regla de platino de esa longitud.

Sin embargo, cálculos posteriores han hecho ver que hubo algo de error en esa medición, pues el cuadrante de meridiano terrestre no tiene diez millones de metros, sino 10,002,208 metros; por lo tanto, el metro no es exactamente, sino **aproximadamente** la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre; el metro es algo menor que la diezmillonésima parte del cuadrante.

La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas de París, en 1889, acordó que el **metro legal, patrón o tipo**, fuera la longitud, a 0° , de la distancia que existe entre las dos marcas que tiene cerca de sus extremos una regla de platino iridiado (Fig. 37), construida por el físico Borda. Este **metro legal internacional** fue depositado y se conserva en la oficina de Pesas y Medidas de Sévres.

El Sistema Internacional de Unidades (SI) es la versión moderna del sistema métrico decimal y hoy en día es el sistema de unidades más usado en todo el mundo. En el Reino Unido y los Estados Unidos de América el sistema inglés tradicional de unidades se ha reemplazado de modo gradual por el Sistema Internacional.

545

CLASES DE MEDIDAS

Hay cinco clases de medidas: de longitud, de superficie, de volumen, de capacidad y de peso.

546

UNIDADES DE LONGITUD. NOMENCLATURA

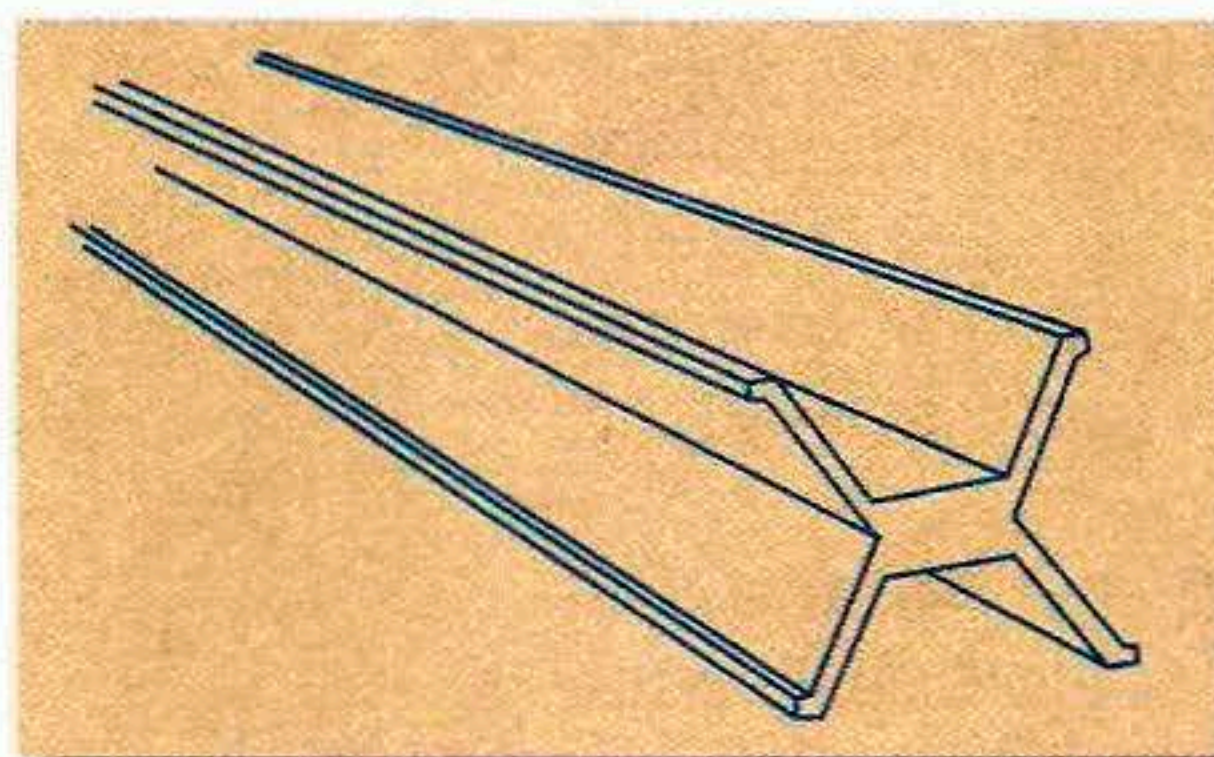
La unidad de las medidas de longitud es el **metro**, que se representa por **m**.

El metro es aproximadamente igual a la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre y en la actualidad se define como la distancia que recorre la luz en el vacío absoluto en $1/299,792,458$ s.

Los **múltiplos** del metro se forman anteponiendo a la palabra metro las palabras griegas **deca**, **hecto** y **kilo** que significan **diez**, **cien** y **mil**, y los submúltiplos se forman anteponiendo las palabras griegas **deci**, **centi** y **mili**, que significan **décima**, **centésima** y **milésima** parte.

Figura 37

Metro internacional



Estas medidas aumentan y disminuyen de **diez en diez**.
Los múltiplos y submúltiplos del metro son:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1,000 m	100 m	10 m	1	0.1 m	0.01 m	0.001 m

Para medidas de precisión muy pequeñas se usa la **micra** o milésima de milímetro (μm).

UNIDADES DE SUPERFICIE. NOMENCLATURA

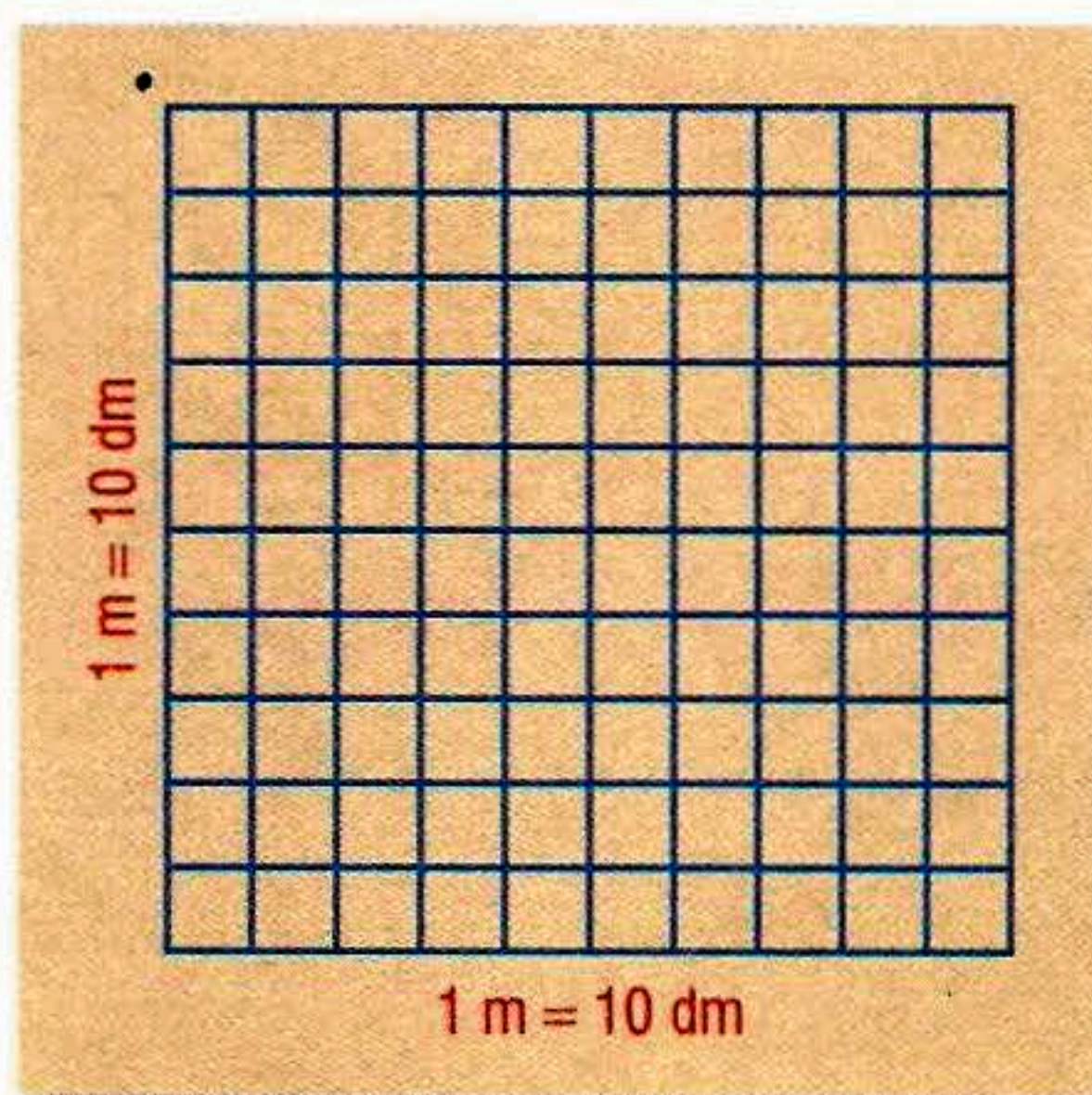
547

La **unidad** de las medidas de superficie (Fig. 38) es el **metro cuadrado**, que es un cuadrado que tiene de lado un metro lineal.

Se representa por m^2 .

Figura 38

Metro cuadrado



Estas medidas aumentan y disminuyen de **cien en cien**.
Los múltiplos y submúltiplos del m^2 son:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1,000,000 m^2	10,000 m^2	100 m^2	1	0.01 m^2	0.0001 m^2	0.000001 m^2

548

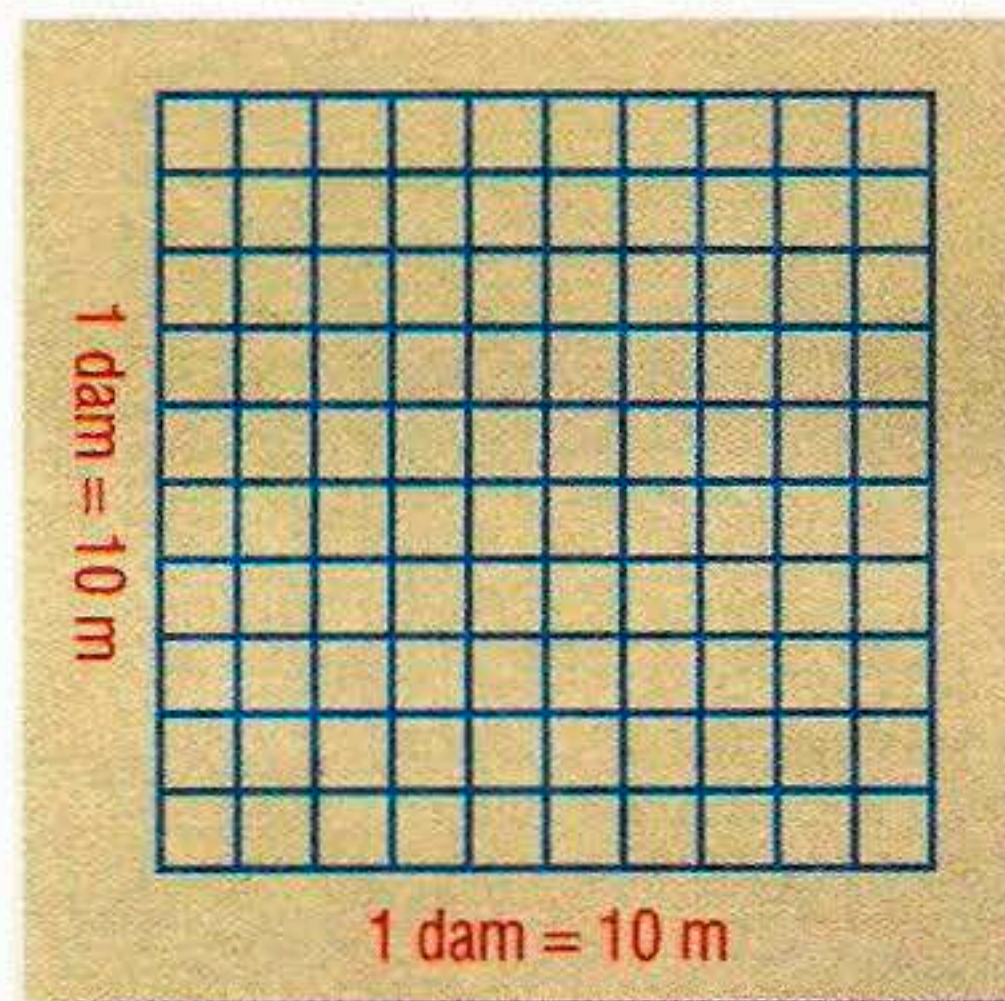
UNIDADES AGRARIAS. NOMENCLATURA

Cuando las medidas de superficie se aplican a la medición de tierras, se llaman **medidas agrarias**.

La unidad de las medidas agrarias es el **área** (Fig. 39), que equivale a un dam^2 y se representa abreviadamente por **a**.

Tiene un múltiplo, que es la **hectárea** (ha), que equivale al hm^2 y un submúltiplo, la **centiárea** (ca), que equivale al m^2 .

Figura 39

Área o dam^2 

549

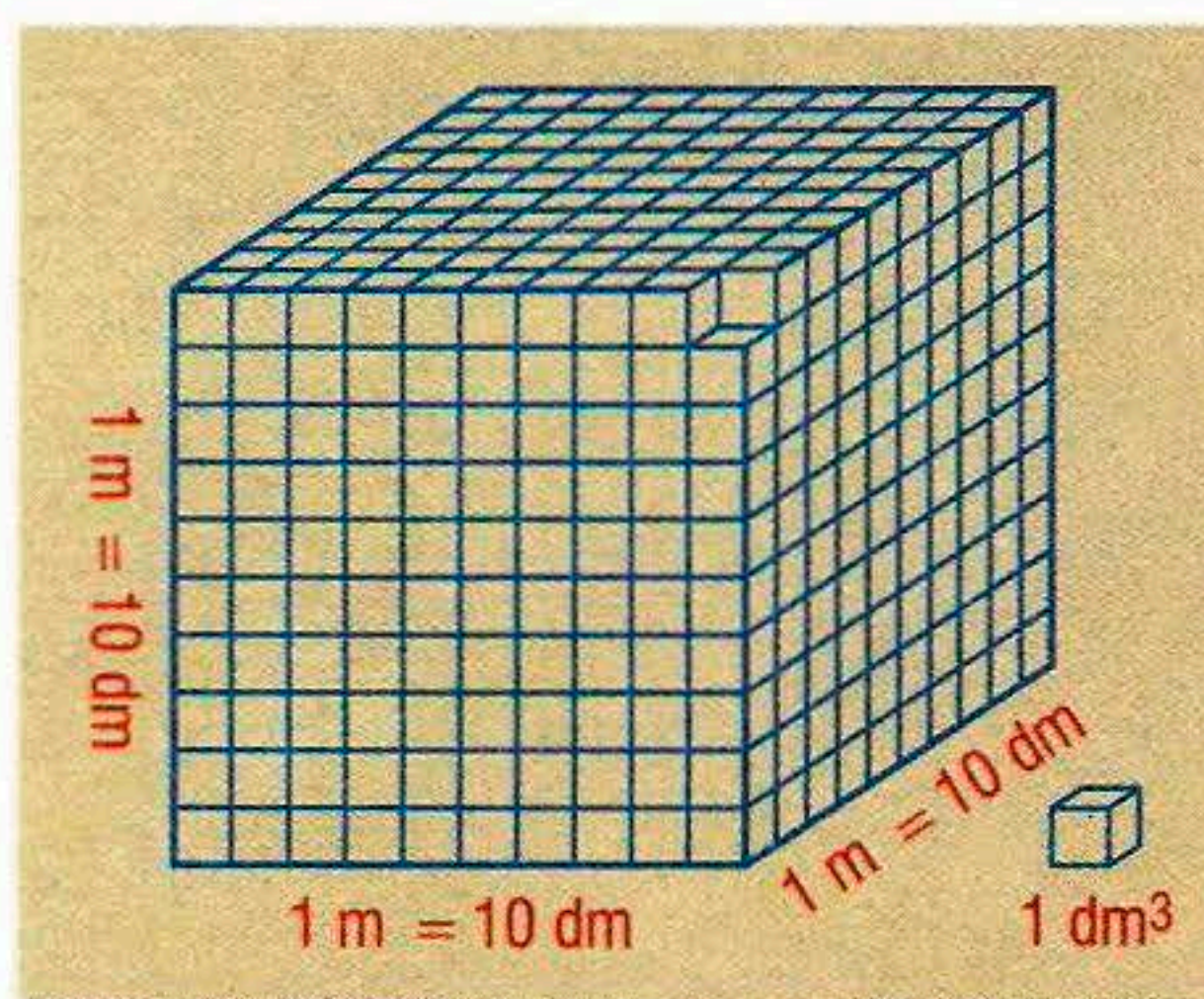
UNIDADES DE VOLUMEN. NOMENCLATURA

La unidad de estas medidas es el **metro cúbico** (Fig. 40), que es un cubo que tiene de arista un metro lineal y se representa abreviadamente por m^3 .

Estas medidas aumentan y disminuyen de **mil en mil**.

Figura 40

Metro cúbico



Los múltiplos y submúltiplos de m^3 son:

km^3	hm^3	dam^3	m^3
1,000,000,000 m^3	1,000,000 m^3	1,000 m^3	1
dm^3	cm^3	mm^3	
0.001 m^3	0.000001 m^3	0.000000001 m^3	

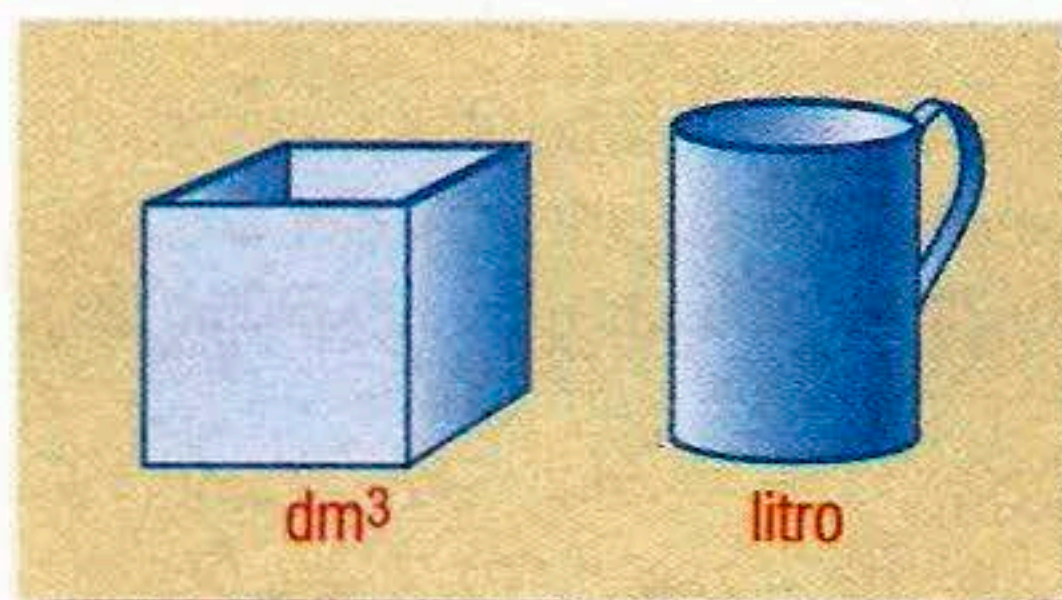
Cuando el metro cúbico se emplea para medir leña recibe el nombre de **estéreo**, teniendo un múltiplo, el **decaestéreo**, que vale 10 metros cúbicos, y un submúltiplo, el **deciestéreo**, que es la décima parte de un metro cúbico.

UNIDADES DE CAPACIDAD. NOMENCLATURA

550

La unidad de estas medidas es el **litro** (Fig. 41), que es una medida cuya capacidad es igual a un dm^3 .

—| Figura 41 |—



Estas medidas aumentan y disminuyen de **diez en diez**.
Los múltiplos y submúltiplos del litro son:

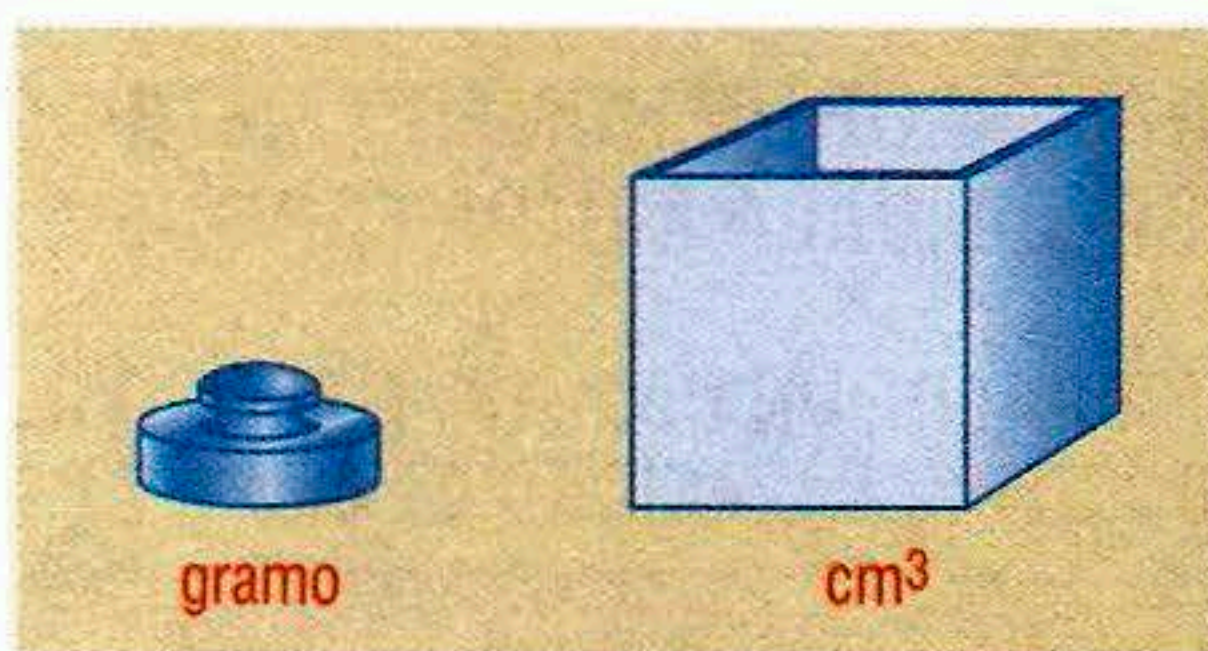
kℓ	hℓ	daℓ	ℓ	dℓ	cℓ	mℓ
1,000 ℓ	100 ℓ	10 ℓ		0.1 ℓ	0.01 ℓ	0.001 ℓ

MEDIDAS DE PESO

551

La unidad de estas medidas es el **gramo** (Fig. 42), que es el peso de la masa de un cm^3 de agua destilada a una atmósfera de presión y a 4°C , y se representa por **g**.

—| Figura 42 |—



Como un decímetro cúbico de agua destilada contiene $1,000 \text{ cm}^3$, habiendo llamado **gramo** al peso de la masa de un cm^3 de agua destilada, se llamó **kilogramo** al peso de la masa de un dm^3 de agua destilada.

Para representar el **kilogramo teórico**, el físico Borda construyó un cilindro de platino cuyo peso debía ser el peso de la masa del kilogramo teórico, o sea, el peso de la masa de un dm^3 de agua destilada. Este cilindro, que es el **kilogramo patrón**, se encuentra en los archivos de Sèvres, pero su masa es ligeramente superior a la del kilogramo teórico.

Actualmente, el **gramo** se define como el peso de la milésima parte de la masa del kilogramo patrón de Borda.

Las medidas de peso aumentan y disminuyen de **diez en diez**.

Los múltiplos y submúltiplos del gramo son:

Tm	Qm	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1,000,000 g	100,000 g	1,000 g	100 g	10 g	1 g	0.1 g	0.01 g	0.001 g

552

MEDIDAS EFECTIVAS

Se llaman medidas efectivas a las que existen en la realidad, pues se construyen objetos o instrumentos que las representan, llamados **patrones**, para uso de la industria y el comercio.

Las medidas que no son efectivas se llaman **ficticias**; no existen en la realidad, pero se emplean en el cálculo.

Entre las medidas de **longitud** son efectivas el hm, el doble dam, el dam, el medio dam, el doble metro, el metro, el medio metro, el doble dm, el dm, el cm y el mm. Estas medidas se construyen en forma de cintas de tela fuerte o metal (lienizas), cadenas de agrimensor y reglas de madera o metal.

Entre las medidas de **capacidad** son efectivas el hl, medio hl, doble dal, dal, medio dal, doble litro, litro, medio litro, doble dl, dl, medio dl, doble cl y cl.

Estas medidas se construyen en forma de depósitos cilíndricos, generalmente de metal.

Entre las medidas de **peso** son efectivas las pesas de 50 kg, 20 kg, 10 kg, 5 kg, 2 kg, 1 kg, medio kg, 2 hg, 1 hg y medio hg, que se construyen en forma de pirámide truncada de hierro con un anillo para tomarlas; las de 20 g, 10 g (dag), 5 g, 2 g y 1 g, que se construyen en forma de cilindros de latón que terminan por la parte superior en una especie de botón para tomarlas, y las de 5 dg, 2 dg, 1 dg, 5 cg, 2 cg, 1 cg, 5 mg, 2 mg y 1 mg, que se fabrican en forma de chapas cuadradas de latón, plata o platino, con una punta doblada para tomarlas.

Las medidas de **superficie** y de **volumen** son **ficticias**; no se suelen construir instrumentos que las representen. Para medir las superficies y los volúmenes nos valemos de las fórmulas que da la Geometría, las cuales se estudian en el capítulo XXXVIII, usando como base para hallarlos las medidas de longitud.

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO DE ESPECIE DADA A OTRA ESPECIE

553

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO QUE EXPRESE UNIDADES DE LONGITUD, CAPACIDAD O PESO A OTRA ESPECIE DADA

Estudiamos estas tres clases de medidas juntas porque aumentan o disminuyen de **diez en diez**.

REGLA

Si hay que reducir de especie superior a inferior se multiplica el número dado, y si de especie inferior a superior, se divide el número dado entre la unidad seguida de tantos ceros como lugares separen a la medida dada de aquella a que se va a reducir.

Ejemplos

1) Reducir 123 km a m.

Como es de mayor a menor tenemos que multiplicar. Contemos los lugares que separan los dos medidas: de km a hm uno, o dam dos, a m tres; luego tendremos que multiplicar por la unidad seguida de tres ceros, o sea por 1,000 y tendremos:

$$123 \text{ km} = 123 \times 1,000 = 123,000 \text{ m} \quad \text{R.}$$

2) Reducir 456.789 cm a m.

Como es de menor a mayor tenemos que dividir. De cm a dm uno, a m dos, luego tenemos que dividir entre 100 y tendremos:

$$456.789 \text{ cm} = 456.789 \div 100 = \mathbf{4.56789 \text{ m}} \quad \mathbf{R.}$$

3) Reducir 120.03 kl a dl.

Como es de mayor a menor hay que multiplicar. De kl a hl uno, a dal dos, a l tres, a dl cuatro, luego tenemos que multiplicar por 10,000 y tendremos:

$$120.03 \text{ kl} = 120.03 \times 10,000 = \mathbf{1,200,300 \text{ dl}} \quad \mathbf{R.}$$

4) Reducir 114.05 dag a Qm.

Como es de menor a mayor hay que dividir. De dag a hg uno, a kg dos, a Mg tres, a Qm cuatro, luego tenemos que dividir entre 10,000 y tendremos:

$$114.05 \text{ dag} = 114.05 \div 10,000 = \mathbf{0.011405 \text{ Qm}} \quad \mathbf{R.}$$

Reducir:

1. 8 m a dm	R. 80 dm	16. 13 ml a l	R. 0.013 l
2. 15 dam a cm	R. 15,000 cm	17. 12 cl a l	R. 0.12 l
3. 7.05 hm a cm	R. 70,500 cm	18. 215 dl a hl	R. 0.215 hl
4. 17.005 km a dm	R. 170,050 dm	19. 89.89 dal a kl	R. 0.8989 kl
5. 125.6789 km a mm	R. 125,678,900 mm	20. 201.201 dl a kl	R. 0.0201201 kl
6. 19 mm a m	R. 0.019 m	21. 14 g a cg	R. 1,400 cg
7. 185 cm a dam	R. 0.185 dam	22. 8 dg a mg	R. 800 mg
8. 9 cm a m	R. 0.09 m	23. 219 hg a dg	R. 219,000 dg
9. 1,824.72 m a km	R. 1.82472 km	24. 7.001 kg a g	R. 7,001 g
10. 193,456.8 hm a km	R. 19,345.68 km	25. 945.6 kg a hg	R. 9,456 hg
11. 25 l a cl	R. 2,500 cl	26. 81 Qm a hg	R. 81,000 hg
12. 9 l a ml	R. 9,000 ml	27. 7 Tm a kg	R. 7,000 kg
13. 18.07 dal a dl	R. 1,807 dl	28. 35.762 dag a Qm	R. 0.0035762 Qm
14. 125.007 kl a dal	R. 12,500.7 dal	29. 1,915 g a Tm	R. 0.001915 Tm
15. 877.23 kl a l	R. 877,230 l	30. 1,001,001 cg a kg	R. 10.01001 kg

248

Ejercicio

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO QUE EXPRESE UNIDADES DE SUPERFICIE A OTRA ESPECIE DADA

REGLA

Si hay que reducir de especie superior a inferior, se multiplica, y si debe hacerse de inferior a superior, se divide el número dado entre la unidad seguida tantas veces dos ceros como lugares separen a la medida dada de aquella a que se va a reducir.

554

Ejemplos

1) Reducir 18 hm^2 a m^2 .

Como es de mayor a menor hay que multiplicar. De hm^2 a dam^2 uno, a m^2 , dos; luego tenemos que multiplicar por la unidad seguida de dos grupos de dos ceros, o sea, de cuatro ceros y tendremos:

$$18 \text{ hm}^2 = 18 \times 10,000 = 180,000 \text{ m}^2 \quad \text{R.}$$

2) Reducir $3,456.789 \text{ mm}^2$ a dam^2 .

Como es de menor a mayor hay que dividir. De mm^2 a cm^2 uno, a dm^2 dos, a m^2 tres, a dam^2 cuatro; luego tenemos que dividir entre la unidad seguida de cuatro grupos de dos ceros, o sea, por 100,000,000 y tendremos:

$$3,456.789 \text{ mm}^2 = 3,456.789 \div 100,000,000 = 0.00003456789 \text{ dam}^2 \quad \text{R.}$$

3) Reducir 14.32 ha a ca .

Como la ha es igual al hm^2 y la ca igual al m^2 tendremos que multiplicar porque es de mayor a menor. De ha a área uno, a ca dos; luego tenemos que multiplicar por 10,000 y tendremos:

$$14.32 \text{ ha} = 14.32 \times 10,000 = 143,200 \text{ ca} \quad \text{R.}$$

249

Reducir:

Ejercicio

- | | | | |
|--|----------------------------------|--|---------------------------------|
| 1. 9 m^2 a dm^2 | R. 900 dm^2 | 16. 57 mm^2 a dm^2 | R. 0.0057 dm^2 |
| 2. 37 dam^2 a dm^2 | R. 370,000 dm^2 | 17. $1,234 \text{ cm}^2$ a dam^2 | R. 0.001234 dam^2 |
| 3. 9 hm^2 a m^2 | R. 90,000 m^2 | 18. $1,089 \text{ m}^2$ a hm^2 | R. 0.1089 hm^2 |
| 4. 56 km^2 a m^2 | R. 56,000,000 m^2 | 19. 23.56 m^2 a km^2 | R. 0.00002356 km^2 |
| 5. 7.85 hm^2 a mm^2 | R. 78,500,000,000 mm^2 | 20. $12,345.7 \text{ dam}^2$ a km^2 | R. 1.23457 km^2 |
| 6. 13.456 dam^2 a mm^2 | R. 1,345,600,000 mm^2 | 21. 789.004 cm^2 a dam^2 | R. 0.000789004 dam^2 |
| 7. $7,893.25 \text{ hm}^2$ a cm^2 | R. 789,325,000,000 cm^2 | 22. $1,345.89 \text{ mm}^2$ a hm^2 | R. 0.000000134589 hm^2 |
| 8. 7.8965 km^2 a dam^2 | R. 78,965 dam^2 | 23. 8.7 m^2 a dam^2 | R. 0.087 dam^2 |
| 9. 7 ha a a | R. 700 a | 24. 9 ca a a | R. 0.09 a |
| 10. 15 ha a ca | R. 150,000 ca | 25. 6 a a ha | R. 0.06 ha |
| 11. 23 a a ca | R. 2,300 ca | 26. 115 ca a a | R. 1.15 a |
| 12. 123.45 ha a ca | R. 1,234,500 ca | 27. 345 a a ha | R. 3.45 ha |
| 13. 89.003 a a ca | R. 8,900.3 ca | 28. $1,234 \text{ ha}$ a km^2 | R. 12.34 km^2 |
| 14. 7.001 km^2 a ha | R. 700.1 ha | 29. 876 ca a km^2 | R. 0.000876 km^2 |
| 15. 9 mm^2 a cm^2 | R. 0.09 cm^2 | 30. $19,876,543 \text{ a}$ a km^2 | R. 1,987.6543 km^2 |

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO QUE EXPRESE UNIDADES DE VOLUMEN A OTRA ESPECIE DADA

555

REGLA

Si hay que reducir de especie superior a inferior, se multiplica, y si de inferior a superior, se divide el número dado entre la unidad seguida de tantas veces tres ceros como lugares separen a la medida dada de aquella a que se va a reducir.

1) Reducir 345.76 m^3 a cm^3 .

Como es de mayor a menor hay que multiplicar. De m^3 a dm^3 uno, a cm^3 dos; luego tendremos que multiplicar por la unidad seguida de dos grupos de tres ceros, o sea, por 1,000,000 y tendremos:

$$345.76 \text{ m}^3 = 345.76 \times 1,000,000 = 345,760,000 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

2) Reducir 85.72 m^3 a km^3 .

Como es de menor a mayor hay que dividir. De m^3 a dam^3 uno, a hm^3 dos, a km^3 tres; luego hay que dividir entre la unidad seguida de tres grupos de tres ceros, o sea, entre 1,000,000,000 y tendremos:

$$85.72 \text{ m}^3 = 85.72 \div 1,000,000,000 = 0.00000008572 \text{ km}^3 \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Reducir:

- | | | | |
|--|---|--|---------------------------------------|
| 1. 6 m^3 a cm^3 | R. 6,000,000 cm^3 | 14. $123,456,789 \text{ dm}^3$ a km^3 | R. 0.000123456789 km^3 |
| 2. 19 m^3 a mm^3 | R. 19,000,000,000 mm^3 | 15. $1,215 \text{ dam}^3$ a km^3 | R. 0.001215 km^3 |
| 3. 871 m^3 a dm^3 | R. 871,000 dm^3 | 16. 876 m^3 a km^3 | R. 0.000000876 km^3 |
| 4. 14 hm^3 a dm^3 | R. 14,000,000,000 dm^3 | 17. $8,765 \text{ dam}^3$ a km^3 | R. 0.008765 km^3 |
| 5. 7 km^3 a m^3 | R. 7,000,000,000 m^3 | 18. $76,895.7345 \text{ cm}^3$ a km^3 | R. 0.000000000768957345 km^3 |
| 6. 8.96 dam^3 a cm^3 | R. 8,960,000,000 cm^3 | 19. $3,457,689.003 \text{ dm}^3$ a hm^3 | R. 0.003457689003 hm^3 |
| 7. 14.567 km^3 a m^3 | R. 14,567,000,000 m^3 | 20. $123,456.008 \text{ m}^3$ a km^3 | R. 0.000123456008 km^3 |
| 8. 23.7657 km^3 a m^3 | R. 23,765,700,000 m^3 | | |
| 9. 2.345678 hm^3 a m^3 | R. 2,345,678 m^3 | | |
| 10. 23.789876 km^3 a cm^3 | R. 23,789,876,000,000,000 cm^3 | | |
| 11. 67 mm^3 a cm^3 | R. 0.067 cm^3 | | |
| 12. $1,145 \text{ cm}^3$ a m^3 | R. 0.001145 m^3 | | |
| 13. $8,765 \text{ dm}^3$ a hm^3 | R. 0.000008765 hm^3 | | |

250

Ejercicio

MISCELÁNEA

Reducir:

- | | | | |
|--|--------------------------|---|-----------------------------|
| 1. 54 hm a m | R. 5,400 m | 3. 195.03 km^2 a dam^2 | R. 1,950,300 dam^2 |
| 2. 128.003 kg a dag | R. 12,800.3 dag | 4. 2 cm^3 a m^3 | R. 0.000002 m^3 |

251

Ejercicio

- | | | | |
|---|--------------------------------|--|--|
| 5. 1,850 km a m | R. 1,850,000 m | 29. 19,336 cm ² a dam ² | R. 0.019336 dam ² |
| 6. 16 dam a hm | R. 1.6 hm | 30. 19,325.0586 dam ³ a km ³ | R. 0.0193250586 km ³ |
| 7. 18 dal a cl | R. 18,000 cl | 31. 18.0035 m a mm | R. 18,003.5 mm |
| 8. 186.325 mm ² a m ² | R. 0.000186325 m ² | 32. 0.056432 dm a mm | R. 5.6432 mm |
| 9. 0.0806 hm a dm | R. 80.6 dm | 33. 0.832 a a ca | R. 83.2 ca |
| 10. 180.056 m ² a a | R. 1.80056 a | 34. 1,832 cl a dal | R. 1.832 dal |
| 11. 16.5 km a hm | R. 165 hm | 35. 0.0506 m ³ a dam ³ | R. 0.0000506 dam ³ |
| 12. 165.345 m a cm | R. 16,534.5 cm | 36. 1,864.003 m a km | R. 1.864003 km |
| 13. 0.56 hg a Tm | R. 0.000056 Tm | 37. 123.056 kl a ml | R. 123,056,000 ml |
| 14. 1,832 Tm a g | R. 1,832,000,000 g | 38. 0.05 m ³ a hm ³ | R. 0.00000005 hm ³ |
| 15. 14.0056 cm ² a a | R. 0.0000140056 a | 39. 1 m ³ a km ³ | R. 0.000000001 km ³ |
| 16. 1,803 mm ³ a m ³ | R. 0.000001803 m ³ | 40. 0.0086 dm ² a ha | R. 0.0000000086 ha |
| 17. 18 m ² a ha | R. 0.0018 ha | 41. 8 g a Tm | R. 0.000008 Tm |
| 18. 85.003 dam a mm | R. 850,030 mm | 42. 5 ¹ / ₄ ha a ca | R. 52,500 ca |
| 19. 1,230.05 cl a kl | R. 0.0123005 kl | 43. 6 ² / ₃ m ³ a dm ³ | R. 6,666 ² / ₃ dm ³ |
| 20. 14 hm ² a m ² | R. 140,000 m ² | 44. ³ / ₅ l a cl | R. 60 cl |
| 21. 5,063.0032 ml a hl | R. 0.050630032 hl | 45. ¹ / ₈ Qm a hg | R. 125 hg |
| 22. 1,936 m ³ a dm ³ | R. 1,936,000 dm ³ | 46. ² / ₉ cm ³ a dm ³ | R. 0.00022 dm ³ |
| 23. 156.003 dam ³ a dm ³ | R. 156,003,000 dm ³ | 47. 5 ¹ / ₈ ca a a | R. 0.05125 a |
| 24. 143.056 dam a km | R. 1.43056 km | 48. 5 ¹ / ₂ dal a ml | R. 55,000 ml |
| 25. 1,932 km ² a ha | R. 19,320,000 ha | 49. 7 ³ / ₄ cm ² a dam ² | R. 0.00000775 dam ² |
| 26. 12,356.003 dg a kg | R. 1.2356003 kg | 50. 11 ¹ / ₅ g a mg | R. 11,200 mg |
| 27. 15.0036 ml a kl | R. 0.0000150036 kl | | |
| 28. 98,035,006 dm ³ a m ³ | R. 98,035.006 m ³ | | |

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO DECIMAL DE LAS DISTINTAS UNIDADES DE QUE CONSTA

556

REDUCIR UN INCOMPLEJO MÉTRICO QUE EXPRESE UNIDADES DE LONGITUD, PESO O CAPACIDAD A DENOMINADO

REGLA

La última cifra entera es de la especie dada. Hacia su izquierda cada cifra representa una especie superior, y hacia la derecha, una especie inferior.

Ejemplos

1) Reducir a denominado 345.78 hm.

La última cifra entera, que es el 5, expresará hm. Hacia su izquierda, las cifras siguientes representarán la especie superior a hm o sea km. Hacia su derecha el 7 representará la especie inferior a hm, o sea dam y el 8 m, y tendremos:

$$34.578 \text{ hm} = 34 \text{ km } 5 \text{ hm } 7 \text{ dam } 8 \text{ m} \quad \text{R.}$$

2) Descomponer 98,006 dm.

La última cifra entera que es el 6 son dm y hacia su izquierda el primer 0 son m, el otro 0 son dam, el 8 hm y el 9 km, y tendremos:

$$98,006 \text{ dm} = 9 \text{ km}, 8 \text{ hm}, 6 \text{ dm} \quad \text{R.}$$

3) Descomponer 7,004.89 kg.

Tendremos:

$$7,004.89 \text{ kg} = 7 \text{ Tm}, 4 \text{ kg}, 8 \text{ hg}, 9 \text{ dag} \quad \text{R.}$$

4) Reducir a denominado 23,456.71 hl.

Tendremos:

$$23,456.71 \text{ hl} = 2,345 \text{ kl}, 6 \text{ hl}, 7 \text{ dal}, 1 \text{ l} \quad \text{R.}$$

(Véase cómo al llegar a kl se terminaban las medidas y quedaban todavía tres cifras, las referimos todas a la especie kl.)

Reducir a denominado:

- | | | | |
|------------------|------------------------------|--------------------|-------------------------------|
| 1. 18 m | R. 1 dam 8 m | 15. 1,450 kg | R. 1 Tm 4 Qm 50 kg |
| 2. 125 cm | R. 1 m 2 dm 5 cm | 16. 23.006 kg | R. 23 kg 6 g |
| 3. 18,345 mm | | 17. 184.00765 hg | |
| | R. 1 dam 8 m 3 dm 4 cm 5 mm | | R. 18 kg 4 hg 7 dg 6 cg 5 mg |
| 4. 9,230 m | R. 9 km 2 hm 3 dam | 18. 3,145.00101 Qm | |
| 5. 18,765 dam | R. 187 km 6 hm 5 dam | | R. 314 Tm 5 Qm 1 hg 1 g |
| 6. 32.076 m | R. 3 dam 2 m 7 cm 6 mm | 19. 876.00654 Tm | R. 876 Tm 6 kg 5 hg 4 dag |
| 7. 184.0054 dam | | 20. 73.0076 g | R. 7 dag 3 g 7.6 mg |
| | R. 1 km 8 hm 4 dam 5 cm 4 mm | 21. 987 l | R. 9 hl 8 dal 7 l |
| 8. 9,072.056 hm | | 22. 8,765 ml | R. 8 l 7 dl 6 cl 5 ml |
| | R. 907 km 2 hm 5 m 6 dm | 23. 187,654 dal | R. 1,876 kl 5 hl 4 dal |
| 9. 1,234.0007 km | R. 1,234 km 7 dm | 24. 1,005 hl | R. 100 kl 5 hl |
| 10. 98.000087 hm | R. 9 km 8 hm 8.7 mm | 25. 34.06 dal | R. 3 hl 4 dal 6 dl |
| 11. 134 g | R. 1 hg 3 dag 4 g | 26. 1,240.78 kl | R. 1,240 kl 7 hl 8 dal |
| 12. 1,786 mg | R. 1 g 7 dg 8 cg 6 mg | 27. 8.00009 hl | R. 8 hl 9 ml |
| 13. 98,654 cg | | 28. 234.0734 l | R. 2 hl 3 dal 4 l 7 cl 3.4 ml |
| | R. 9 hg 8 dag 6 g 5 dg 4 cg | 29. 9.86 cl | R. 9 cl 8.6 ml |
| 14. 1,008 dag | R. 10 kg 8 dag | 30. 14.7854 l | R. 1 dal 4 l 7 dl 8 cl 5.4 ml |

252

Ejercicio

REDUCIR UN INCOMPLEJO MÉTRICO QUE EXPRESE UNIDADES DE SUPERFICIE A DENOMINADO

REGLA

El número que forman las dos últimas cifras enteras es de la especie dada. Hacia la izquierda de este grupo, cada grupo de dos cifras representa una especie superior, y hacia

557

la derecha, una especie inferior. Si a la derecha queda una sola cifra se le añade un cero para completar el grupo de dos cifras.

Ejemplos

1) Reducir a denominado 567.897 km².

Las tres últimas cifras enteras 567 son km²; hacia su derecha 89 son hm² y 70 (se añade un cero) dam², y tendremos:

$$567.897 \text{ km}^2 = 567 \text{ km}^2, 89 \text{ hm}^2, 70 \text{ dam}^2 \quad \text{R.}$$

2) Descomponer 560,034.654 ha.

Las dos últimas cifras enteras 34 son ha; hacia su izquierda tenemos 5,600 km² y hacia la derecha 65 a y 40 ca, o sea

$$560,034.654 \text{ ha} = 5,600 \text{ km}^2, 34 \text{ ha}, 65 \text{ a}, 40 \text{ ca} \quad \text{R.}$$

253

Reducir a denominado:

Ejercicio

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. 817 m ² | R. 8 dam ² 17 m ² |
| 2. 1,215 cm ² | R. 12 dm ² 15 cm ² |
| 3. 18,765 mm ² | R. 1 dm ² 87 cm ² 65 mm ² |
| 4. 3,456,789 dam ² | R. 345 km ² 67 hm ² 89 dam ² |
| 5. 123 a | R. 1 ha 23 a |
| 6. 1,085 ca | R. 10 a 85 ca |
| 7. 198,765,432 ha | R. 1,987,654 km ² 32 ha |
| 8. 123.00875 m ² | R. 1 dam ² 23 m ² 87 cm ² 50 mm ² |
| 9. 134.00075 dam ² | R. 1 hm ² 34 dam ² 7 dm ² 50 cm ² |
| 10. 9,876.01023 hm ² | R. 98 km ² 76 hm ² 1 dam ² 2 m ² 30 dm ² |
| 11. 12,345.007 km ² | R. 12,345 km ² 70 dam ² |
| 12. 834.50063 a | R. 8 ha 34 a 50 ca 6 dm ² 30 cm ² |
| 13. 765,400.00071 km ² | R. 765,400 km ² 7 m ² 10 dm ² |
| 14. 183.03033 ha | R. 1 km ² 83 ha 3 a 3 ca 30 dm ² |
| 15. 0.00081 km ² | R. 8 dam ² 10 m ² |
| 16. 0.7301003 ha | R. 73 a, 1 ca 30 cm ² |
| 17. 0.00001 dam ² | R. 10 cm ² |
| 18. 43,198.073 km ² | R. 43,198 km ² 7 hm ² 30 dam ² |
| 19. 215.87654 dm ² | R. 2 m ² 15 dm ² 87 cm ² 65.4 mm ² |
| 20. 180.00003 cm ² | R. 1 dm ² 80 cm ² 0.003 mm ² |

558

REDUCIR UN INCOMPLEJO MÉTRICO QUE EXPRESE UNIDADES DE VOLUMEN A DENOMINADO

REGLA

El número que forman las tres últimas cifras enteras es de la especie dada. Hacia la izquierda de este grupo, cada grupo de tres cifras representa una especie superior, y hacia

la derecha, una especie inferior. Si a la derecha queda una cifra, se le añaden dos ceros, y si quedan dos, se le añade un cero para completar el grupo de tres cifras.

Reducir a denominado 56,789.0045 m³.

Las tres últimas cifras enteras 789 son m³; hacia su izquierda 56 son dam³ y hacia su derecha 004 son dm³ y 500 cm³ y tendremos:

$$56,789.0045 \text{ m}^3 = 56 \text{ dam}^3, 789 \text{ m}^3, 4 \text{ dm}^3, 500 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

Ejemplo

Reducir a denominado:

- | | |
|--|---|
| 1. 1,815 m ³ | R. 1 dam ³ 815 m ³ |
| 2. 23,456 mm ³ | R. 23 cm ³ 456 mm ³ |
| 3. 1,834,567 cm ³ | R. 1 m ³ 834 dm ³ 567 cm ³ |
| 4. 23,456,789 dam ³ | R. 23 km ³ 456 hm ³ 789 dam ³ |
| 5. 19,876,543 hm ³ | R. 19,876 km ³ 543 hm ³ |
| 6. 20,003,456,001 cm ³ | R. 20 dam ³ 3 m ³ 456 dm ³ 1 cm ³ |
| 7. 70,007,650,043 dm ³ | R. 70 hm ³ 7 dam ³ 650 m ³ 43 dm ³ |
| 8. 18.0072 dam ³ | R. 18 dam ³ 7 m ³ 200 dm ³ |
| 9. 1,324.0007 dm ³ | R. 1 m ³ 324 dm ³ 700 mm ³ |
| 10. 198,654.00008 dam ³ | R. 198 hm ³ 654 dam ³ 80 dm ³ |
| 11. 87,345.0000005 km ³ | R. 87,345 km ³ 500 m ³ |
| 12. 17,653.0000437 hm ³ | R. 17 km ³ 653 hm ³ 43 m ³ 700 dm ³ |
| 13. 18,000.0000000072 km ³ | R. 18,000 km ³ 7 m ³ 200 dm ³ |
| 14. 0.0032 m ³ | R. 3 dm ³ 200 cm ³ |
| 15. 0.00007645 dam ³ | R. 76 dm ³ 450 cm ³ |
| 16. 0.8765432075 km ³ | R. 876 hm ³ 543 dam ³ 207 m ³ 500 dm ³ |
| 17. 9,072.08109 km ³ | R. 9,072 km ³ 81 hm ³ 90 dam ³ |
| 18. 6,754,327.0060572 dam ³ | R. 6 km ³ 754 hm ³ 327 dam ³ 6 m ³ 57 dm ³ |
| 19. 23.0040056 dm ³ | R. 23 dm ³ 4 cm ³ 5.6 mm ³ |
| 20. 1,234.7645 cm ³ | R. 1 dm ³ 234 cm ³ 764.5 mm ³ |

254

Ejercicio

MISCELÁNEA

Reducir a denominado:

- | | | | |
|-------------------------|--|--------------------------------|---|
| 1. 145.03 dam | R. 1 km 4 hm 5 dam 3 dm | 8. 1,803,564 dam ³ | R. 1 km ³ 803 hm ³ 564 dam ³ |
| 2. 1,324 Qm | R. 132 Tm 4 Qm | 9. 0.0001 m | R. 0.1 mm |
| 3. 116 ha | R. 1 km ² 16 ha | 10. 89,306.054 km ² | R. 89,306 km ² 5 hm ² 40 dam ² |
| 4. 1,603 m ³ | R. 1 dam ³ 603 m ³ | 11. 1,803.05 hm ³ | R. 1 km ³ 803 hm ³ 50 dam ³ |
| 5. 456.89 dm | R. 4 dam 5 m 6 dm 8 cm 9 mm | 12. 12,340.56 kl | R. 12,340 kl 5 hl 6 dal |
| 6. 189.003 dag | R. 1 kg 8 hg 9 dag 3 cg | 13. 89,325 m ² | R. 8 hm ² 93 dam ² 25 m ² |
| 7. 108.0035 ca | R. 1 a 8 ca 35 cm ² | | |

255

Ejercicio

- | | |
|---|--|
| 14. 0.56896 Tm | R. 5 Qm 68 kg 9 hg 6 dag |
| 15. 0.00013 hm ² | R. 1 m ² 30 dm ² |
| 16. 19,035.6543 km ³ | R. 19,035 km ³ 654 hm ³ 300 dam ³ |
| 17. 980.03 km | R. 980 km 3 dam |
| 18. 1,890.00003 a | R. 18 ha 90 a 30 cm ² |
| 19. 186,432.007 ha | R. 1,864 km ² 32 ha 70 ca |
| 20. 0.0010325 m ³ | R. 1 dm ³ 32 cm ³ 500 mm ³ |
| 21. 0.0013 dm ³ | R. 1 cm ³ 300 mm ³ |
| 22. 1,403.564 kg | R. 1 Tm 4 Qm 3 kg 5 hg 6 dag 4 g |
| 23. 10,035.05643 a | R. 1 km ² 35 a 5 ca 64 dm ² 30 cm ² |
| 24. 0.05 cm ³ | R. 50 mm ³ |
| 25. 1,056.00432 hl | R. 105 kl 6 hl 4 dl 3 cl 2 ml |
| 26. 0.00356 Qm | R. 3 hg 5 dag 6 g |
| 27. 188,643,253.0056 m ³ | R. 188 hm ³ 643 dam ³ 253 m ³ 5 dm ³ 600 cm ³ |
| 28. $285\frac{3}{4}$ dam | R. 2 km 8 hm 5 dam 7 m 5 dm |
| 29. $1,008\frac{7}{10}$ a | R. 10 ha 8 a 70 ca |
| 30. $234\frac{3}{5}$ m ³ | R. 234 m ³ 600 dm ³ |
| 31. $12,345\frac{1}{8}$ dam ³ | R. 12 hm ³ 345 dam ³ 125 m ³ |
| 32. $7,654,329\frac{7}{20}$ ha | R. 765 Mm ² 43 km ² 29 ha 35 a |
| 33. $1,008\frac{9}{16}$ ca | R. 10 a 8 ca 56 dm ² 25 cm ² |
| 34. $8\frac{1}{2}$ kl | R. 8 kl 5 hl |
| 35. $879\frac{4}{5}$ Tm | R. 879 Tm 8 Qm |
| 36. $10,000\frac{1}{500}$ dm ² | R. 1 dam ² 20 mm ² |

559

REDUCCIÓN DE UN DENOMINADO MÉTRICO A INCOMPLEJO

REGLA

Se reducen cada una de las especies del complejo a la especie pedida y se suman esos resultados.

Ejemplos

1) Reducir 5 kl, 14 l y 34 dl a hl.

$$\begin{aligned}
 5 \text{ kl a hl} &= 5 \times 10 = 50 \text{ hl} \\
 14 \text{ l a hl} &= 14 \div 100 = 0.14 \text{ " } \\
 34 \text{ dl a hl} &= 34 \div 1,000 = 0.034 \text{ " } \\
 &\quad \quad \quad \underline{50.174 \text{ hl}} \quad \text{R.}
 \end{aligned}$$

2) Reducir 3 km², 16 ha, 6 ca y 345 mm² a m².

$$\begin{aligned}
 3 \text{ km}^2 \text{ a m}^2 &= 3 \times 1,000,000 = 3,000,000 \text{ m}^2 \\
 16 \text{ ha a m}^2 &= 16 \times 10,000 = 160,000 \text{ " } \\
 6 \text{ ca} &= 6 \text{ " } \\
 345 \text{ mm}^2 \text{ a m}^2 &= 345 \div 1,000,000 = 0.000345 \text{ m}^2 \\
 &= \underline{3,160,006.000345 \text{ m}^2} \quad \text{R.}
 \end{aligned}$$

3) 14 hm³, 45 dam³, 6 cm³ a hm³.

$$\begin{aligned}
 14 \text{ hm}^3 &= 14 \text{ hm}^3 \\
 45 \text{ dam}^3 \text{ a hm}^3 &= 45 \div 1,000 = 0.045 \text{ hm}^3 \\
 6 \text{ cm}^3 \text{ a hm}^3 &= 6 \div 1,000,000,000,000 = 0.000000000006 \text{ hm}^3 \\
 &= \underline{14.045000000006 \text{ hm}^3} \quad \text{R.}
 \end{aligned}$$

Reducir a la especie indicada:

- | | |
|---|---|
| 1. 14 km, 10 dam, 8 cm a mm | R. 14,100,080 mm |
| 2. 8 dam, 6 dm, 114 mm, a m | R. 80.714 m |
| 3. 190 km, 16 m, 1,142 dm a hm | R. 1,901.302 hm |
| 4. 8 Tm, 105 hg, 12 cg a mg | R. 8,010,500,120 mg |
| 5. 9 kg, 12 g, 16 mg a dg | R. 90,120.16 dg |
| 6. 14 hl, 18 dal, 115 l a cl | R. 169,500 cl |
| 7. 19 l, 8 dl, 6 cl a hl | R. 0.1986 hl |
| 8. 14 m, 5 dm, 8 cm a dam | R. 1.458 dam |
| 9. 14 hg, 16 dag, 114 g, 2,013 cg a Qm | R. 0.0169413 Qm |
| 10. 9 km ² , 16 dam ² , 8 m ² a m ² | R. 9,001,608 m ² |
| 11. 8 hm ² , 9 m ² , 114 cm ² a dm ² | R. 8,000,901.14 dm ² |
| 12. 14 ha, 8 a, 16.2 ca a a | R. 1,408.162 a |
| 13. 15 km ² , 16 a, 8 ca, 9 dm ² a ha | R. 1,500.160809 ha |
| 14. 6 m ² , 18 dm ² , 104 mm ² a km ² | R. 0.000006180104 km ² |
| 15. 9 m ³ , 143 dm ³ , 114 mm ³ a mm ³ | R. 9,143,000,114 mm ³ |
| 16. 14 dam ³ , 13.5 m ³ , 9.4 mm ³ a dam ³ | R. 14.013500000094 dam ³ |
| 17. 8 km ³ , 19 dam ³ , 112 cm ³ a m ³ | R. 8,000,019,000.000112 m ³ |
| 18. 6.2 mm ³ , 19 m ³ a dam ³ | R. 0.0190000000062 dam ³ |
| 19. 14,000 km ³ , 19 hm ³ , 114.3 dm ³ a km ³ | R. 14,000.0190000001143 km ³ |
| 20. 8.6 kl, 1,024 l, 10.56 dl a hl | R. 96.25056 hl |

256

Ejercicio

PROBLEMAS SOBRE EL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

MEDIDAS DE LONGITUD

Las ruedas de un automóvil tienen una circunferencia de 2 m 62 cm. ¿Cuántas vueltas dará cada rueda si el auto recorre una distancia de 2 km, 132 m, 68 cm?

560

Cada vez que las ruedas dan una vuelta, el auto avanza 2 m 62 cm; luego, el número de vueltas que da cada rueda será las veces que 2 m 62 cm esté contenido en la distancia recorrida.

Reduciendo a m la distancia: 2 km, 132 m, 68 cm = 2,132.68 m

Reduciendo a m la circunferencia de las ruedas:

$$2 \text{ m } 62 \text{ cm} = 2.62 \text{ m}$$

Cada rueda dará: $2,132.68 \text{ m} \div 2.62 \text{ m} = 814 \text{ vueltas}$ R.

561 ¿Cuánto costará cercar un potrero rectangular de 8 hm, 6 m, 14 cm de largo por 316 m, 28 cm de ancho, si el metro de cerca, incluyendo la mano de obra, se cobra a \$60?

Tenemos que hallar el perímetro del potrero. Como es rectangular, tiene dos lados que miden 8 hm, 6 m, 14 cm = 806.14 m cada uno, y dos lados que miden 316 m, 28 cm = 316.28 m cada uno. Luego, el perímetro del potrero será:

$$(806.14 \text{ m} + 316.28 \text{ m}) \times 2 = 2,244.84 \text{ m}$$

Entonces, la longitud de la cerca será de 2,244.84 m. Como cada metro se cobra a \$60, la cerca importará:

$$2,244.84 \text{ m} \times \$60 = \$134,690.40 \quad \text{R.}$$

257

Ejercicio

- Una sección de trabajadores tiende en enero, 3 km de vía de ferrocarril; en febrero, 3 hm 8 m; en marzo, 14 dam 34 m. ¿Cuántos hm de vía se han tendido en los tres meses? R. 32.84 hm
- Se compran 13 dam de una tela y ya se han entregado 114 dm. ¿Cuántos dm faltan por entregar? R. 1,186 dm
- Un hombre camina 200 m cada dos minutos y va de una ciudad a otra que dista 130 hm 14 dm. Al cabo de 25 minutos, ¿a qué distancia se halla del punto al que va? R. 10,501.4 m
- ¿Cuántas varillas de 28 cm de longitud se pueden sacar de una vara de madera de 5 m 6 dm? R. 20
- Pedí 14.25 m de tela en una tienda, pero al vendérmela la midieron con un metro que sólo tenía 96 cm. Si pagué \$35 por cada metro verdadero de tela, ¿cuánto pierdo? R. \$19.95
- ¿Cuál será el perímetro, en metros, de un potrero rectangular de 815 m 9 dm 6 cm de longitud por 424 m 18 cm de ancho? R. 2,480.28 m
- En una cuadra (100 m) hay fabricadas cuatro casas cuyos frentes miden 8 m 24 cm, 10 m 75 cm, 15 m 16 cm y 20 m 32 cm respectivamente. ¿Cuántos metros de la cuadra quedan sin casas? R. 45.53 m
- A un potrero rectangular de 9 hm 16 m 75 cm de longitud por 3 hm 19 m 62 cm de ancho, se le pone una cerca que vale \$50 el metro. Si además el acarreo y mano de obra importan \$31,500, ¿cuánto importa poner la cerca? R. \$155,137
- A un cuadro rectangular de 80 cm por 60 cm se le pone un marco que cuesta, incluyendo la mano de obra, 3,000 bolívares el dm. ¿Cuánto importará el marco? R. 84,000 bolívares
- ¿Cuánto importarán los marcos de 4 cuadros rectangulares de 75 cm por 45 cm si el dm de marco cuesta 4.50 nuevos soles? R. 432 nuevos soles

11. Un terreno rectangular de 45 m por 123 dm, se cerca con estacas de 2 dm de ancho, que se colocan a 4 dm de distancia una de otra. ¿Cuántas estacas se necesitarán? **R. 191**
12. Un corredor hace 100 m en 10 segundos y otro 200 m en 22 segundos. ¿Cuál llegará primero en una carrera de 50,000 dm? ¿Qué tiempo de ventaja sacará el ganador al vencido? **R. El 1º, 50 s**
13. ¿Cuál es la velocidad por minuto de un automóvil que en 2 horas recorre 150 km 4 hm 800 dm? **R. 1,254 m**
14. Un rodillo de apisonar terreno tiene una circunferencia de 80 cm 6 mm. Al recorrer un terreno de tenis, de norte a sur, da 53 vueltas, y al recorrerlo de este a oeste da 20 vueltas. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno de tenis? **R. 42.718 m por 16.12 m**
15. Las ruedas de un carro tienen una circunferencia de 3 m 24 cm. ¿Cuántas vueltas dará cada rueda si el coche recorre una distancia de 2 km 9 hm 8 dam 8 dm? **R. 920**
16. Las ruedas delanteras de un automóvil tienen una circunferencia de 1 m 80 cm y las traseras de 2 m 60 cm. ¿Cuántas vueltas darán las ruedas delanteras y las traseras, si el automóvil recorre una distancia de 1 km 1 hm 70 m? **R. D. 650, T. 450**

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Un terreno rectangular de 14 dam de largo por 8.50 m de ancho se vende a \$7.50 el m². ¿Cuánto importará la venta?

562

Tenemos que averiguar cuántos metros cuadrados tiene el terreno. Para buscar la superficie, se multiplica el largo por el ancho, y como queremos tener la superficie en m², tenemos que reducir el largo y el ancho a m, y después multiplicar:

$$\begin{aligned}
 14 \text{ dam a m} &= 14 \times 10 = 140 \text{ m} \\
 8.50 \text{ m} &= 8.50 \text{ m} \\
 140 \text{ m} \times 8.50 \text{ m} &= 1,190 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Ahora, como cada m² se vende a \$7.50, no hay más que multiplicar la superficie en m² por \$7.50, y tendremos:

$$1,190 \text{ m}^2 \times \$7.50 = \$8,925 \quad \text{R.}$$

Una sala rectangular de 4.6 dam por 35.4 dm se pavimenta con losas de 20 cm por 16 cm. ¿Cuántas losas harán falta?

563

Tenemos que hallar la superficie de la sala y la superficie de una losa, y después dividir la superficie de la sala entre la de una losa, para ver cuántas losas caben.

Para hallar la superficie de la sala tenemos que multiplicar su largo por su ancho, pero para eso hay que reducirlos previamente a una misma medida, por ejemplo, a m, y tendremos:

$$\begin{aligned}
 4.6 \text{ dam a m} &= 4.6 \times 10 = 46 \text{ m} \\
 35.4 \text{ dm a m} &= 35.4 \div 10 = 3.54 \text{ m} \\
 \text{Sup. de la sala: } 46 \text{ m} \times 3.54 \text{ m} &= 162.84 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Ahora, para hallar la superficie de una losa, multiplicamos su largo por su ancho:

$$\text{Sup. de una losa: } 20 \text{ cm} \times 16 \text{ cm} = 320 \text{ cm}^2$$

Ahora tenemos que dividir la superficie de la sala, 162.84 m^2 , entre la superficie de una losa, pero para ello tenemos que reducir las dos a una misma medida, por ejemplo, los 162.84 m^2 a cm^2 , y tendremos:

$$162.84 \text{ m}^2 \text{ a } \text{cm}^2 = 162.84 \times 10,000 = 1,628,400 \text{ cm}^2$$

Harán falta: $1,628,400 \div 320 = 5,088\frac{3}{4}$ losas R.

564 Un terreno rectangular de 14 ha, 8 ca mide de largo 45.6 dam. ¿Cuántos metros tiene de ancho?

Cuando se conoce la extensión o superficie y una de las dimensiones, para hallar la otra, se divide la superficie entre la dimensión conocida, pero es necesario reducirlas previamente a una misma medida.

Primero reducimos la superficie 14 ha 8 ca a una sola medida, por ejemplo, a ca:

$$\begin{array}{rcl} 14 \text{ ha a ca} & = & 14 \times 10,000 = 140,000 \text{ ca} \\ 8 \text{ ca} & = & \frac{8}{1} = 8 \text{ ca} \\ \hline & & 140,008 \text{ ca} \end{array}$$

Ahora tenemos que dividir 140,008 ca o m^2 entre el largo 45.6 dam, pero primero tenemos que reducir los 45.6 dam a m:

$$45.6 \text{ dam a m} = 45.6 \times 10 = 456 \text{ m}$$

El ancho será: $140,008 \text{ m}^2 \div 456 \text{ m} = 307\frac{2}{57} \text{ m}$ R.

565 Un terreno cuadrado de 3 hm, 6 dam de lado se vende a 500 balboas el área. ¿Cuánto importará?

Tenemos que hallar la superficie del terreno en áreas y multiplicarla por 500 balboas. Pero como el terreno es cuadrado, el largo es igual al ancho; luego, la superficie será:

$$3 \text{ hm } 6 \text{ dam} = 36 \text{ dam} \quad 36 \text{ dam} \times 36 \text{ dam} = 1,296 \text{ dam}^2 \text{ o a}$$

El terreno importará: $1,296 \times 500 = 648,000$ balboas R.

258

Ejercicio

- Si el dm^2 de paño vale \$0.15, ¿a cómo sale el cm^2 , el m^2 , el dam^2 ? R. \$0.0015; \$15; \$1,500
- Se compran 8 ha 12 a y 23 ca de terreno a razón de 45 balboas el área. ¿Cuánto importa la venta? R. 36,550.35 balboas
- Si la tela de una pieza se vende a \$0.50 el dm^2 , ¿cuánto importan $5\frac{1}{2} \text{ m}^2$? R. \$275
- Se compró una finca de 4 km^2 6 ha y 34 a en \$4,997,982. ¿A cómo sale el área? R. \$123
- Se compra a razón de \$0.90 la ca un terreno de 14 ha 6 a. ¿Cuál es la ganancia si se vende por \$200,000? R. \$73,460
- Compré un terreno de 30 a 6 ca y otro de 40 a y pagué por el segundo 1,988 balboas más que por el primero. Si el precio de la ca es igual en ambos, hállese el importe de cada compra. R. 6,012 y 8,000 balboas

7. Se ha comprado un terreno de 14 ha en \$280,000. Si se quiere ganar \$70,000, ¿a cómo se debe vender el m²? **R. \$2.50**
8. ¿Cuál es la superficie en hectáreas, de un terreno rectangular de 13 hm de largo por 3 dam 6 m de ancho? **R. 4.68 ha**
9. ¿Cuánto importará un solar rectangular de 4 dam 6 m de largo por medio hm de ancho a razón de \$5.60 la ca? **R. \$12,880**
10. Se quiere pavimentar una sala rectangular de 6 dam de largo por 15 m de ancho con losas de mármol de 25 cm por 18 dm. ¿Cuántas losas se necesitarán? **R. 2,000**
11. ¿Cuánto costará pavimentar un cuarto cuadrado de 4 m por 4 m con losas de 20 cm por 20 cm que se compran a \$5,000 el millar? **R. \$2,000**
12. Una sala rectangular de 8 m por 6 m que tiene dos puertas de 1.50 m de ancho se le quiere poner un zócalo de 20 cm de altura empleando azulejos cuadrados de 20 cm × 20 cm. ¿Cuántos azulejos harán falta? **R. 125**
13. A una sala rectangular de 6 m por 4 m se le quiere poner en el piso, junto a las paredes, una cenefa de 20 cm de ancho. ¿Cuántas losas cuadradas de 20 cm × 20 cm harán falta para la cenefa? **R. 96**
14. Una sala tiene 4.40 m de largo y 3.80 m de ancho. ¿Cuántas losas cuadradas de 20 cm de lado harán falta para ponerle al piso de dicha sala una cenefa, junto a las paredes, que tenga dos losas de ancho? **R. 148**
15. A 500 quetzales el millar de adoquines, ¿cuánto costará pavimentar una calle rectangular de 50 m de largo y 8.50 m de ancho si cada adoquín cubre una superficie de 80 cm²? **R. Q. 26,562.50**
16. Un terreno cuadrado cuyo lado es 4 hm 3 m se vende a \$45.32 la ca. ¿Cuánto importa la venta? **R. \$7,360,375.88**
17. Hallar las dimensiones de una extensión cuadrada de 4 ha. **R. 2 hm de lado**
18. De una extensión cuadrada de 4.5 dam de lado se vende $\frac{2}{5}$ y lo restante se cultiva. ¿Cuántas áreas tiene la porción cultivada? **R. 16.20 a**
19. Una extensión rectangular de 4 km² 8 ha mide de largo 45 dam. ¿Cuál es el ancho? **R. $906\frac{2}{3}$ dam**
20. Si una casa ocupa un terreno rectangular de 10 a y tiene de frente 20 m, ¿cuántos metros tiene de fondo? **R. 50 m**
21. A un cuadro rectangular que tiene 2,400 cm² con 60 cm de largo se le quiere poner un marco que vale 7,500 bolívares el m. ¿Cuánto importará el marco? **R. 15,000 bolívares**
22. Un terreno rectangular de 14 ha que tiene de largo 70 dam se quiere rodear con una cerca que vale \$15 el m. ¿Cuánto importa la cerca? **R. \$27,000**
23. De mi finca de 5 ha, 4 a y 15 ca vendí los $\frac{2}{3}$, alquilé $\frac{1}{5}$ y lo restante lo estoy cultivando. ¿Cuántas áreas estoy cultivando? **R. 67.22 a**
24. Se tapizan las cuatro paredes de una sala rectangular de 15 m de largo, 8 m de ancho y 4 m de altura con piezas de papel tapiz de 368 cm² cada una. ¿Cuántas piezas se necesitarán y cuánto importará la obra si cada pieza de papel vale \$2.50? **R. 5,000; \$12,500**
25. Una sala rectangular tiene 15 m de largo, 6 m de ancho y 5 m de altura. La sala tiene cuatro ventanas de 1.50 m por 2 m. ¿Cuál es la superficie total de las cuatro paredes y cuántas piezas de papel de 44 cm 18 cm harán falta para cubrir las paredes? **R. 198 m²; 2,500 piezas**
26. Mi casa tiene 400 m² y mide de largo 40 m. ¿Cuántos dm tiene de ancho? **R. 100 dm**

MEDIDAS DE VOLUMEN

566 ¿Cuál será el volumen de una caja de 35 dm de largo, 16 dm de ancho y 140 cm de altura?

Para hallar el volumen hay que multiplicar las tres dimensiones, pero reduciéndolas previamente a una misma medida, por ejemplo, a dm.

No tenemos más que reducir los 140 cm de alto a dm, porque ya las otras dimensiones están expresadas en dm:

$$140 \text{ cm a dm} = 140 \div 10 = 14 \text{ dm}$$

El volumen será: $35 \text{ dm} \times 16 \text{ dm} \times 14 \text{ dm} = 7,840 \text{ dm}^3$ **R.**

567 En un montón de ladrillos de 48 m^3 , ¿cuántos ladrillos habrá si cada uno tiene 4 dm de largo, 10 cm de ancho y 6 cm de alto?

Hay que dividir el volumen del montón entre el volumen de un ladrillo.

Para hallar el volumen de un ladrillo tenemos que multiplicar sus tres dimensiones, reduciéndolas previamente a una misma medida; por ejemplo, a m:

$$4 \text{ dm a m} = 4 \div 10 = 0.4 \text{ m}$$

$$10 \text{ cm a m} = 10 \div 100 = 0.1 \text{ m}$$

$$6 \text{ cm a m} = 6 \div 100 = 0.06 \text{ m}$$

El volumen de un ladrillo será: $0.4 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} \times 0.06 \text{ m} = 0.0024 \text{ m}^3$

En el montón habrá: $48 \text{ m}^3 \div 0.0024 \text{ m}^3 = 20,000 \text{ ladrillos.}$ **R.**

259

Ejercicio

- ¿Cuántos dm^3 tendrá un depósito que mide 4 m de largo, 15 dm de altura y 6.5 m de ancho?
R. 39,000 dm^3
- En una caja de $12,500 \text{ cm}^3$, ¿cuántas cajas de cartón de 1 dm de largo, 0.5 dm de ancho y 5 cm de altura cabrán? **R. 50**
- En una caja de madera de 1.50 m de largo, 1 m de ancho y 80 cm de altura, ¿cuántas cajas de zapatos de 40 cm de largo, 20 cm de ancho y 10 cm de altura cabrán? **R. 150**
- Se quiere construir una pared de 25 m de largo, 21 dm de espesor y 10 m de altura. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán si cada uno tiene $25 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$? **R. 100,000**
- Cuatro vigas de 105 dm^3 cada una costaron 16,800 colones. ¿Cuánto cuesta el metro cúbico?
R. 40,000 colones
- Una caja de 500 dm^3 tiene de largo 10 dm y de ancho 50 cm. ¿Cuántos dm tiene de altura?
R. 10 dm
- En un patio de 35.42 m de largo y 16 m de ancho se quiere poner una capa de arena de 2 dm de altura. ¿Cuántos m^3 de arena harán falta? **R. 113.344 m^3**

8. En una sala hay 100 personas, correspondiendo a cada una 6 m^3 de aire. Si la longitud de la sala es de 25 m y el ancho 6 m, ¿cuál es la altura? **R. 4 m**
9. Una sala tiene 12 m de largo, 5 m de ancho y 4 m de altura. ¿Cuánto más alta que esta sala es otra sala del mismo largo y ancho en la cual, entrando 30 personas corresponden 9 m^3 de aire a cada una? **R. 50 cm**
10. Se ha abierto una zanja de 8.5 m de largo, 1.5 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿Cuántos viajes tendrá que hacer un camión que en cada viaje puede llevar 1.5 m^3 de tierra para transportar la tierra removida a otro lugar? **R. 17 viajes**

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Si el *dal* de vino se paga a \$200, ¿cuánto valdrá cada botella de 65 *cl* si las botellas vacías se pagan a \$50 el ciento?

568

Si 1 *dal* o 10 litros de vino cuestan \$200, un litro costará $\$200 \div 10 = \20 . Como 1 litro o 100 *cl* cuestan \$20, 1 *cl* costará $\$20 \div 100 = \0.20 , y si cada botella contiene 65 *cl* de vino, el vino de cada botella costará $\$0.20 \times 65 = \13 .

Si las botellas se pagan a \$50 el ciento, 1 botella vale $\$50 \div 100 = \0.5 ; luego, la botella llena de vino vale $\$13 + \$0.50 = \text{\textcolor{red}{\$13.50}}$ **R.**

1. Se han vendido 35 *hl* de vino por \$105,000. ¿Cuánto valdrán 4 *dal*? **R. \$1,200**
2. Un horno consume 3.5 *hl* de gas cada dos horas. Si el *hl* cuesta \$200, ¿cuánto se pagará por el consumo de tres días? **R. \$25,200**
3. En una *ha* de terreno se siembran 200 litros de trigo. ¿Cuántos *hl* se sembrarán en 5 a 8 *ca*? **R. 0.1016 *hl***
4. ¿Cuántos *cl* hay que verter en un *hl* para llenarlo hasta su cuarta parte? **R. 2,500 *cl***
5. Un depósito se llena por tres llaves. Una vierte 8 *l* por minuto, otra 14 *dal* en 2 minutos y la tercera 6 *hl* en 20 minutos. ¿Cuál será la capacidad del depósito si abriendo los tres grifos tarda en llenarse 8 horas? **R. 51,840 *l***
6. Para envasar 540 *dal* de vino, ¿cuántas botellas de 5 *dl* harán falta? **R. 10,800**
7. Un comerciante compró cierta cantidad de vino por \$27,000 pagando \$180 por *dal*. ¿A cómo tiene que vender el litro para ganar \$3,000? **R. \$20**
8. Se quieren envasar 3 *hl* 4 *dal* de vino en botellas de 85 *cl* de capacidad. ¿Cuántas botellas harán falta? **R. 400**
9. ¿Cuánto gasta al año una persona que bebe diariamente 5 *dl* de vino si lo paga a 8 balboas el litro? **R. 1,460 balboas**
10. Si un litro de ron cuesta \$150, ¿a cómo hay que vender el vasito de 5 *cl* para que la ganancia de un litro sea igual al costo? **R. \$15**

260

Ejercicio

MEDIDAS DE PESO

- 569** La mitad del agua que puede contener un depósito pesa 123 kg. ¿Cuántos dag pesarán los $\frac{2}{5}$ del agua contenida en el depósito cuando está lleno?

Si la mitad del agua que puede contener el depósito pesa 123 kg, cuando el depósito esté lleno contendrá una cantidad de agua que pesará $123 \text{ kg} \times 2 = 246 \text{ kg} = 24,600 \text{ dag}$. Luego, $\frac{1}{5}$ del agua que contiene el depósito cuando está lleno pesa $24,600 \text{ dag} \div 5 = 4,920 \text{ dag}$ y los $\frac{2}{5}$ pesarán $4,920 \text{ dag} \times 2 = 9,840 \text{ dag}$ **R.**

261

Ejercicio

- Se compran 14 kg de una mercancía por \$640. ¿A cómo hay que vender el dag para ganar \$200? **R. \$0.60**
- A un comerciante le ofrecen comprarle 8 kg de mantequilla a \$70 el kg pero no acepta y dos días después tiene que vender esa cantidad de mantequilla a razón de \$6 el hg. ¿Cuánto perdió? **R. \$80**
- Un comerciante que había comprado 5 Qm de papas, vendió los $\frac{3}{5}$. ¿Cuántos dag de papas le quedan? **R. 20,000 dag**
- Un comerciante compró 145 kg de una mercancía a \$0.80 el kg. $\frac{1}{5}$ de esta mercancía lo vendió a \$0.09 el hg y el resto a \$0.11 el hg. ¿Ganó o perdió y cuánto? **R. Ganó \$37.70**
- Se venden 13.56 kg de una mercancía a 800 lempiras el Qm. ¿Cuánto importa la venta? **R. 108.48 lempiras**
- Se hace una aleación de 3 kg 5 hg de plata con 45 g de níquel. ¿Cuánto se obtendrá de la aleación si el dag se vende a 42.50 nuevos soles? **R. 15,066.25 nuevos soles**
- Si el kg de una sustancia vale \$2.50, ¿a cómo salen los 5 Qm? **R. \$1,250**
- Si el hg de aceite vale 8 córdobas, ¿cuánto importará el aceite contenido en una botella que llena pesa 300 g y vacía 250 g? **R. 4 córdobas**
- Se compran 24 kg de una mercancía a razón de \$2 el hg. ¿A cómo hay que vender el dag para ganar en total \$240? **R. \$0.30**
- Un barril lleno de aceite ha costado \$2,460.90. El barril lleno de aceite pesa 315.18 kg y el peso del barril vacío es 45.08 kg. Si por el envase se cobran \$30, ¿a cómo sale el kg de aceite? **R. \$9**

570

EQUIVALENCIAS ENTRE LAS MEDIDAS DE PESO, CAPACIDAD Y VOLUMEN

PESO	CAPACIDAD	VOLUMEN
Tm.....	kl.....	m ³
kg.....	l.....	dm ³
g.....	ml.....	cm ³

OBSERVACIÓN

Las equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen son ciertas para todos los cuerpos, pero las equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen con las de peso **sólo son exactas para el agua destilada**. Para los demás cuerpos, hay que tener en cuenta su **densidad**. Si se trata de cuerpos **más densos que el agua destilada** sucederá que 1 kl o 1 m³, de estos cuerpos pesará más de 1 Tm; 1 litro o 1 dm³ pesará más de 1 kg y 1 ml o 1 cm³ pesará más de 1 g, y si se trata de cuerpos **menos densos que el agua destilada**, sucederá que 1 kl o 1 m³ de estos cuerpos pesará menos de 1 Tm, 1 litro o 1 dm³ pesará menos de 1 kg y 1 ml o 1 cm³ pesará menos de 1 g.

EJERCICIOS SOBRE ESTAS EQUIVALENCIAS

571

(En los ejercicios siguientes nos referimos siempre al agua destilada.)

Ejemplos

- 1) Si el agua de un depósito pesa 12.56 kg, ¿cuántos litros de agua hay en el depósito?

Como 1 litro de agua pesa 1 kg, en el depósito habrá **12.56 l** de agua **R.**

- 2) ¿Cuál es el volumen en dm³ de una masa de agua que pesa 345.32 g?

345.32 g = 0.34532 kg y como 1 dm³ de agua pesa 1 kg, el volumen de esa masa de agua será **0.34532 dm³** **R.**

- 3) ¿Cuántos ml de agua pesan 3 Qm y 4 kg?

Como 1 ml de agua pesa 1 g debemos reducir el denominador a gramos:

$$3 \text{ Qm a g} = 3 \times 100,000 = 300,000 \text{ g}$$

$$4 \text{ kg a g} = 4 \times 1,000 = 4,000 \text{ g}$$

304,000 g o ml **R.**

- 4) Si el agua de un depósito pesa 13.45 hg, ¿cuántos dal de agua hay en el depósito?

El agua pesa 13.45 hg = 1.345 kg y como un litro de agua pesa 1 kg en el depósito habrá 1.345 l de agua = **0.1345 dal** **R.**

- 5) ¿Cuántos Qm pesan 14 m³ 13 mm³ de agua?

Reduzcamos el volumen del agua a dm³:

$$14 \text{ m}^3 = 14 \times 1,000 = 14,000 \text{ dm}^3$$

$$13 \text{ mm}^3 = 13 \div 1,000,000 = 0.000013 \text{ dm}^3$$

$$= 14,000.000013 \text{ dm}^3$$

Como 1 dm³ de agua pesa 1 kg, el peso del agua será

$$14,000.000013 \text{ kg} = 140.00000013 \text{ Qm} \quad \mathbf{R.}$$

262

Ejercicio

Reducir, refiriéndose al agua destilada:

- | | | | |
|---|--------------------------------|--|------------------------------|
| 1. 14 ℓ a cm ³ | R. 14,000 cm ³ | 17. $\frac{2}{5}$ cm ³ a ℓ | R. 0.0004 ℓ |
| 2. 195 kl a dm ³ | R. 195,000 dm ³ | 18. $8\frac{1}{5}$ g a dm ³ | R. 0.0082 dm ³ |
| 3. 10.45 ml a m ³ | R. 0.00001045 m ³ | 19. $2\frac{1}{5}$ Tm a ml | R. 2,200,000 ml |
| 4. 156.34 kg a cm ³ | R. 156,340 cm ³ | 20. $\frac{1}{2}$ ml a dm ³ | R. 0.0005 dm ³ |
| 5. 8.63 Tm a dm ³ | R. 8,630 dm ³ | 21. $\frac{1}{4}$ kl a kg | R. 250 kg |
| 6. 145.32 g a m ³ | R. 0.00014532 m ³ | 22. $23\frac{1}{6}$ ℓ a g | R. 23,167 g |
| 7. 1,834.563 m ³ a ℓ | R. 1,834,563 ℓ | 23. 14 hl a g | R. 1,400,000 g |
| 8. 165 cm ³ a ℓ | R. 0.165 ℓ | 24. 563.2 kl a dm ³ | R. 563,200 dm ³ |
| 9. 12.356 dm ³ a ml | R. 12,356 ml | 25. 51.032 dag a m ³ | R. 0.00051032 m ³ |
| 10. 20.345 ℓ a g | R. 20,345 g | 26. 1,142.003 mm ³ a hl | R. 0.00001142003 hl |
| 11. 116.35 kl a kg | R. 116,350 kg | 27. 18,134 hg a hl | R. 18.134 hl |
| 12. 20,356.4 dm ³ a g | R. 20,356,400 g | 28. 1,413.5 dg a cl | R. 14.135 cl |
| 13. 8.65 m ³ a kg | R. 8,650 kg | 29. 103.54 hm ³ a hg | R. 1,035,400,000,000 hg |
| 14. $\frac{1}{5}$ kg a cm ³ | R. 200 cm ³ | | |
| 15. $\frac{2}{3}$ ℓ a Tm | R. 0.00067 Tm | | |
| 16. $\frac{1}{8}$ m ³ a g | R. 125,000 g | | |
| 30. 1,536 dl a Qm | R. 1.536 Qm | | |
| 31. 8 kg 6 dag a dm ³ | R. 8.06 dm ³ | | |
| 32. 15 hl 142 ℓ a cm ³ | R. 1,642,000 cm ³ | | |
| 33. 16 hl 19 dl a hg | R. 16,019 hg | | |
| 34. 8 dam ³ 14 m ³ 6 cm ³ a dal | R. 801,400.0006 dal | | |
| 35. 140 kl 8 dal 16 cl a dag | R. 14,008,016 dag | | |
| 36. 8 Qm 14 g 16 dg 6 cg a cl | R. 80,001.566 cl | | |
| 37. 14 dag 8 g 6 cg 4 mg a dal | R. 0.0148064 dal | | |
| 38. 190 kl 16 dal 8 dl 14 cl a dam ³ | R. 0.19016094 dam ³ | | |
| 39. 16 g 8 dg 6 cg 14 mg a kl | R. 0.000016874 kl | | |
| 40. 10 hm ³ 14 m ³ 5 cm ³ 6 mm ³ a cl | R. 1,000,001,400,000.5006 cl | | |

PROBLEMAS SOBRE LAS EQUIVALENCIAS ENTRE LAS MEDIDAS DE PESO, CAPACIDAD Y VOLUMEN

572

¿Cuántos litros de agua caben en un depósito de 10 m de largo, 6.5 m de ancho y 45 dm de altura?

Hallemos el volumen del depósito, y del volumen, por las equivalencias que conocemos, pasaremos a la capacidad.

El volumen del depósito es:

$$10 \text{ m} \times 6.5 \text{ m} \times 4.5 \text{ m} \times 292.5 \text{ m}^3 \times 292,500 \text{ dm}^3$$

Como 1 dm³ equivale a 1 litro, en el depósito caben **292,500 ℓ** R.

Un cubo lleno de agua pesa 9 kg, 6 hg, y vacío, 1.2 kg. ¿Cuántos litros de agua contiene el cubo lleno?

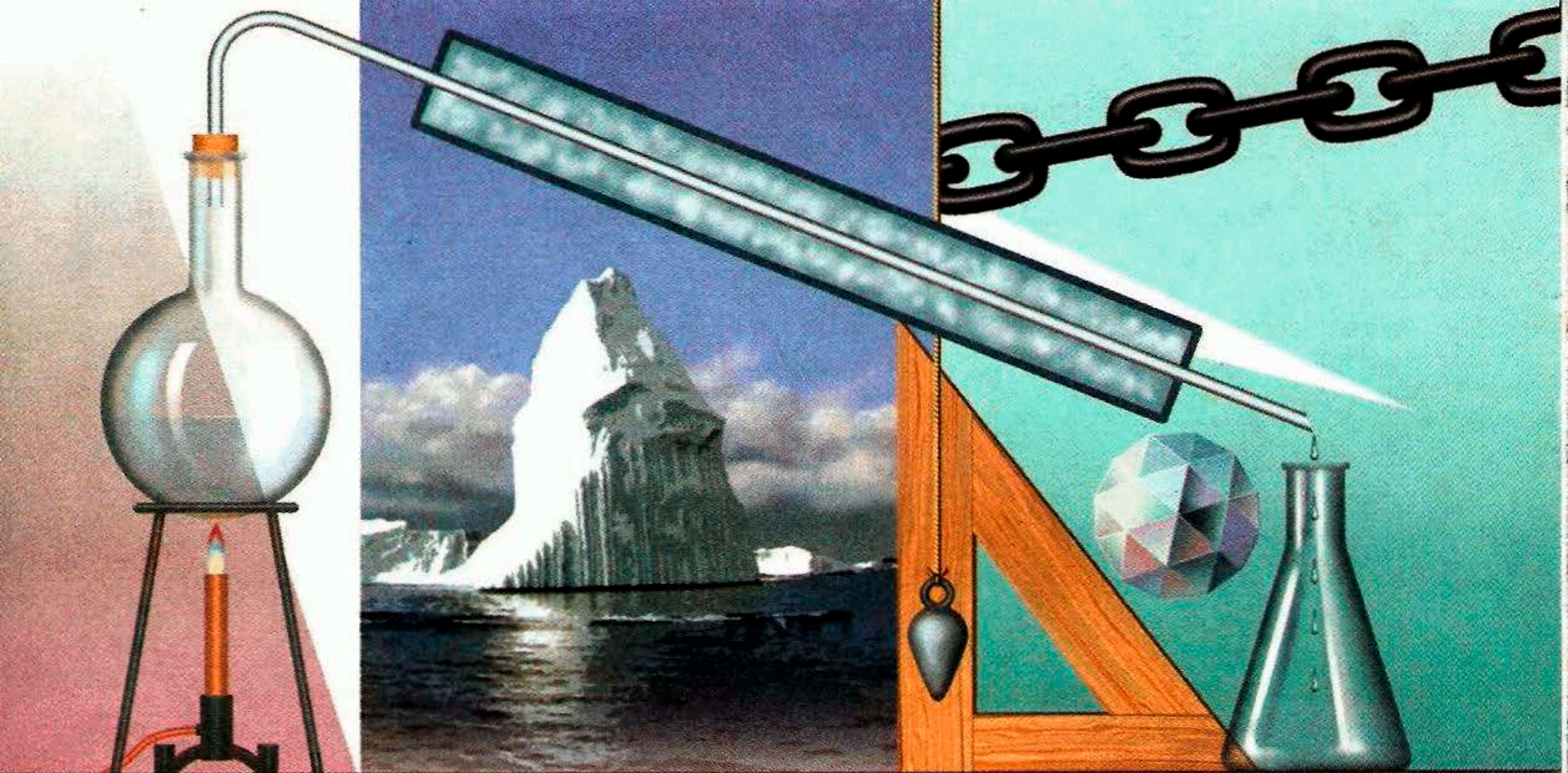
573

El cubo lleno de agua pesa $9\text{ kg } 6\text{ hg} = 9.6\text{ kg}$, y vacío, 1.2 kg ; luego, la diferencia $9.6\text{ kg} - 1.2\text{ kg} = 8.4\text{ kg}$ es el peso del agua. Como un litro de agua pesa 1 kg , el cubo contiene **8.4 ℓ de agua.** R.

263

Ejercicio

1. ¿Cuántos kg pesará el agua contenida en un depósito de 125 dm^3 ? R. **125 kg**
2. La capacidad de un estanque es de $14\text{ m}^3\text{ }16\text{ dm}^3$. ¿Cuántos dℓ de agua contendrá si se llena hasta la mitad? R. **70,080 dℓ**
3. Los $\frac{2}{3}$ de la capacidad de un estanque son 4 hℓ y 6 litros . ¿Cuántos hg pesará el agua del estanque lleno? R. **6,090 hg**
4. ¿Cuántos litros de agua caben en un estanque de 15 m de largo, 56 dm de ancho y 45 dm de alto? R. **378,000 ℓ**
5. Un estanque tiene 20 m de largo, 8 m de ancho y 45 dm de alto. ¿Cuántos dℓ de agua contiene si el agua llega a 50 cm del borde? R. **6,400,000 dℓ**
6. De un estanque que contiene 56.54 m^3 de agua, se sacan 14 hℓ . Dígase el peso del agua antes de sacar nada y el peso después de sacar los 14 hℓ en kg. R. **56,540 kg; 55,140 kg**
7. Un cubo lleno de agua pesa $14\text{ kg } 5\text{ hg}$, y vacío, 4 dag . ¿Cuántos litros contiene lleno? R. **14.46 ℓ**
8. Un depósito metálico lleno de agua pesa $45\text{ kg } 3\text{ dag}$. Si se vacía $\frac{1}{4}$ del contenido no pesa más que $38\text{ kg } 16\text{ dag}$. ¿Cuántos litros contiene lleno y cuánto pesa el depósito? R. **27.48 ℓ; 17.55 kg**
9. Un cubo vacío pesa 65 hg y lleno de agua $14\text{ kg } 6\text{ hg}$. ¿Cuánto pesa si se vacía $\frac{1}{3}$ del agua? R. **11.9 kg**
10. Se compran $4\text{ daℓ } 6\text{ litros}$ de agua destilada por $\$920$. ¿A cómo sale el gramo de agua? R. **2¢**
11. ¿Cuántos litros de agua contiene lleno un tanque de $80\text{ cm} \times 60\text{ cm} \times 50\text{ cm}$? R. **240 ℓ**
12. Si un tanque de 1 m de altura por 90 cm de ancho por 1.20 m de largo contiene 534 litros de agua, ¿cuánta agua habrá que echarle para llenarlo? R. **546 ℓ**
13. ¿Cuántos kg pesa el agua que puede contener un depósito cuyo ancho es el doble de su altura y cuya longitud es el doble de su ancho, siendo la altura 1 m ? R. **8,000 kg**
14. Si se quiere que en un depósito haya una masa de agua de $4\text{ toneladas métricas}$, ¿cuánto tiempo debe estar abierta una llave que echa 8 litros por minuto? R. **$8\frac{1}{3}\text{ h}$**
15. Un depósito de 3 m de largo, 2 m de ancho y 1.50 m de altura está lleno hasta sus $\frac{3}{4}$. ¿En cuánto tiempo acabará de llenarlo un grifo que vierte 50 litros de agua por minuto? R. **45 min**
16. Si un grifo llena los $\frac{3}{5}$ de un estanque de 1.20 m de largo, 1 m de ancho y 0.90 m de altura en 27 minutos , ¿cuántos kg pesa el agua que vierte el grifo en 1 minuto ? R. **24 kg**



La determinación de la densidad de los cuerpos es una consecuencia del Principio de Arquímedes, célebre físico y matemático griego del siglo III a. C. (287-212 a. C.). **Lefevre-Gineau** y **Giovanni Valentino Matías Fabroni**, que investiga-

ban el valor del gramo, descubrieron incidentalmente que el mínimo volumen del agua destilada se produce a los 4° C, que se toma como unidad.

Capítulo **XXXVI**

DENSIDAD

574 **DENSIDAD** de un cuerpo es el número que representa el peso, en gramos, de un centímetro cúbico de ese cuerpo.⁽¹⁾

Así, 1 cm³ de alcohol pesa 0.79 g; luego, la densidad del alcohol es 0.79; 1 cm³ de agua de mar pesa, por término medio, 1.03 g; luego, la densidad del agua de mar es 1.03.

Es evidente que si un cm³ de alcohol pesa 0.79 g, 1 dm³, que es 1,000 veces mayor, pesará mil veces más o sea 790 g = 0.79 kg, y 1 m³ de alcohol, que es un millón de veces mayor que el cm³, pesará un millón de veces más, o sea 790,000 g = 0.79 Tm.

Podemos, por tanto, decir también que la **densidad** de un cuerpo es el número que representa el **peso en kg de 1 dm³ del cuerpo** o el **peso en Tm de 1 m³ del cuerpo**.

575 CUERPOS MÁS DENSOS Y MENOS DENSOS QUE EL AGUA

Cuando 1 cm³ de un cuerpo pesa más de un gramo, ese cuerpo es **más denso que el agua destilada**, porque 1 cm³ de agua destilada, a 4° C, pesa un gramo y este es el peso que se toma como **unidad** para determinar las densidades, y cuando 1 cm³ de un cuerpo pesa menos de un gramo, ese cuerpo es **menos denso que el agua destilada**.

⁽¹⁾ La definición de **densidad** que se usa en este capítulo corresponde en sentido estricto al peso específico.

Por tanto, cuerpos **más densos** que el agua destilada son aquellos cuya **densidad es mayor que 1**, y cuerpos **menos densos** que el agua destilada son aquellos cuya **densidad es menor que 1**.

DENSIDAD DE ALGUNOS CUERPOS

CUERPOS	DENSIDAD	CUERPOS	DENSIDAD	CUERPOS	DENSIDAD
aceite de oliva	0.91	cedro	0.52	leche	1.03
acero	7.7	cerveza	1.02	marfil	1.87
agua destilada	1	cobre	8.9	mármol	2.7
agua de mar	1.03	corcho	0.24	mercurio	13.59
aire	0.00129	diamante	3.5	níquel	8.67
alcohol	0.79	estaño	7.3	oro	19.36
aluminio	2.58	éter	0.72	plata fundida	10.6
arena	2.3	gasolina	0.73	platino	21.5
azúcar	1.6	glicerina	1.26	petróleo	0.80
bencina	0.90	hielo	0.92	plomo	11.35
bronce	8.8	hierro	7.8	vino	0.99
caucho	0.93				

HALLAR LA DENSIDAD⁽¹⁾ DE UN CUERPO CONOCIENDO SU PESO Y SU VOLUMEN

576

Cuando se conoce el **peso** de un cuerpo y su **volumen**, para hallar la **densidad** del cuerpo, no hay más que **dividir el peso entre el volumen**:

$$D = \frac{P}{V}$$

- 1)** Sabiendo que 90 cm³ de aceite de oliva pesan 81.9 g, ¿cuál es la densidad del aceite de oliva?

Siendo la densidad el peso en g de 1 cm³ del cuerpo, dividiendo el peso total 81.9 g entre el volumen 90 cm³ obtendremos el peso en g de 1 cm³ del cuerpo, que es la densidad:

$$\frac{81.9 \text{ g}}{90 \text{ cm}^3} = 0.91, \text{ densidad del aceite de oliva} \quad \text{R.}$$

- 2)** Si 3 dm³ de oro pesan 58.08 kg, ¿cuál es la densidad del oro?

Como la densidad es el peso en kg de 1 dm³ del cuerpo, dividiendo el peso 58.08 kg entre los 3 dm³ del cuerpo obtendremos el peso en kg de 1 dm³ del cuerpo, que es la densidad:

$$\frac{58.08 \text{ kg}}{3 \text{ dm}^3} = 19.36, \text{ densidad del oro} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

⁽¹⁾ En la práctica, la densidad de un cuerpo se halla dividiendo el peso de un volumen cualquiera del cuerpo entre el peso de un volumen igual de agua destilada.

3) 3 litros de leche pesan 3.09 kg. ¿Cuál es la densidad de la leche?

3 litros de leche = 3 dm³ de leche, y como la densidad es el peso en kg de 1 dm³ de leche, tendremos:

$$\frac{3.09 \text{ kg}}{3 \text{ dm}^3} = 1.03, \text{ densidad de la leche} \quad \text{R.}$$

264

Ejercicio

Hallar la densidad de los cuerpos siguientes, comprobando los resultados con la tabla de densidades:

1. Platino	sabiendo que	8	cm ³	de platino	pesan	172	g
2. Cobre	"	20	"	"	"	178	"
3. Hierro	"	30	"	"	"	234	"
4. Diamante	"	0.4	"	"	"	1.4	"
5. Corcho	"	2	dm ³	"	"	0.48	kg
6. Cedro	"	0.05	"	"	"	0.026	"
7. Caucho	"	0.01	"	"	"	0.0093	"
8. Leche	"	1	litro	"	"	1.03	"
9. Éter	"	2	cl	"	"	14.4	g
10. Cerveza	"	3	ℓ	"	"	3	kg 60 g

577

HALLAR EL PESO DE UN CUERPO CONOCIENDO SU VOLUMEN Y SU DENSIDAD

Cuando se conoce el **volumen** de un cuerpo y su **densidad**; para hallar su **peso** no hay más que **multiplicar el volumen por la densidad**:

$$P = V \times D$$

Si el volumen se da en cm³, el peso resulta en g; si el volumen se da en dm³, el peso resulta en kg, y si se da en m³, el peso resulta en Tm.

Ejemplos

1) ¿Cuánto pesa una barra de hierro de 800 cm³?

Densidad del hierro, según la tabla, 7.8, lo que significa que 1 cm³ de hierro pesa 7.8 g, luego 800 cm³ de hierro pesarán 800 veces más, o sea

$$800 \text{ cm}^3 \times 7.8 \text{ g} = 6,240 \text{ g} = 6.24 \text{ kg} \quad \text{R.}$$

2) ¿Cuánto pesan 5 litros de vino?

Densidad del vino 0.99, lo que significa que 1 dm³ o sea 1 litro de vino pesa 0.99 kg, luego 5 litros de vino pesarán 5 veces más, o sea $5 \ell \times 0.99 \text{ kg} = 4.95 \text{ kg}$ **R.**

3) ¿Cuánto pesan 8 m³ de aire?

Densidad del aire 0.00129, lo que significa que 1 m³ de aire pesa 0.00129 Tm; luego, 8 m³ de aire pesarán $0.00129 \text{ Tm} \times 8 = 0.01032 \text{ Tm} = 10.32 \text{ kg}$ **R.**

265

Ejercicio

Hallar el peso de los cuerpos siguientes (busque sus densidades en la tabla):

- | | | | |
|-----------------------------------|------------|---------------------------------|---------------|
| 1. 10 cm ³ de platino | R. 215 g | 6. 20 dm ³ de aceite | R. 18.2 kg |
| 2. 43 cm ³ de mármol | R. 116.1 g | 7. 30 ℓ de gasolina | R. 21.9 kg |
| 3. 890 cm ³ de leche | R. 916.7 g | 8. 1 ℓ de alcohol | R. 0.79 kg |
| 4. 300 ml de vino | R. 297 g | 9. 30 ℓ de cerveza | R. 30.6 kg |
| 5. 30 dm ³ de petróleo | R. 24 kg | 10. 9 m ³ de aire | R. 0.01161 Tm |

HALLAR EL VOLUMEN DE UN CUERPO CONOCIENDO SU PESO Y SU DENSIDAD

578

Cuando se conoce el **peso** de un cuerpo y su **densidad**, para hallar el **volumen** no hay más que **dividir el peso entre la densidad**:

$$V = \frac{P}{D}$$

Si el peso se da en g, el volumen resulta en cm³; si se da en kg, el volumen resulta en dm³, y si se da en Tm, el volumen resulta en m³.

- 1) ¿Cuál es el volumen de una barrita de hierro que pesa 390 g?

Densidad del hierro, según la tabla, 7.8, lo que significa que 1 cm³ de hierro pesa 7.8 g, luego dividiendo los 390 g que pesa la barra de hierro entre el peso de 1 cm³ de hierro que es 7.8 g obtendremos el volumen de la barra en cm³, o sea:

$$\frac{390 \text{ g}}{7.8 \text{ g}} = 50 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

- 2) ¿Cuántos litros de gasolina pesan 29.2 kg?

Densidad de la gasolina 0.73, lo que significa que 1 dm³ = 1 litro de gasolina pesa 0.73 kg, luego dividiendo el peso total 29.2 kg entre el peso de 1 litro, 0.73 kg obtendremos el total de litros:

$$\frac{29.2 \text{ kg}}{0.73 \text{ kg}} = 40 \text{ ℓ} \quad \text{R.}$$

- 3) Si una masa de plata fundida pesa 0.4558 Tm, ¿cuántos m³ de plata hay?

Densidad de la plata fundida 10.6, lo que significa que 1 m³ de plata fundida pesa 10.6 Tm, luego dividiendo el peso total 0.4558 Tm entre el peso de 1 m³, 10.6 Tm, obtendremos el volumen de la plata en m³:

$$\frac{0.4558 \text{ Tm}}{10.6 \text{ Tm}} = 0.043 \text{ m}^3 \quad \text{R.}$$

Ejemplos

266

Ejercicio

(Busque las densidades en la tabla de la pág. 433.)

1. Hallar el volumen de una barra de acero que pesa 3,080 g. **R. 400 cm³**
2. Hallar el volumen de la cantidad de petróleo que pesa 400 g. **R. 500 cm³**
3. Hallar el volumen de una barra de cobre que pesa 6,408 g. **R. 720 cm³**
4. ¿Cuántos dm³ tiene un trozo de mármol que pesa 16.2 kg? **R. 6 dm³**
5. ¿Cuántos ℓ de cerveza pesan 8.16 kg? **R. 8 ℓ**
6. ¿Cuántos dm³ de arena pesan 11.50 kg? **R. 5 dm³**
7. Si la leche de un depósito pesa 9.27 kg, ¿cuántos ℓ de leche hay? **R. 9 ℓ**
8. ¿Qué volumen ocupa una masa de azúcar que pesa 12.8 kg? **R. 8 dm³**
9. ¿Cuántos litros de éter pesan 14.40 kg? **R. 20 ℓ**
10. ¿Qué volumen ocupa el cedro que pesa 41.6 Tm? **R. 80 m³**

PROBLEMAS SOBRE DENSIDADES

579 Una vasija vacía pesa 1.5 kg y llena de alcohol pesa 6.24 kg. ¿Cuál es la capacidad de la vasija?

El alcohol de la vasija pesa $6.24 \text{ kg} - 1.5 \text{ kg} = 4.74 \text{ kg}$.

Siendo la densidad del alcohol 0.79, 1 dm³ de alcohol, o sea 1 litro, pesa 0.79 kg; luego, dividiendo el peso del alcohol, 4.74 kg, entre el peso de 1 litro, 0.79 kg, obtendremos los litros de alcohol que hay en la vasija:

$$\frac{4.74 \text{ kg}}{0.79 \text{ kg}} = 6 \text{ ℓ, capacidad de la vasija} \quad \text{R.}$$

580 En una vasija llena de agua se introduce un pedazo de bronce y se derraman 2 ℓ 6 dℓ de agua. ¿Cuánto pesa el pedazo de bronce?

Si al introducir el pedazo de bronce el agua desalojada es $2 \text{ ℓ } 6 \text{ dℓ} = 2.6 \text{ ℓ} = 2.6 \text{ dm}^3$, el volumen del trozo de bronce es 2.6 dm³.

La densidad del bronce es 8.8, o sea que 1 dm³ de bronce pesa 8.8 kg; luego, 2.6 dm³ de bronce pesarán $2.6 \text{ dm}^3 \times 8.8 \text{ kg} = 22.88 \text{ kg}$ **R.**

581 Un lechero vende 8 litros de leche que pesan 8.18 kg. Siendo la densidad de la leche 1.03, averiguar si la leche es pura o no, y en caso negativo, hallar con qué cantidad de agua adulteró la leche.

Siendo la densidad de la leche 1.03, 1 dm³, o sea 1 litro de leche, pesa 1.03 kg; luego, los 8 litros de leche debían pesar $8 \times 1.03 \text{ kg} = 8.24 \text{ kg}$, y como la leche vendida pesa 8.18 kg, la leche no es pura, porque hay una diferencia de peso de $8.24 \text{ kg} - 8.18 \text{ kg} = 0.06 \text{ kg}$.

Siendo la densidad de la leche 1.03, 1 litro de leche pesa 1.03 kg, y como 1 litro de agua pesa 1 kg, cada vez que en lugar de 1 litro de leche ponga un litro de agua, el peso bajará $1.03 \text{ kg} - 1 \text{ kg} = 0.03 \text{ kg}$; luego, como la diferencia total de peso es 0.06 kg, dividiendo

0.06 kg entre 0.03 kg obtendremos los litros de agua que se han añadido, o sea $0.06 \text{ kg} \div 0.03 \text{ kg} = 2$ litros de agua.

Luego, en los 8 litros que se han vendido como leche, hay **6 litros de leche y 2 de agua.** **R.**

(Para estos ejercicios consulte la tabla de densidades, pág. 433.)

267

Ejercicio

1. Si 6 litros de leche pesan 6.14 kg, ¿es pura la leche? **R. No**
2. Si a 5 litros de leche se añade 1 litro de agua, ¿cuál es la densidad de la mezcla? **R. 1.025**
3. Si a 8 litros de alcohol se añade 1 litro de agua, ¿cuánto pesa la mezcla? **R. 7.32 kg**
4. Una vasija que pesa 1.5 kg y cuya capacidad es de 6 ℓ, ¿cuánto pesará llena de alcohol?
R. 6.24 kg
5. Una vasija llena de cerveza pesa 12.2 kg y vacía pesa 2 kg. ¿Cuál es la capacidad de la vasija?
R. 10 ℓ
6. Un depósito lleno de petróleo pesa 4,023.16 kg y vacío pesa 23.16 kg. ¿Cuál es la capacidad del depósito? **R. 5,000 ℓ**
7. Si en un depósito se echan 8 ℓ de glicerina pesa 13.14 kg. ¿Cuál es el peso del depósito?
R. 3.06 kg
8. Si en un depósito lleno de agua se introduce un pedazo de hierro se derraman 3 ℓ 8 dℓ de agua. ¿Cuál es el peso del trozo de hierro? **R. 29.64 kg**
9. ¿Cuánto pesa un pedazo de hielo de 500 cm³? **R. 460 g**
10. Un lechero vende 9 ℓ de leche que pesan 9.18 kg. ¿Es pura la leche? ¿Qué cantidad de agua y de leche hay en la mezcla? **R. No; 6 ℓ de leche y 3 de agua.**
11. Si en una vasija llena de agua se introduce un pedazo de mármol se derrama $\frac{1}{2}$ litro de agua. Si la vasija pesa ahora 850 g más que antes, ¿cuál es la densidad del mármol? **R. 2.7**
12. ¿Cuánto pesa un trozo de níquel si al introducirlo en una vasija llena de agua se derrama medio litro? **R. 4.335 kg**
13. Si en una vasija se echan 100 cm³ de vino, la vasija pesa 224 g. ¿Cuál es el peso de la vasija?
R. 125 g
14. Un vaso vacío pesa 200 g, lleno de agua 300 g y lleno de ácido nítrico 350 g. ¿Cuál es la densidad del ácido nítrico? **R. 1.5**
15. En un frasco cuya capacidad es de 2 litros se echa una cantidad de alcohol que pesa 1.185 kg. ¿Cuántos litros de alcohol se han echado y cuánto pesa el agua necesaria para acabar de llenar el frasco?
R. 1.5 ℓ de alcohol; 0.5 kg
16. Una barrica contiene 300 ℓ de vino y el vino pesa 297.3 kg. Decir si el vino es puro o no y en caso negativo qué cantidad de agua y de vino hay en la mezcla. **R. No; 270 ℓ de vino y 30 de agua**



Contar y medir son las primeras actividades matemáticas del hombre. Los hombres primitivos, para medir el largo de una cosa cualquiera, utilizaban medidas basadas en el cuerpo humano. Los egipcios, quienes llegaron a poseer un sistema

de medidas bastante aceptable, emplearon las proporciones del cuerpo humano para establecer las primeras unidades de medida. Así surgió el palmo, el pie, el cúbito, etcétera.

Capítulo **XXXVII**

OTROS SISTEMAS DE MEDICIÓN

582 En toda Latinoamérica se emplea el Sistema Internacional de Unidades. No obstante, todavía se usan algunas medidas del antiguo y original sistema español, del sistema inglés y locales.

583 MEDIDAS ANTIGUAS

Este sistema de medidas fue introducido por los colonizadores españoles. A continuación se presentan las medidas de peso y de longitud.

MEDIDAS ANTIGUAS

Sistema de Castilla

MEDIDAS LINEALES	MEDIDAS SUPERFICIALES
1 legua = 6,666 $\frac{2}{3}$ v	1 legua ² = 44,444,444 $\frac{4}{9}$ v ²
1 vara = 3 pies = 0.836 m	1 vara ² = 9 pies ²
1 pie = 12 pulgadas	1 pie ² = 144 pulg ²
1 pulg = 12 líneas	1 pulg ² = 144 líneas ²
1 línea = 12 puntos	

MEDIDAS CÚBICAS		MEDIDAS DE CAPACIDAD	
		PARA ÁRIDOS	PARA LÍQUIDOS
1 vara ³ = 27 pies ³		1 cahiz = 12 fanegas	1 cántara = 8 azumbres
1 pie ³ = 1,728 pulg ³		1 fanega = 2 celemines	1 azumbre = 4 cuartillos
1 pulg ³ = 1,728 líneas ³		1 celemín = 4 cuartillos	1 cuartillo = 4 copas
		1 cuartillo = 4 ochavos	
MEDIDAS DE PESO			
PESAS COMERCIALES		PESAS PARA MEDICINA Y FARMACIA	
1 tonelada (T) = 20 quintales		1 libra = 12 onzas = 345.7 gramos	
1 quintal (qq) = 4 arrobas		1 onza = 8 dracmas	
1 arroba (@) = 25 libras		1 dracma = 3 escrúpulos	
1 libra (lb) = 16 onzas = 460 gramos		1 escrúpulo = 24 granos	
1 onza = 16 adarmes		PESAS PARA ORO, PLATA Y PIEDRAS PRECIOSAS	
1 adarme = 3 tomines		1 libra = 2 marcos	1 ochavo = 6 tomines
1 tomín = 12 granos		1 marco = 8 onzas	1 tomín = 3 quilates
1 grano = 0.049 gramos		1 onza = 8 ochavos	1 quilate = 4 granos

El **quilate** es la principal medida de peso para oro, plata y piedras preciosas. Equivale a 0.2 gramos.

El **quilate** también se emplea para medir la **proporción de oro** de un objeto, pero en este caso significa $\frac{1}{24}$. Así, oro de 14 K significa que tiene $\frac{14}{24}$ de oro y $\frac{10}{24}$ de otro metal; oro de 18 K significa que tiene $\frac{18}{24}$ de oro y $\frac{6}{24}$ de otro metal.

MEDIDAS CUBANAS

MEDIDAS DE LONGITUD

La unidad de las medidas cubanas de longitud es la **vara cubana**, que tiene 0.848 m.

Tiene dos múltiplos: el **cordel lineal** y la **legua cubana**.

El **cordel lineal** tiene 24 varas, y como cada vara tiene 0.848 m, el cordel lineal mide $24 \times 0.848 \text{ m} = 20.352 \text{ m}$.

La **legua cubana** tiene $208\frac{1}{3}$ cordeles, y como cada cordel tiene 24 varas, la legua tiene $208\frac{1}{3} \times 24 \text{ v} = 5,000 \text{ v}$, y como cada vara tiene 0.848 m, la legua tiene $5,000 \times 0.848 \text{ m} = 4,240 \text{ m}$.

MEDIDAS DE SUPERFICIE

La unidad es la **vara cuadrada** o **vara plana**, que es un cuadrado cuyo lado es una vara lineal cubana. Si cada lado de la vara cuadrada es una vara lineal cubana y ésta mide 0.848 m, la vara cuadrada tiene $0.848 \text{ m} \times 0.848 \text{ m} = 0.719104 \text{ m}^2$.

Tiene tres múltiplos: el **cordel plano** o **cuadrado**, la **mesana** y la **caballería**.

El **cordel plano** o **cuadrado** es un cuadrado cuyo lado es un cordel lineal, o sea, que su lado vale 24 varas o 20.352 m; luego, un cordel plano tiene $24 v \times 24 v = 576 v^2$ y en m^2 su superficie es $20.352 m \times 20.352 m = 414.2 m^2$.

La **mesana** o **besana** es un cuadrado que tiene 60 varas de lado, o sea, $3,600 v^2$. Como $60 v = 60 \times 0.848 m = 50.88 m$, la mesana tiene $50.88 m \times 50.88 m = 2,588.7 m^2$.

La **caballería de tierra** es un cuadrado que tiene 18 cordeles de lado, o sea, $18 c \times 18 c = 324 c^2$. Como 1 cordel cuadrado tiene $576 v^2$, la caballería mide $324 \times 576 v^2 = 186,624 v^2$, y como cada vara cuadrada tiene $0.719 m^2$, la caballería mide $186,624 \times 0.719 m^2 = 134,202 m^2$.

Existen otras dos medidas de superficie que son el **corral** y el **hato**.

El **corral** es una medida circular que tiene una legua cubana de radio, equivaliendo a 421 caballerías, y el **hato** es una medida circular que tiene dos leguas cubanas de radio, siendo por tanto 4 veces mayor que el corral, o sea, 1,684 caballerías.

MEDIDAS CÚBICAS

Existe la **vara cúbica cubana**, que es un cubo cuyo lado es una vara lineal. La vara cúbica tiene, por tanto, $0.848 \times 0.848 \times 0.848 m = 0.609 m^3$.

La vara cúbica cubana no se usa en la práctica. Se emplea el m^3 .

MEDIDAS DE CAPACIDAD

La unidad de las medidas cubanas de capacidad es la **botella**, que equivale a 0.725ℓ . Tiene dos múltiplos: el **garrafón**, que tiene 25 botellas, y la **pipa**, que tiene 24 garrafones.

MEDIDAS DE PESO

Para medir los pesos empleamos las medidas de peso del Sistema de Castilla, expuestas antes, cuya unidad es la **libra** = 0.46 kg.

RESUMEN DE LAS MEDIDAS CUBANAS

MEDIDAS LINEALES		1 vara = 0.848 m
	1 cordel = 24 varas = 20.352 "	
	1 legua = $208\frac{1}{3}$ cordeles = 5,000 varas = 4,240 "	
MEDIDAS DE SUPERFICIE		1 vara ² = 0.719 m ²
	1 cord. ² = 576 varas ² = 414.2 "	
1 mesana = 6.25 "	= 3,600 "	= 2,588.7 "
1 caballería = 324 "	= 186,624 "	= 134,202 "
MEDIDAS CÚBICAS		1 vara ³ = 0.609 m ³
MEDIDAS DE CAPACIDAD		1 botella = 0.725 ℓ
	1 garrafón = 25 botellas = 18.125 "	
1 pipa = 24 garrafones = 600 "		= 435 "

OTRAS MEDIDAS USUALES EN CUBA

1 vara española	= 0.836 m
1 yarda	= 0.914 m
1 milla	= 1,609 m
1 kg	= 2.17 lb o 2.2 lb
1 galón americano	= 3.78 litros

REDUCCIÓN DE MEDIDAS CUBANAS A MÉTRICAS

585

REGLA

Se multiplica la medida dada por su equivalente métrico.

- 1) ¿Cuántos m son 23.5 varas cubanas?

Como una vara cubana tiene 0.848 m, 23.5 varas tendrán:

$$23.5 \text{ v} \times 0.848 \text{ m} = \mathbf{19.928 \text{ m}} \quad \text{R.}$$

- 2) ¿Cuántos km son $5\frac{1}{2}$ leguas?

Como una legua tiene 4,240 m, 5.5 leguas tendrán:

$$5.5 \text{ leg} \times 4,240 \text{ m} = 23,320 \text{ m} = \mathbf{23.32 \text{ km}} \quad \text{R.}$$

- 3) ¿Cuántas ca hay en $8\frac{1}{2}$ cordeles planos?

Como un cordel plano tiene 414.2 m² o ca, $8\frac{1}{2}$ cord. planos tendrán:

$$8.5 \text{ cord.} \times 414.2 \text{ m}^2 = \mathbf{3,520.7 \text{ ca}} \quad \text{R.}$$

- 4) ¿Cuántas ha hay en $3\frac{3}{4}$ caballerías?

Como una caballería tiene 134,202 m², en $3\frac{3}{4}$ cab. habrá:

$$3.75 \text{ cab.} \times 134,202 \text{ m}^2 = 503,257.5 \text{ m}^2 = \mathbf{50.32575 \text{ ha}} \quad \text{R.}$$

- 5) ¿Cuántos daℓ hay en 50 botellas?

Como una botella tiene 0.725 ℓ, 50 botellas tendrán:

$$50 \text{ bot.} \times 0.725 \text{ ℓ} = 36.25 \text{ ℓ} = \mathbf{3.625 \text{ daℓ}} \quad \text{R.}$$

Ejemplos

Reducir:

- 50 v a m, a dam **R. 42.4 m; 4.24 dam**
- 7 cord. a v **R. 168 v**
- 9 cord. a m, a dam **R. 183.168 m; 18.3168 dam**
- 4 leg a cord. **R. $833\frac{1}{3}$ cord.**

268

Ejercicio

- | | |
|--|------------------------------------|
| 5. $1\frac{1}{2}$ leg a varas | R. 7,500 v |
| 6. $1\frac{3}{4}$ leg a m, a km | R. 7,420 m; 7.42 km |
| 7. 30 v ² a ca, a a | R. 21.57 v ² ; 0.2157 a |
| 8. 5 cord. planos a v ² | R. 2,880 v ² |
| 9. $3\frac{1}{2}$ cord. ² a a | R. 14.497 a |
| 10. 3 mes a cord. ² | R. 18.75 cord. ² |
| 11. $7\frac{3}{4}$ bes a v ² | R. 27,900 v ² |
| 12. 20 bes a a | R. 517.74 a |
| 13. $2\frac{1}{2}$ cab. a cord. ² | R. 810 cord. ² |
| 14. $1\frac{2}{5}$ cab. a cord. ² | R. 453.6 cord. ² |
| 15. $2\frac{3}{4}$ cab. a v ² | R. 513,216 v ² |
| 16. $3\frac{4}{5}$ cab. a ca, a ha | R. 509,967.6 ca; 50.99676 ha |
| 17. 70 bot a ℓ, a daℓ | R. 50.75 ℓ; 5.075 daℓ |
| 18. 3 garraf. a botellas | R. 75 bot. |
| 19. 7 garraf. a ℓ, a daℓ | R. 126.875 ℓ; 12.6875 daℓ |
| 20. 2 pipas a bot., a ℓ | R. 1,200 bot.; 870 ℓ |
| 21. 80 lb a kg | R. 36.8 kg |
| 22. 3@ a kg | R. 34.50 kg |
| 23. 5 galones a ℓ, a daℓ | R. 18.9 ℓ; 1.89 daℓ |
| 24. 100 yardas a m, a dam | R. 91.4 m; 9.14 dam |
| 25. 100 v esp. a m, a dam | R. 83.6 m; 8.36 dam |
| 26. 50 millas a km | R. 80.45 km |

6) ¿Cuántos m hay en 7 cord. 8 varas?

En 7 cord. hay $7 \times 24 \text{ v} = 168 \text{ v}$. Añadiendo las 8 varas habrá $168 \text{ v} + 8 \text{ v} = 176 \text{ v}$. Reduciendo estas varas a metros:

$$176 \text{ v} \times 0.848 \text{ m} = 149.248 \text{ m} \quad \text{R.}$$

7) ¿Cuántos hm hay en 3 leg, 7 cord. 9 varas?

Reducimos las 3 leg a cord.: $3 \times 208\frac{1}{3} = 625 \text{ cord.}$

$$625 \text{ cord.} + 7 \text{ cord.} = 632 \text{ cord.}$$

Reducimos los 632 cord. a varas: $632 \times 24 = 15,168 \text{ v}$

$$15,168 \text{ v} + 9 \text{ v} = 15,177 \text{ v}$$

Reduciendo estas varas a m:

$$15,177 \text{ v} \times 0.848 \text{ m} = 12,870.096 \text{ m} = \mathbf{128.70096 \text{ hm}} \quad \mathbf{R.}$$

8) ¿Cuántas áreas hay en 2 cab 80 cordeles planos?

Reducimos las 2 cab a cord.²: $2 \times 324 = 648 \text{ cord.}^2$

$$648 \text{ cord.}^2 + 80 \text{ cord.}^2 = 728 \text{ cord.}^2$$

Reduciendo los 728 cord.² a m²:

$$728 \times 414.2 \text{ m}^2 = 301,537.6 \text{ m}^2 = \mathbf{3,015.376 \text{ a}} \quad \mathbf{R.}$$

9) ¿Cuántos ℓ hay en 2 garrafones 5 botellas?

En 2 garrafones hay $2 \times 25 = 50$ botellas, más las 5 botellas que ya tenemos son 55 botellas. Reduciendo estas 55 botellas a litros:

$$55 \times 0.725 \text{ ℓ} = \mathbf{39.875 \text{ ℓ}} \quad \mathbf{R.}$$

Reducir:

- | | | | |
|---|---------------------------|-------------------------------------|---------------|
| 1. 2 cord. 5 v a m | R. 44.944 m | 7. 5 cab 80 cord. ² a ha | R. 70.414 ha |
| 2. 3 leg 900 v a m | R. 13,483.2 m | 8. 3 garraf. 10 bot. a ℓ | R. 61.625 ℓ |
| 3. 6 leg 100 cord. a km | R. 27.4752 km | 9. 2 pipas 50 bot. a kℓ | R. 0.90625 kℓ |
| 4. 2 mes. 200 v ² a m ² | R. 5,320.6 m ² | 10. 2 @ 8 lb a kg | R. 26.68 kg |
| 5. 3 cord. ² 50 v ² a a | R. 12.78382 a | 11. 5 qq 10 lb a kg | R. 234.6 kg |
| 6. 3 cab 1,000 v ² a a | R. 4,032.66968 a | 12. 2 T a hg | R. 18,400 hg |

269

Ejercicio

Reducir:

- | | | | |
|--|---|-----------------------------------|-------------------------------|
| 1. 8,000 v a cord., a leguas | R. $333\frac{1}{3} \text{ cord.}; 1\frac{3}{5} \text{ leg}$ | 6. 1,134 cord. ² a cab | R. $3\frac{1}{2} \text{ cab}$ |
| 2. 1,875 cord. a leguas | R. 9 leg | 7. 75 bot a garraf. | R. 3 garraf. |
| 3. 2,000 v ² a cord. planos | R. $3\frac{17}{36} \text{ cord.}^2$ | 8. 2,400 bot. a garraf., a pipas | R. 96 garraf.; 4 p |
| 4. 1,306,368 v ² a cab | R. 7 cab | 9. 80 lb a arrobas | R. $3\frac{1}{5} @$ |
| 5. 18,000 v ² a mesanas | R. 5 mes. | 10. 5,000 lb a T | R. $2\frac{1}{2} \text{ T}$ |

270

Ejercicio

REDUCCIÓN DE MEDIDAS MÉTRICAS A CUBANAS

586

REGLA

Se reducen las medidas métricas a su unidad y se divide este resultado entre el equivalente métrico de la medida a que se quiere reducir.

Ejemplos

- 1) Reducir 4 dam a varas cubanas.

Primero reducimos los 4 dam a m: $4 \text{ dam} = 40 \text{ m}$.

Como una vara cubana tiene 0.848 m, las veces que 0.848 m esté contenido en 40 m serán las varas cubanas que hay en 40 m:

$$40 \text{ m} \div 0.848 \text{ m} = 47.16 \text{ v} \quad \text{R.}$$

- 2) ¿Cuántos cordeles hay en 4 km 3 dam?

Reducimos los 4 km 3 dam a m y tendremos 4,030 m.

Como un cordel lineal tiene 20.352 m, las veces que este número esté contenido en 4,030 m, serán los cordeles que hay en 4,030 m:

$$4,030 \text{ m} \div 20.352 \text{ m} = 198.01 \text{ cord.} \quad \text{R.}$$

- 3) ¿Cuántas caballerías hay en 46 ha, 97 a, 7 ca?

Reduciendo este denominado a ca tenemos 469,707 ca.

Como una cab. tiene 134,202 ca, las veces que este número esté contenido en 469,707 ca serán las cab. que hay en esta cantidad:

$$469,707 \text{ ca} \div 134,202 \text{ ca} = 3.5 \text{ cab.} \quad \text{R.}$$

- 4) ¿Cuántas libras hay en 3 Qm 4 hg?

Reduciendo este denominado a kg tendremos 300.4 kg.

Como 1 libra tiene 0.46 kg, dividiendo 300.4 kg entre 0.46 kg tendremos las libras que hay en 300.4 kg:

$$300.4 \text{ kg} \div 0.46 \text{ kg} = 653.04 \text{ lb} \quad \text{R.}$$

271

Reducir:

Ejercicio

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1. 50 m a v, a cord. | R. 58.962 v; 2.457 cord. | 16. 3 hm 5 dam a varas | R. 412.736 v |
| 2. 8 dam a cord. | R. 3.931 cord. | 17. 2 km 18 m a cord. | R. 99.155 cord. |
| 3. 9 km a v, a leg | R. 10,613.208 v; 2.123 leg | 18. 12 km 5 hm a leg | R. 2.948 leg |
| 4. 80 ca a v ² | R. 111.266 v ² | 19. 3 a 8 ca a v ² | R. 428.373 v ² |
| 5. 9 a a cord. ² | R. 2.173 cord. ² | 20. 3 ha 8 a a cord. ² | R. 74.36 cord. ² |
| 6. 3 ha a besanas | R. 11.589 bes. | 21. 2 km ² 8 ha a cab. | R. 15.499 cab. |
| 7. 8 km ² a cab. | R. 59.612 cab. | 22. 7 hl 6 l a botellas | R. 973.793 bot. |
| 8. 15 l a bot. | R. 20.69 bot. | 23. 9 kl 7 dal a garraf. | R. 500.414 garraf. |
| 9. 50 dal a garraf. | R. 27.586 garraf. | 24. 4 dal 6 l a galones | R. 12.169 galones |
| 10. 5 galones a bot. | R. 26.069 bot. | 25. 2 Qm 8 kg a lb | R. 451.36 lb |
| 11. 125 kg a lb | R. 271.25 lb | 26. 5 dam 8 m a v esp. | R. 69.378 v esp. |
| 12. 500 v esp. a dam | R. 41.8 dam | 27. 3 km 8 hm a yardas | R. 4,157.549 yardas |
| 13. 500 yardas a dam | R. 45.7 dam | 28. 500 v cub. a v esp. | R. 507.177 v esp. |
| 14. 50 km a millas | R. 31.075 millas | 29. 500 v cub. a yardas | R. 463.895 yardas |
| 15. 89 hm a millas | R. 5.531 millas | | |

PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS CUBANAS

Un terreno rectangular de 14 cordeles de frente por 45 varas de fondo se vende a \$50 el área. ¿Cuánto importa?

587

Primero reducimos los cordeles de frente y las varas de fondo a metros:

$$14 \text{ cord. a metros} = 14 \times 20.352 = 284.9 \text{ m}$$

$$45 \text{ varas a metros} = 45 \times 0.848 = 38.16 \text{ m}$$

Ahora, multiplicando, hallaremos el área en metros cuadrados, que los reducimos a áreas:

$$284.9 \text{ m} \times 38.16 \text{ m} = 10,871.784 \text{ m}^2 = 108.72 \text{ áreas}$$

$$\text{El terreno importará } 108.72 \text{ áreas} \times \$50 = \text{\$5,436} \quad \text{R.}$$

Una extensión rectangular de 6.5 caballerías mide de largo 14 cordeles 8 varas. ¿Cuántos dam tiene de ancho?

588

Tenemos que dividir la superficie entre el largo, pero previamente reducimos las caballerías a m^2 y los cordeles y varas a metros.

$$6.5 \text{ cab. a m}^2 = 6.5 \times 134,202 = 872,313 \text{ m}^2$$

$$14 \text{ cord. a varas} = 14 \times 24 = 336 \text{ varas}$$

$$336 \text{ v} + 8 \text{ v} = 344 \text{ varas}$$

$$344 \text{ varas a metros} = 344 \times 0.848 = 291.71 \text{ m}$$

Ahora hallamos el ancho dividiendo:

$$872,313 \text{ m}^2 \div 291.71 \text{ m} = 2,990.34 \text{ m} = \text{299.034 dam} \quad \text{R.}$$

De una extensión de 230 cordeles cuadrados se venden 3 ha. ¿Cuántas varas cuadradas cubanas quedan?

589

Reducimos los 230 cord.² a m^2 y las 3 hectáreas a m^2 :

$$230 \text{ cord.}^2 = 230 \times 414.2 = 95,266 \text{ m}^2$$

$$3 \text{ ha} = 3 \times 10,000 = 30,000 \text{ m}^2$$

$$\text{Quedarán: } 95,266 \text{ m}^2 - 30,000 \text{ m}^2 = 65,266 \text{ m}^2$$

Ahora reducimos estos 65,266 m^2 a varas cuadradas cubanas dividiendo entre el equivalente métrico de la vara cuadrada, que es 0.719 m^2 :

$$65,266 \text{ m}^2 \div 0.719 = 90,773.29 \text{ v}^2$$

$$\text{Quedan } \text{90,773.29 v}^2 \quad \text{R.}$$

1. ¿Cuántos metros recorrerá un atleta en una carrera de 500 varas cubanas? **R. 424 m**
2. ¿En cuánto tiempo se recorrerá una distancia de 120 cord. a razón de 6 m por segundo?

$$\text{R. } 6 \text{ min } 47\frac{1}{25} \text{ s}$$

⁽¹⁾ Las varas de que se trata en estos ejercicios son cubanas.

272⁽¹⁾**Ejercicio**

3. En una carrera un corredor hace 10 metros por segundo y otro 11 varas por segundo. ¿Cuál llegará primero? **R. El primero**
4. ¿Cuántas varas anda un corredor en una carrera de 3 km? **R. 3,537.736 v**
5. La distancia que separa dos pueblos es de 27 km, 5 hm y 60 m. ¿Cuántas leguas hay de uno a otro? **R. 6.5 leguas**
6. Un terreno rectangular de 45 varas por 2 cordeles se rodea con una cerca que vale \$0.60 el metro. ¿Cuánto importará la cerca? **R. \$94.64**
7. Una mesa de 2 varas de largo por vara y media de ancho, ¿cuántos metros cuadrados tiene? **R. 2.157 m²**
8. Hallar en metros cuadrados la superficie de una sala rectangular de 15 varas por 4.5 varas. **R. 48.5325 m²**
9. ¿Cuántos cm² tendrá una mesa de 6.5 varas por 2 varas y cuarto? **R. 105,153.75 cm²**
10. Para enlosar un patio rectangular de 30 varas por 18 varas, ¿cuántas losas de 40 cm² cada una harán falta? **R. 97,065 losas**
11. Juan tiene un solar de 3 cordeles de fondo y 56.75 varas de frente. ¿Cuánto le importará la venta del terreno a \$3.50 el m²? **R. \$10,282.42**
12. Hallar en hectáreas la superficie de una extensión de 18 cordeles por 20 cordeles. **R. 14.9112 ha**
13. Un patio de 6 cord. por 3.25 cord. se quiere pavimentar con losas de 20 por 15 cm. ¿Cuántas losas harán falta? **R. 269,230 losas**
14. Mario pone en venta un terreno que mide 82.16 varas de frente y 12 cordeles de fondo. Un comprador le dice que no le conviene porque el terreno que él necesita debe tener 4 hectáreas. ¿Cuántos m² es menor el terreno de Mario que el que el comprador necesita? **R. 22,986.96 m²**
15. Se vende una extensión de 54 cordeles por 1,200 varas a razón de \$20,000 la hectárea. ¿Cuánto importa la venta? **R. \$2,236,377.60**
16. Un terreno cuadrado de 22,500 varas², ¿cuántos metros y dam tiene de lado? **R. 127.2 m; 12.72 dam**
17. Hallar en varas cubanas el ancho de un terreno de 14 cord.² que mide de largo 72 varas. **R. 112 v**
18. ¿Cuánto cuesta cercar un terreno cuadrado de 14,400 v² que se rodea con una cerca que vale \$80 el metro? **R. \$32,563.20**
19. Una finca de 5 leguas por 12 cordeles, ¿cuántas áreas mide? **R. 51,775.488 a**
20. Una finca de $3\frac{1}{2}$ caballerías se vende a razón de \$0.60 el m². ¿Cuánto importa la venta? **R. \$281,824.20**
21. Una extensión cuadrada de 2 leguas y 5 cordeles de lado, ¿cuántas varas cuadradas tiene? **R. 102,414,400 v²**
22. Se venden 2 fincas, una de 12 caballerías y otra de 15 caballerías y la segunda importa \$201,303 más que la primera. Si el precio del m² es el mismo en las dos, ¿cuánto importa cada finca? **R. \$805,212; \$1,006,515**
23. De una extensión de 8.5 caballerías se venden $\frac{2}{3}$ y lo restante se cultiva. ¿Cuántas hectáreas hay cultivadas? **R. 38.0239 ha**
24. Felipe arrienda 6 áreas y 9 centiáreas de una finca suya que tiene 4 cord.² y lo restante lo cultiva. ¿Cuántas áreas cultiva? **R. 10.478 a**

25. Un patio de 35.95 dam de largo y 15 m de ancho se pavimenta con losas de 1.5 v^2 . ¿Cuántas losas se necesitarán? **R. 5,000 losas**
26. Enrique tiene un terreno de 3 hm por 6 dam 4 m. ¿Cuánto le producirá venderlo a \$4.50 la vara cuadrada? **R. \$120,166.8975**
27. De una finca de 600 km^2 y 14 hm^2 se venden 2 caballerías. ¿Cuántas hectáreas mide lo restante? **R. 59,987.1596 ha**
28. Una extensión cuadrada de 16 ha se rodea con una cerca que vale \$75 la vara. ¿Cuánto importa la obra? **R. \$141,509**
29. Una calle rectangular de 7 dam 2.619 m de largo y 2.5 dam de ancho se pavimenta con losas de una vara por 0.25 varas. ¿Cuánto importará la obra si cada losa vale \$30? **R. \$303,000**
30. ¿Cuánto cuestan 5 galones de gasolina a \$7 el litro? **R. \$132.3**
31. ¿Cuánto importan 5 litros de gasolina a \$28 el galón? **R. \$37**
32. ¿Cuántos dm^3 de volumen tiene un depósito en el que caben 50 botellas de agua? **R. 36.25 dm^3**
33. Si se compran 8 Qm de una mercancía por \$320, ¿a cómo sale la libra? **R. \$0.18**
34. Si se compran 3 arrobas de una mercancía por \$45, ¿a cómo sale el kg? **R. \$1.30**
35. ¿Qué distancia es mayor, 100 yardas o 90 m? **R. 100 yardas**
36. ¿Qué velocidad es mayor, 50 millas por hora u 80 km por hora? **R. 50 millas por hora**

MEDIDAS ANGLOAMERICANAS

Dadas las estrechas relaciones comerciales que existen entre los Estados Unidos de América y demás países latinoamericanos, el conocimiento de estas medidas ha de ser de gran utilidad para el alumno.

590

Sistema angloamericano .

MEDIDAS LINEALES		MEDIDAS SUPERFICIALES	
1 milla	= 8 furlong	1 milla ²	= 640 acres
1 furlong	= 40 poles	1 acre	= 160 rod ² = 4,046.8 m ²
1 pole	= 5.5 yardas	1 rod ²	= 30 $\frac{1}{4}$ yardas ²
1 yarda	= 3 pies = 0.914 m	1 yarda ²	= 9 pies ²
1 pie	= 12 pulgadas	1 pie ²	= 144 pulg ²
1 pulg	= 12 líneas		

MEDIDAS DE CAPACIDAD		
MEDIDAS CÚBICAS	PARA LÍQUIDOS	PARA ÁRIDOS
1 cord. = 128 pies ³	1 galón = 4 cuartos	1 bushel = 4 pecks
1 yarda ³ = 27 pies ³	1 cuarto = 2 pintas	1 peck = 8 cuartos
1 pie ³ = 1,728 pulg ³	1 pinta = 4 gills	1 cuarto = 2 pintas

MEDIDAS DE PESO	
PESOS AVOIRDUPOIS PARA TODA CLASE DE ARTÍCULOS MENOS ORO Y PLATA	PESOS TROY PARA ORO, PLATA Y PIEDRAS PRECIOSAS
1 ton = 20 qq (hundred-weight)	1 libra Troy = 12 onzas = 373.24 g
1 qq = 100 libras	1 onza Troy = 20 pennyweights
1 libra = 16 onzas = 453.6 g	1 pennyweight = 24 granos
1 onza = 16 dracmas	
PESAS PARA MEDICINA Y FARMACIA	
1 libra = 12 onzas = 373.24 g	
1 onza = 8 dracmas	
1 dracma = 3 escrúpulos	
1 escrúpulo = 20 granos	
Para pesar carbón en las minas y artículos pesados se usa la <i>tonelada larga</i> de 2,240 libras inglesas que equivale a 1,016 kg. Cuando se usa la <i>tonelada larga</i> el quintal tiene 112 libras.	

OTRAS MEDIDAS

MEDIDAS ANGULARES	
DIVISIÓN CENTESIMAL DE LA CIRCUNFERENCIA	DIVISIÓN SEXAGESIMAL DE LA CIRCUNFERENCIA
1 circunf. = 400° C	1 circunf. = 3,600 S
1° C = 100' C	1° S = 60' S
1' C = 100" C	1' S = 60" S
MEDIDAS DE TIEMPO	MEDIDAS GEOGRÁFICAS
1 siglo = 10 décadas	1 legua marina o geográfica = 5,555 m
1 década = 2 lustros	1 legua terrestre = 4,444 m
1 lustro = 5 años	1 milla marina = 1,852 m
1 año = 12 meses	1 nudo = 1 milla marina por hora
1 mes = 30 días	
1 día = 24 horas	
1 hora = 60 minutos	
1 min = 60 segundos = $\frac{1}{86,400}$ del día	
La <i>legua marina</i> es de 20 al grado lo que significa que en la longitud de un grado que es 111,111 m hay 20 leguas marinas, luego la legua marina vale $111,111 \text{ m} \div 20 = 5,555.55 \text{ m}$	
La <i>legua terrestre</i> es de 25 al grado, luego una legua terrestre tiene $111,111 \text{ m} \div 25 = 4,444.44 \text{ m}$	
La <i>milla marina</i> es un $\frac{1}{3}$ de la legua marina y es la longitud de un arco de un minuto; vale $5,555.55 \text{ m} \div 3 = 1,851.85 \text{ m} = 1,852 \text{ m}$ prácticamente.	
El <i>nudo</i> es una unidad de velocidad que se emplea para medir la velocidad de los buques. Un <i>nudo</i> equivale a una <i>milla marina por hora</i> ; decir que un buque navega, por ejemplo, a 30 nudos quiere decir que navega a 30 millas marinas por hora.	

TABLA DE CONVERSIÓN DE MEDIDAS DEL SISTEMA ANGLOAMERICANO AL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

MEDIDAS LINEALES

1 milla	=	1,609.35	m	1 m	=	0.0006214	millas
1 furlong	=	201.1644	m	1 m	=	0.004971	furlong
1 pole	=	5.029	m	1 m	=	0.19885	pole
1 yarda	=	0.9144	m	1 m	=	1.0936	yardas
1 pie	=	0.3048	m	1 m	=	3.2808	pies
1 pulgada	=	0.0254	m	1 m	=	39.37	pulgadas

MEDIDAS SUPERFICIALES

1 milla ²	=	2,589,900	m ²	1 m ²	=	0.0000003861	millas ²
1 acre	=	4,046.8	m ²	1 m ²	=	0.0002471	acre
1 rod ²	=	25.293	m ²	1 m ²	=	0.03954	rod ²
1 yarda ²	=	0.8361	m ²	1 m ²	=	1.196	yarda ²
1 pie ²	=	0.0929	m ²	1 m ²	=	10.7638	pies ²
1 pulgada ²	=	0.000645	m ²	1 m ²	=	1,550	pulgadas ²

MEDIDAS CÚBICAS

1 cord.	=	3.624	m ³	1 m ³	=	0.276	cord.
1 yarda ³	=	0.7645	m ³	1 m ³	=	1.308	yarda ³
1 pie ³	=	0.028317	m ³	1 m ³	=	35.3145	pies ³
1 pulgada ³	=	0.00001639	m ³	1 m ³	=	61,012.81	pulgadas ³

MEDIDAS DE CAPACIDAD

PARA LÍQUIDOS

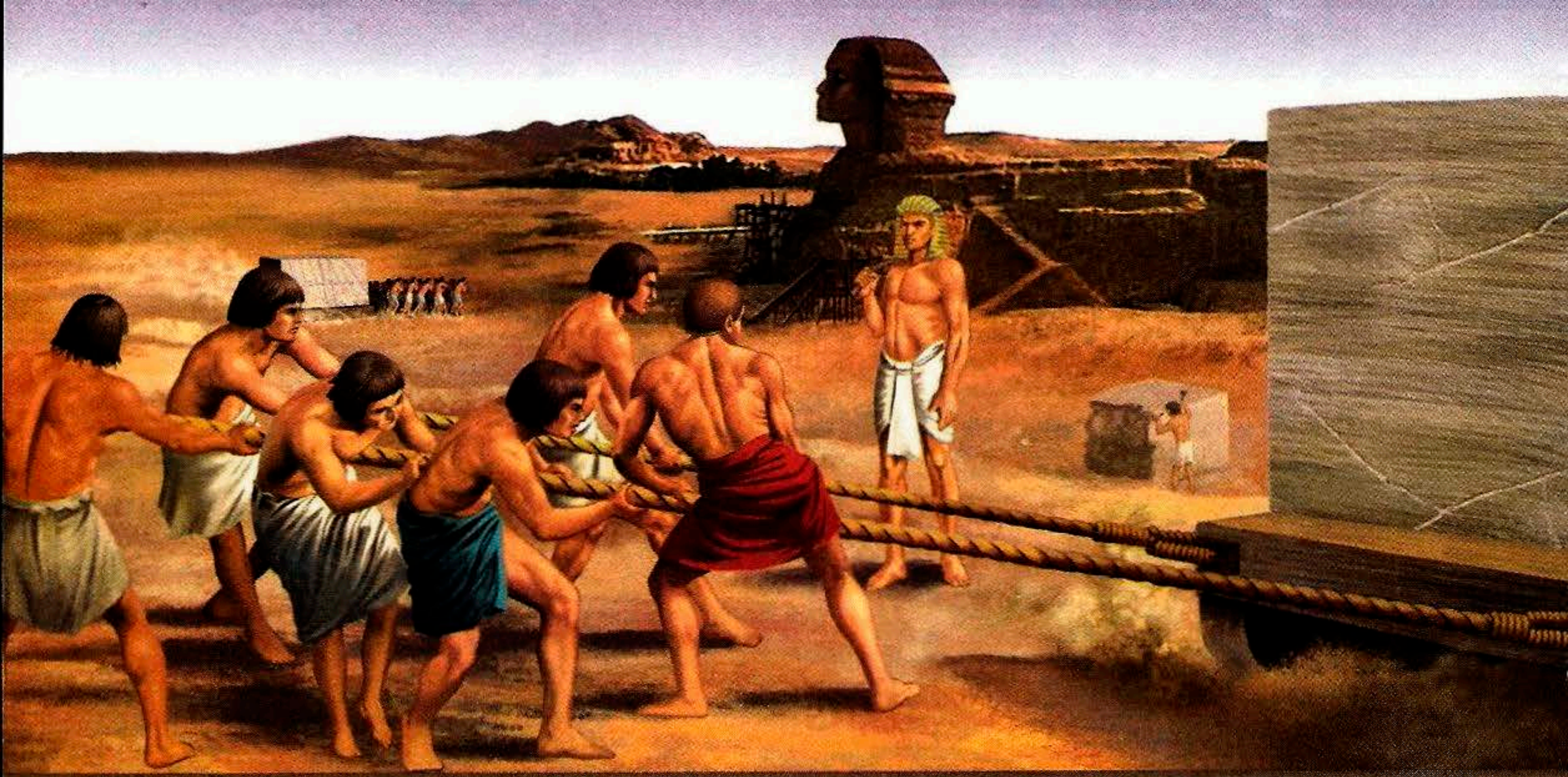
1 galón U. S.	=	3.7854	litros	1 litro	=	0.26418	galón U. S.
1 cuarto U. S.	=	0.94636	litro	1 litro	=	1.05671	cuartos U. S.
1 pinta U. S.	=	0.47312	litro	1 litro	=	2.11345	pintas U. S.
1 gill U. S.	=	0.11828	litro	1 litro	=	8.4538	gills U. S.

PARA ÁRIDOS

1 bushel U. S.	=	35.237	litros	1 litro	=	0.02838	bushel U. S.
1 peck U. S.	=	8.80925	litros	1 litro	=	0.1135	peck U. S.
1 cuarto U. S.	=	1.1012	litros	1 litro	=	0.908	cuarto U. S.

MEDIDAS DE PESO

1 tonelada U. S.	=	907.18	kg	1 kg	=	0.00110232	tonelada U. S.
1 quintal U. S.	=	45.359	kg	1 kg	=	0.0220463	quintal U. S.
1 libra U. S.	=	0.45359	kg	1 kg	=	2.2046	libras U. S.
1 onza U. S.	=	0.028349	kg	1 kg	=	35.2736	onzas U. S.



La geometría como ciencia empírica surgió en Egipto. Como ciencia teórica es exclusiva de los griegos. **Euclides**, un griego, le dio la estructura teórica que ha tenido hasta el nacimiento de la geometría no euclidiana. En un documento descubierto en

1930, está el trabajo de un geómetra egipcio que en 1850 a. C., dio la fórmula $\frac{1}{3}h(a^2 - ab + b^2)$, para el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada.

Capítulo **XXXVIII**

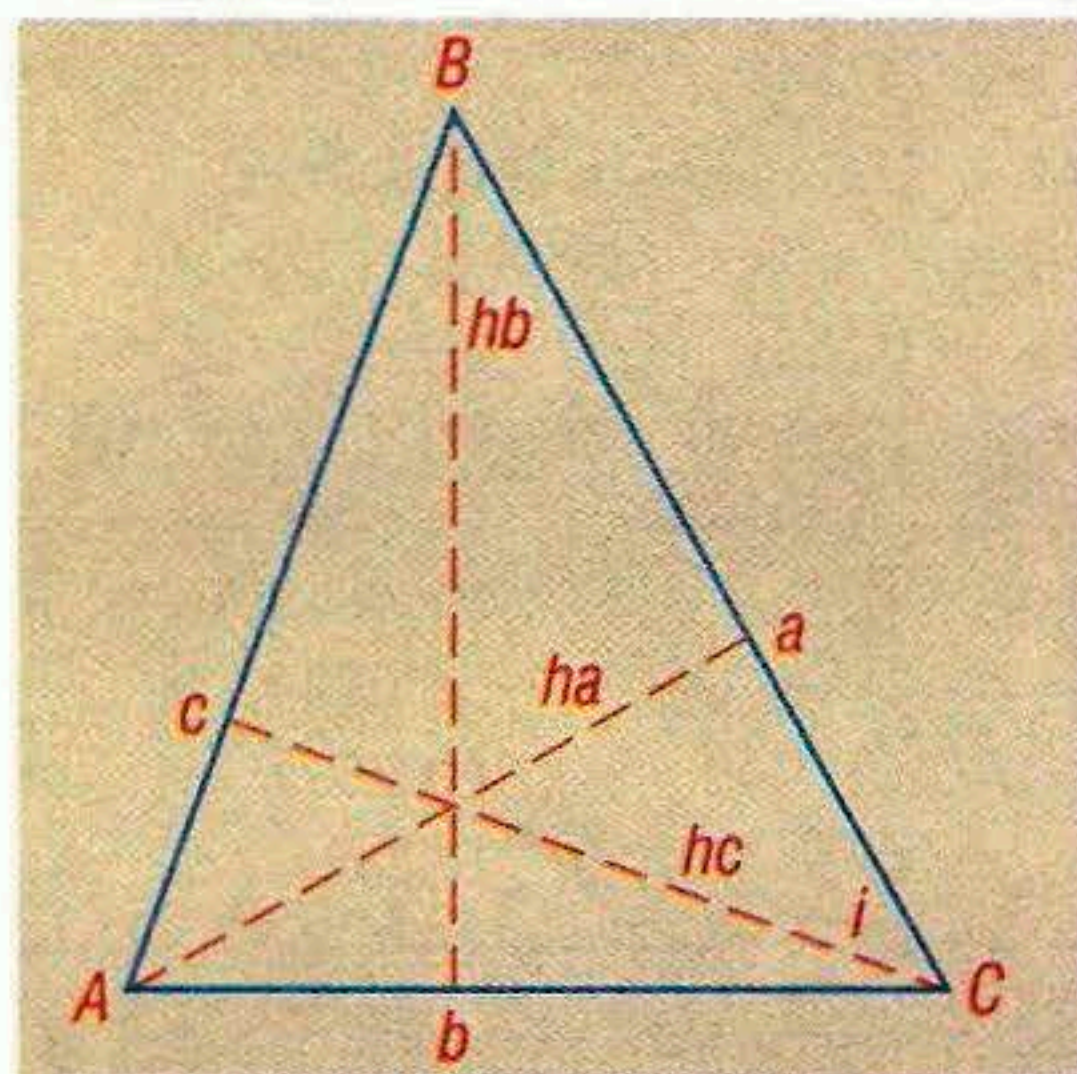
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

I. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

591

TRIÁNGULO es la porción de plano limitada por tres segmentos de recta.

—| Figura 43 |—



Lados del triángulo son los segmentos que lo limitan; en la figura 43, AB , BC y CA son los lados. Los lados del triángulo suelen representarse por la misma letra minúscula que el vértice opuesto.

Como **base** de un triángulo puede tomarse uno cualquiera de sus lados, pero cuando el triángulo descansa sobre uno de ellos se suele tomar éste como base.

Altura correspondiente a un lado de un triángulo es la perpendicular a dicho lado bajada desde el vértice opuesto. En la figura 43 están trazadas las tres alturas del triángulo, que se expresan h_a , h_b , h_c , según el lado al que corresponden.

Área del triángulo. El área o superficie de un triángulo es la mitad del producto del lado elegido como base por la altura correspondiente a él.

Siendo A = área del triángulo, b = base y h = altura, tendremos:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Hallar el área de un triángulo siendo uno de sus lados 20 cm y la altura correspondiente a él 14 cm.

Aquí $b = 20$ cm, $h = 14$ cm, luego:

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{20 \text{ cm} \times 14 \text{ cm}}{2} = 140 \text{ cm}^2 \quad \text{R.}$$

Ejemplo

PARALELOGRAMOS son los cuadriláteros que tienen sus lados opuestos iguales y paralelos.

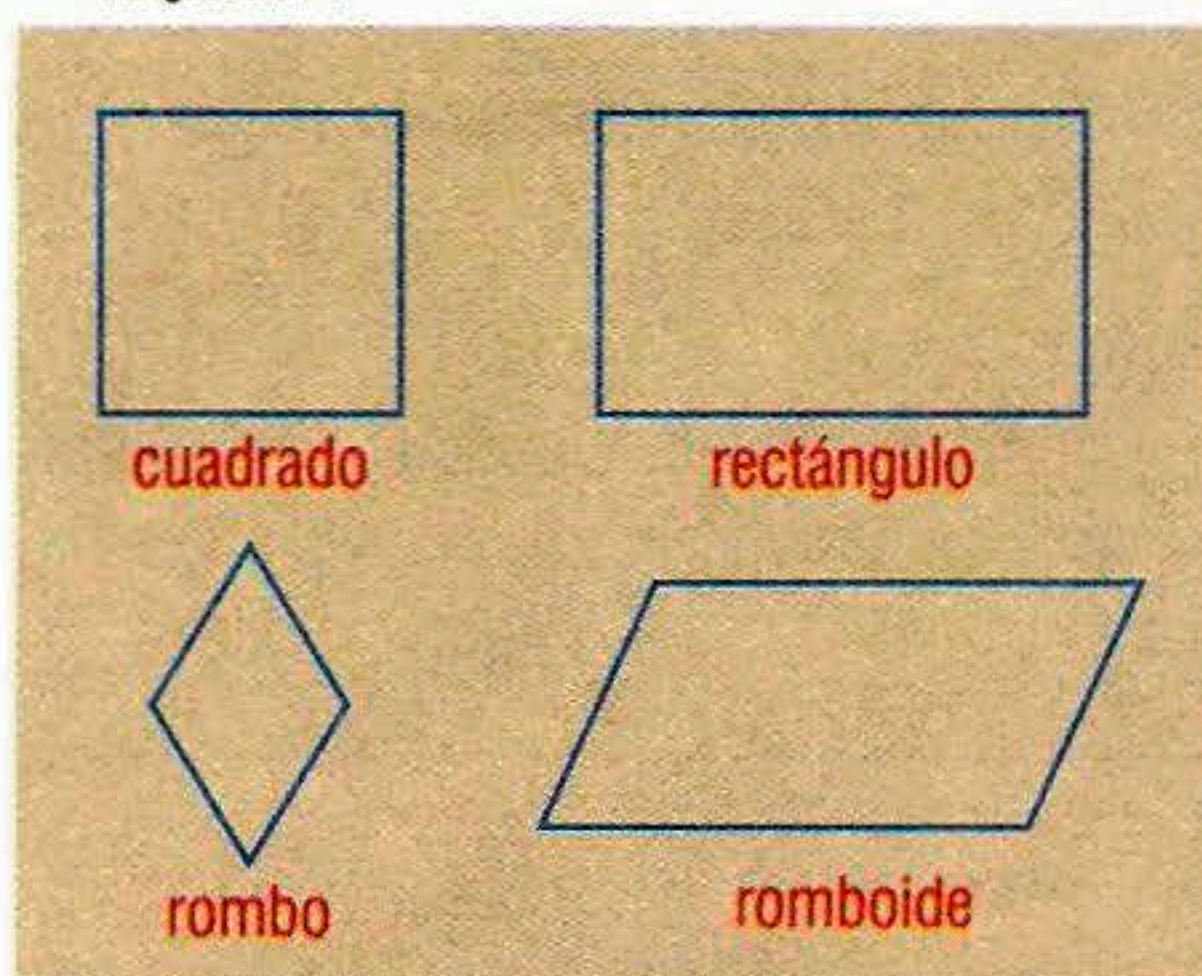
Los paralelogramos se dividen (Fig. 44) en **cuadrado** cuando tienen sus cuatro lados iguales y sus ángulos rectos; **rombo** cuando tienen sus cuatro lados iguales, pero sus ángulos no son rectos; **rectángulo** cuando tienen sus lados opuestos iguales dos a dos y sus ángulos rectos, y **romboide** cuando tienen sus lados opuestos iguales dos a dos, pero sus ángulos no son rectos.

Área del paralelogramo. El área de un paralelogramo cualquiera es igual al **producto de su base por su altura**.

Siendo A = área del paralelogramo, b = base y h = altura, tendremos:

$$A = b \times h$$

—| Figura 44 |—



592

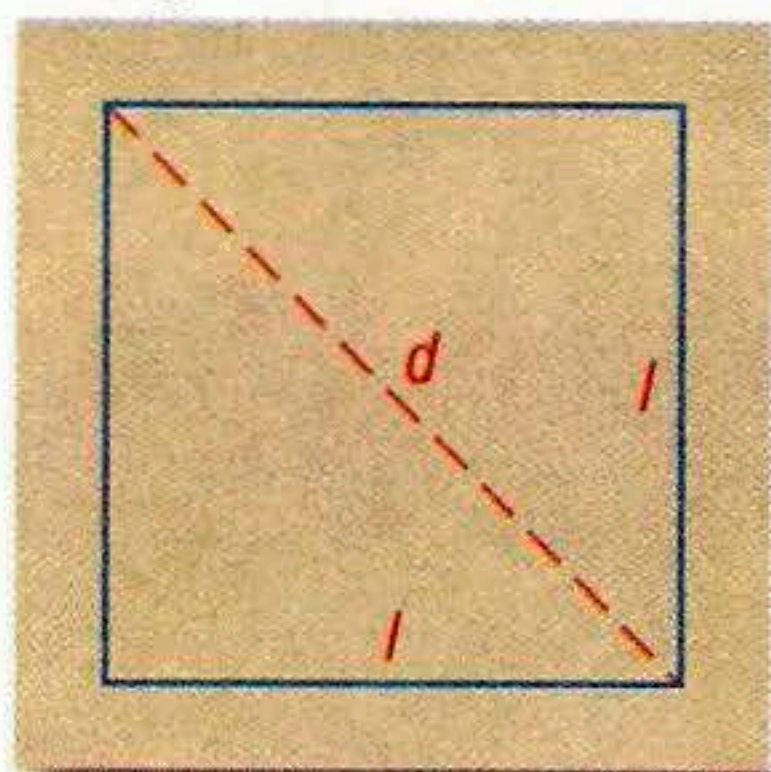
Hallar el área de un rectángulo sabiendo que dos de sus lados desiguales miden 18 cm y 15 cm, respectivamente. Como los lados desiguales de un rectángulo son perpendiculares entre sí, podemos considerar a uno de ellos como la base y al otro como altura.

Entonces, siendo $b = 18$ cm, $h = 15$ cm, tendremos:

$$A = b \times h = 18 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} = 270 \text{ cm}^2 \quad \text{R.}$$

Ejemplo

—| Figura 45 |—



Caso particular del cuadrado. Como los cuatro lados de un cuadrado (Fig. 45) son iguales y perpendiculares entre sí, tenemos que tomando un lado cualquiera como base, la altura es otro lado igual a éste; luego, siendo A = área del cuadrado, y l = lado del cuadrado, tendremos:

$$A = l \times l = l^2$$

lo que nos dice que el área de un cuadrado en función del lado es igual al **cuadrado de su lado**.

Área del cuadrado en función de la diagonal. El área de un cuadrado (Fig. 45) también es igual a **la mitad del cuadrado de su diagonal**. Siendo A = área del cuadrado, d = diagonal del cuadrado, tendremos:

$$A = \frac{d^2}{2}$$

Ejemplos

- 1) Hallar en centiáreas el área de un cuadrado cuyo lado mide 10 varas cubanas.

Aquí $l = 10$ v, luego:

$$A = l^2 = 10^2 = 100 \text{ v}^2$$

y como me piden el área en ca reduzco las 100 varas cuadradas cubanas a ca multiplicando por 0.719 y tendremos:

$$A = 100 \times 0.719 = 71.9 \text{ ca} \quad \text{R.}$$

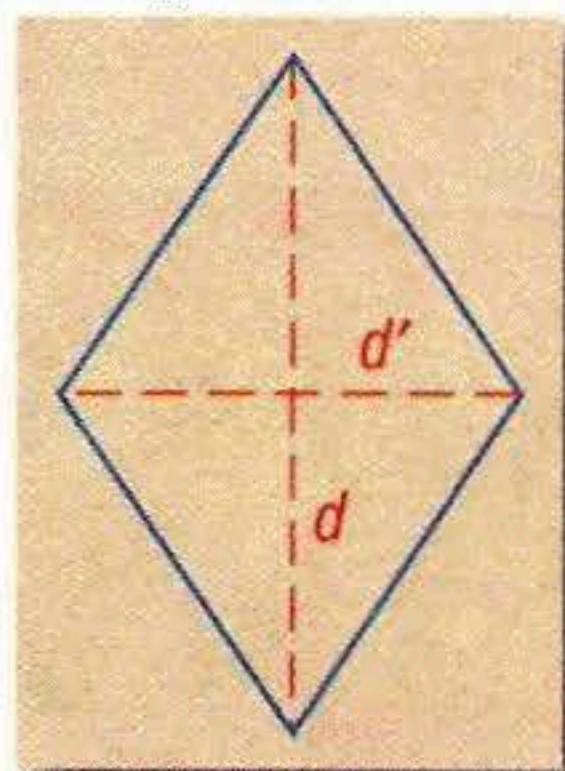
- 2) Hallar en varas cuadradas cubanas el área de un cuadrado cuya diagonal mide 16 m.

$$A = \frac{d^2}{2} = \frac{16^2}{2} = \frac{256}{2} = 128 \text{ m}^2$$

y como me piden el área en varas cuadradas cubanas reduzco los 128 m cuadrados a varas cuadradas cubanas dividiendo entre 0.719 y tendremos:

$$A = 128 \div 0.719 = 178.02 \text{ v}^2 \text{ cub.} \quad \text{R.}$$

Figura 46



•**Caso particular del rombo.** El área de un rombo (Fig. 46), además de ser igual al producto de su base por su altura, es igual al **semiproducto de sus diagonales**.

Siendo A = área del rombo, d y d' sus diagonales, tendremos:

$$A = \frac{d \times d'}{2}$$

Ejemplo

Hallar el área de un rombo sabiendo que una de sus diagonales mide 8 yardas y la otra 2 cordeles.

Aquí $d = 8$ yardas, $d' = 2$ cordeles.

Reduciendo las 8 yardas a metros: $8 \times 0.914 = 7.312 \text{ m}$

Reduciendo los 2 cordeles a metros: $2 \times 20.352 = 40.704 \text{ m}$

Entonces:

$$A = \frac{d \times d'}{2} = \frac{7.312 \times 40.704}{2} = 148.813 \text{ m}^2 \quad \text{R.}$$

TRAPECIO es el cuadrilátero que tiene dos de sus lados paralelos y los otros dos no.

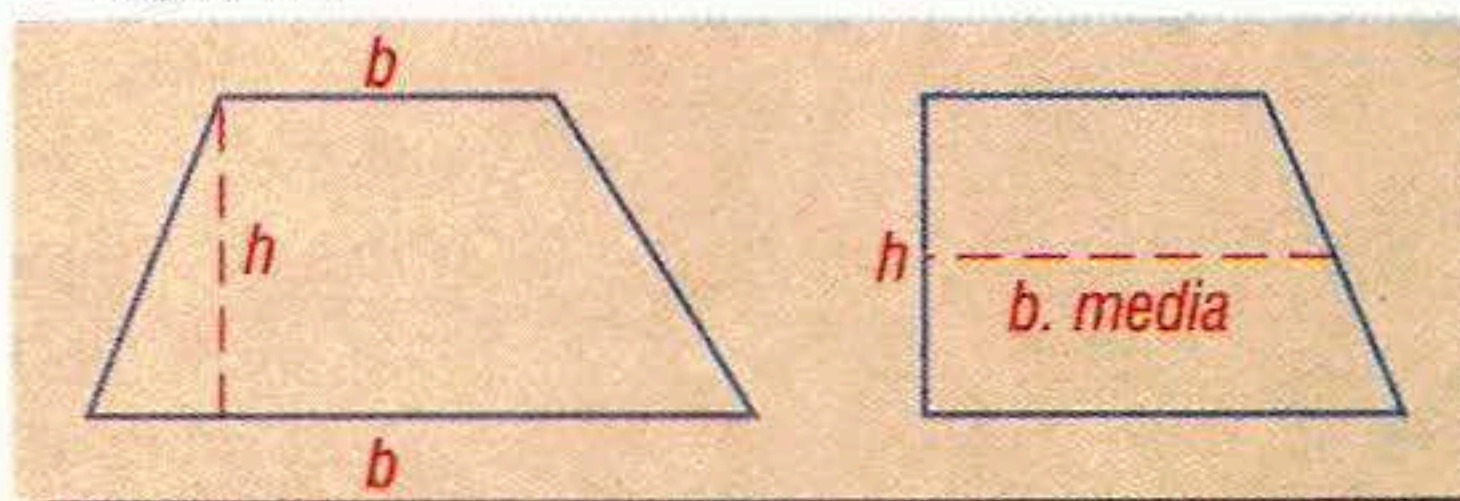
Bases de un trapezio son sus lados paralelos, b y b' en la figura 47.

Altura de un trapezio es la perpendicular bajada de una base a la otra, h en la figura 47.

Base media o paralela media de un trapezio es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos (Fig. 47).

Área del trapezio. El área de un trapezio se puede expresar de tres modos:

Figura 47



- a) El área de un trapezio es igual a **la mitad de su altura por la suma de las bases.**

Siendo A = área del trapezio, h = altura, b y b' las bases, tendremos:

$$A = \frac{h}{2}(b + b')$$

- b) En la fórmula anterior, el segundo miembro no se altera si el divisor 2 se lo quitamos al factor h y se lo ponemos al factor $(b + b')$ y quedará:

$$A = h \left(\frac{b + b'}{2} \right)$$

lo que nos dice que el área de un trapezio es igual a **la altura multiplicada por la semisuma de las bases.**

- c) Como la semisuma de las bases de un trapezio es igual a la base media (según estudiará el alumno más adelante), tendremos también que:

$$A = h \times \text{base media}$$

lo que nos dice que el área de un trapezio también es igual a **la altura multiplicada por la base media.**

- 1) Hallar el área de un trapezio cuyas bases miden 10 y 12 cm y su altura 6 cm.

Aquí $b = 10$ cm, $b' = 12$ cm, $h = 6$ cm, luego:

$$A = \frac{h}{2}(b + b') = \frac{6}{2}(10 + 12) = 3 \times 22 = 66 \text{ cm}^2 \quad \text{R.}$$

- 2) Hallar en áreas la superficie de un trapezio sabiendo que la base media mide 8 varas españolas y la altura 5 varas cubanas.

Aquí $h = 5$ v cub., $\text{base media} = 8$ v esp.

Reduciendo las 5 v cub. a metros: $5 \times 0.848 = 4.240$ m

Reduciendo las 8 v esp. a metros: $8 \times 0.836 = 6.688$ m

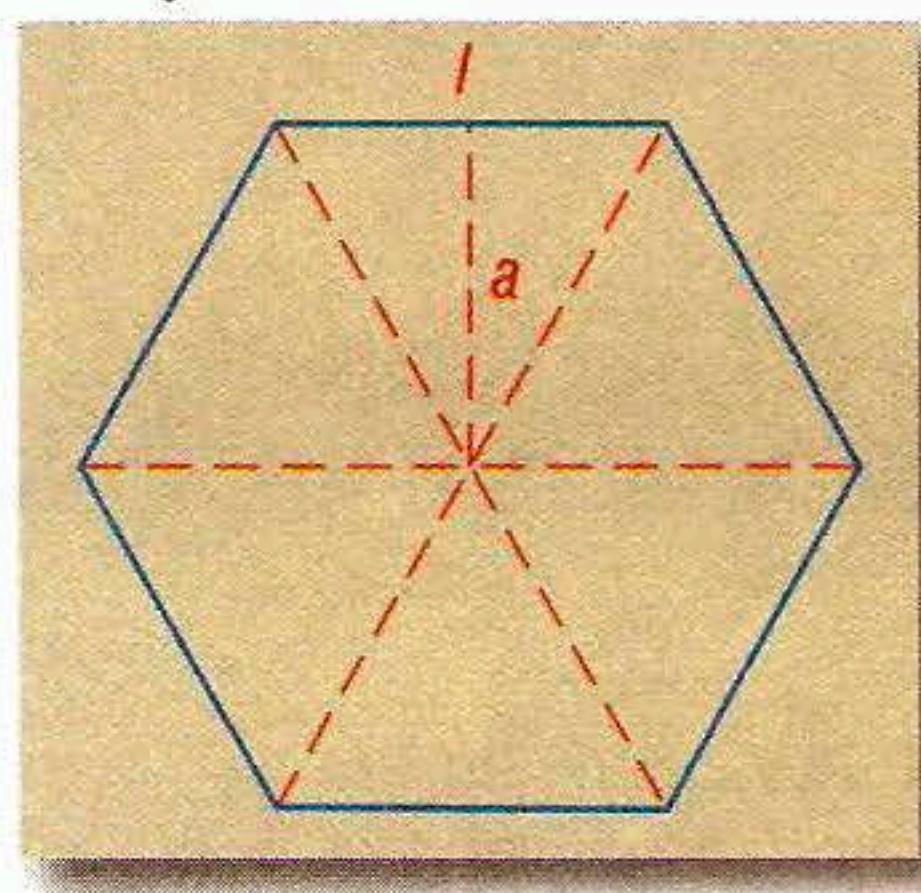
Entonces, aplicando la fórmula:

$$A = h \times \text{base media} = 4.240 \times 6.688 = 28.357 \text{ m}^2 \quad \text{R.}$$

594

POLÍGONO es la porción de plano limitada por segmentos de recta. Por el número de sus lados los polígonos se llaman: **pentágono** el de 5 lados; **hexágono** el de 6 lados; **heptágono** el de 7 lados; **octágono** el de 8 lados, etcétera.

Figura 48



Un polígono es **regular** cuando todos sus lados son iguales y todos sus ángulos también iguales, e **irregular** si no cumple estas condiciones.

Perímetro de un polígono es la suma de sus lados. Cuando el polígono es regular, como todos sus lados son iguales, el perímetro es igual a un lado multiplicado por el número de lados, ln .

Centro de un polígono regular es el punto interior del mismo en el cual se cortan las diagonales. El centro equidista de todos los vértices y todos los lados.

Apotema de un polígono regular es la perpendicular bajada desde el centro a uno cualquiera de los lados (a en la Fig. 48), o sea la altura de uno de los triángulos iguales en que se puede descomponer el polígono, considerando el lado como base.

Área del polígono regular. El área de un polígono regular es igual a **la mitad del producto del apotema por el perímetro**.

Siendo A = área del polígono, a = apotema, l = lado, n = número de lados y, por tanto, ln = perímetro, tendremos:

$$A = \frac{a \times ln}{2}$$

Ejemplo

Hallar el área de un octágono regular cuyo lado mide 6 cm y el apotema 4 cm. Aquí $a = 4$ cm, $l = 6$ cm, $n = 8$, luego:

$$A = \frac{a \times ln}{2} = \frac{4 \times 6 \times 8}{2} = 96 \text{ cm}^2 \quad \text{R.}$$

Área de un polígono irregular. Para hallar el área de un polígono irregular se divide en triángulos; se halla el área de cada triángulo y la suma de las áreas de estos triángulos será el área del polígono.

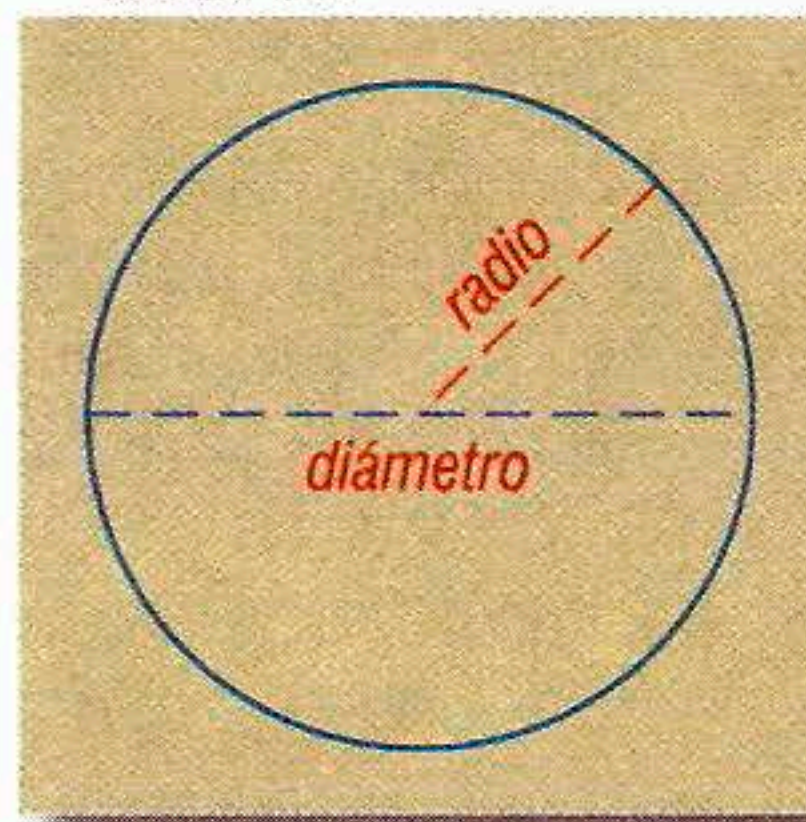
595

CIRCUNFERENCIA es una línea curva (Fig. 49) plana y cerrada en la cual todos los puntos equidistan de un punto interior llamado **centro**.

Círculo es la porción de plano limitada por la circunferencia.

Radio es el segmento de recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia, y **diámetro** es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

Figura 49



Longitud de la circunferencia. La longitud de la circunferencia es igual a π (cantidad constante que vale 3.1416) **multiplicada por el diámetro.**

Siendo C = longitud de la circunferencia, r = radio y por tanto $2r$ = diámetro, tendremos:

$$C = \pi \times 2r = 2\pi r$$

NOTA

La constante $\pi = 3.1416$ es el cociente que se obtiene al dividir la longitud de cualquier circunferencia entre la longitud de su diámetro.

Área del círculo. El área del círculo es igual a π **multiplicada por el cuadrado del radio.**

Siendo A = área del círculo, r = radio, tendremos:

$$A = \pi r^2$$

- 1)** ¿Cuántos metros de largo tendrá la cerca de un gallinero circular de 5 metros de radio? Hay que hallar la longitud de la circunferencia cuyo radio es 5 m. Tendremos:

$$C = 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 5 = 31.416 \text{ m}$$

La cerca tendrá **31.416 metros de longitud.** **R.**

- 2)** ¿Cuál será la superficie ocupada por el gallinero del ejemplo anterior? Hay que hallar la superficie del círculo cuyo radio es 5 m. Tendremos:

$$A = \pi r^2 = 3.1416 \times 5^2 = 78.54 \text{ m}^2$$

La superficie que ocupa el gallinero es **78.54 m².** **R.**

Ejemplos

CUADRO DE LAS ÁREAS ESTUDIADAS

FIGURA	ÁREA	FÓRMULA
triángulo	La mitad del producto de la base \times la altura	$\frac{b \times h}{2}$
paralelogramos	El producto de la base \times la altura	$b \times h$
cuadrado	El cuadrado del lado	l^2
	La mitad del cuadrado de la diagonal	$\frac{d^2}{2}$
rombo	El semiproducto de las diagonales	$\frac{d \times d'}{2}$
trapecio	La mitad de la altura \times la suma de las bases	$\frac{h}{2}(b + b')$
	La altura \times la semisuma de las bases	$h \left(\frac{b + b'}{2} \right)$
	La altura \times la base media	$h \times \text{base media}$
polígono regular	La mitad del producto del apotema \times el perímetro	$\frac{a \times ln}{2}$
círculo	$\pi \times$ el cuadrado del radio	$\pi \times r^2$

273

Ejercicio

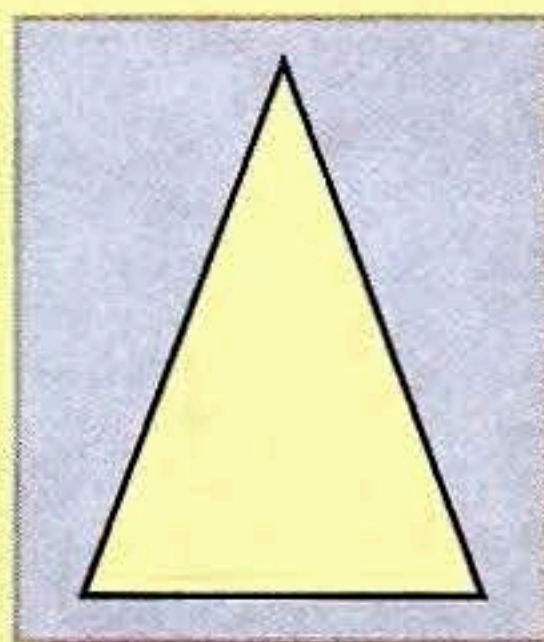
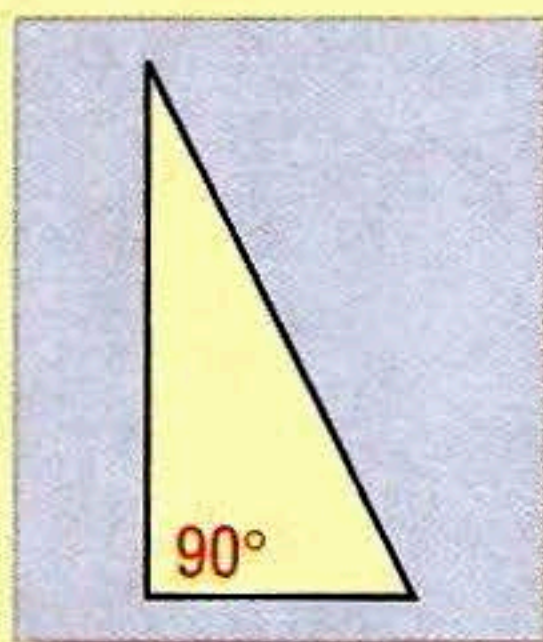
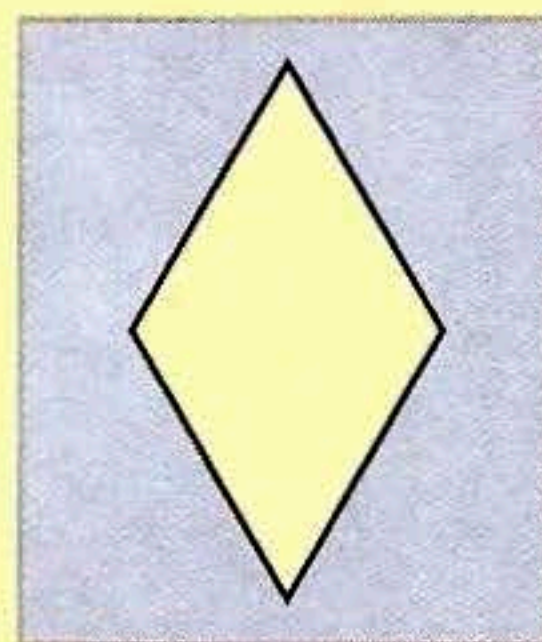
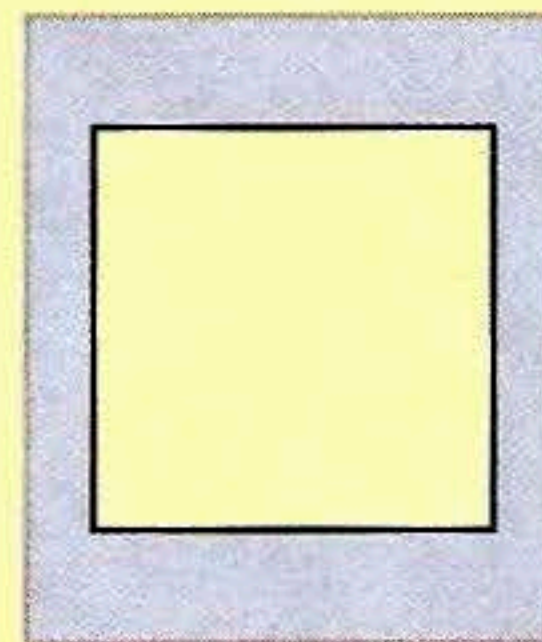
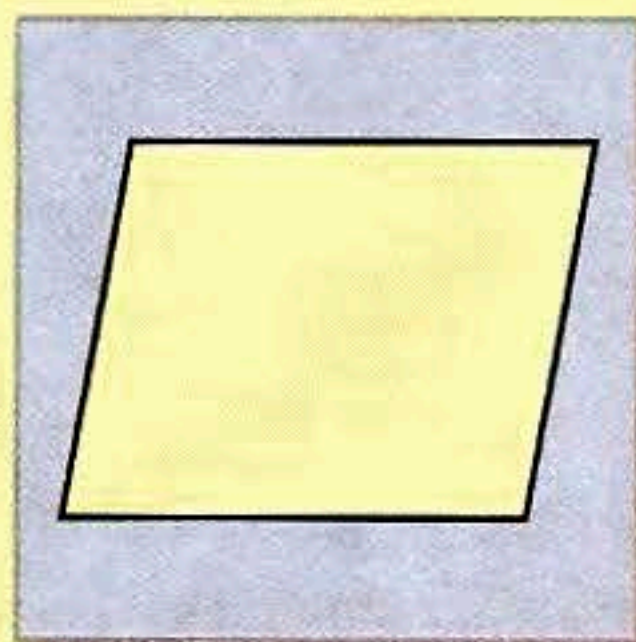
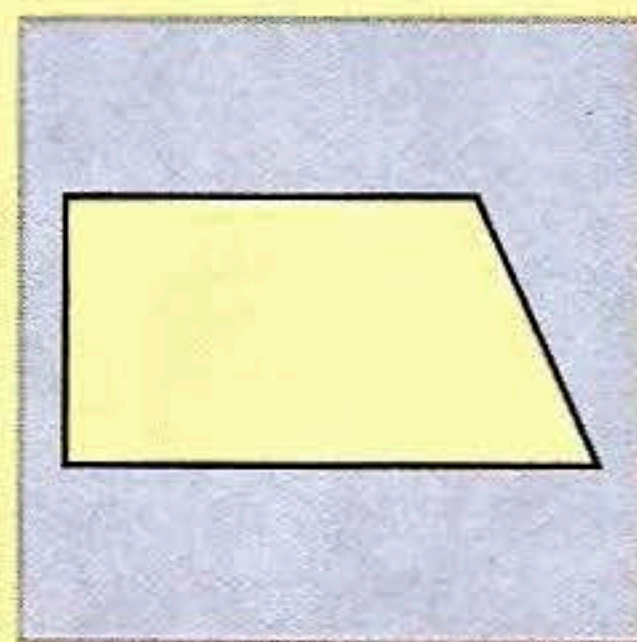
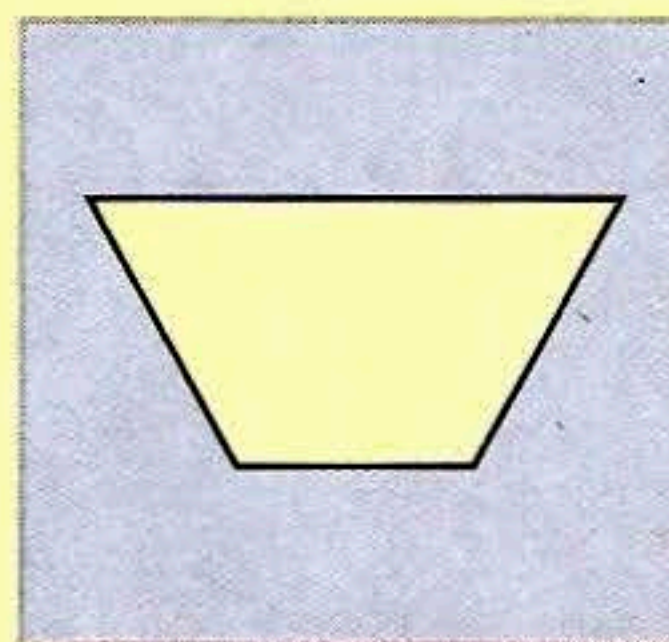
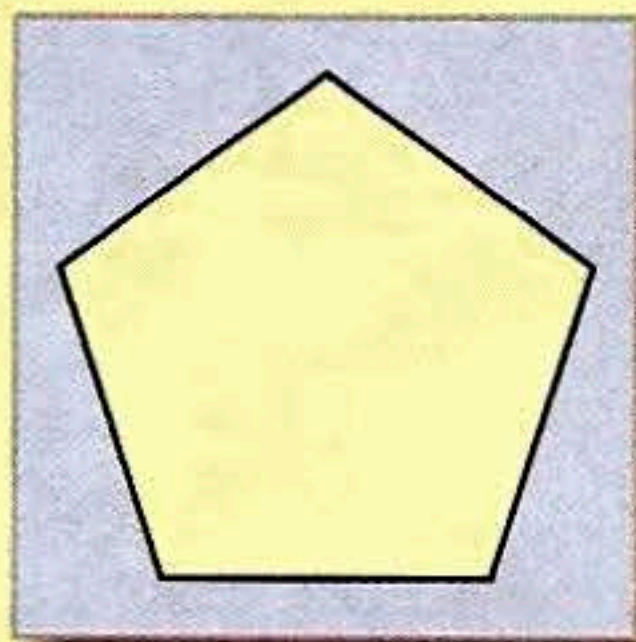
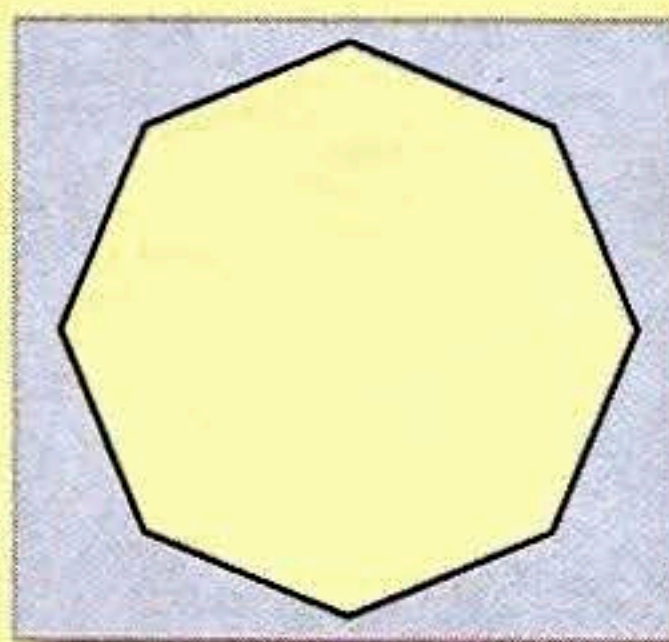
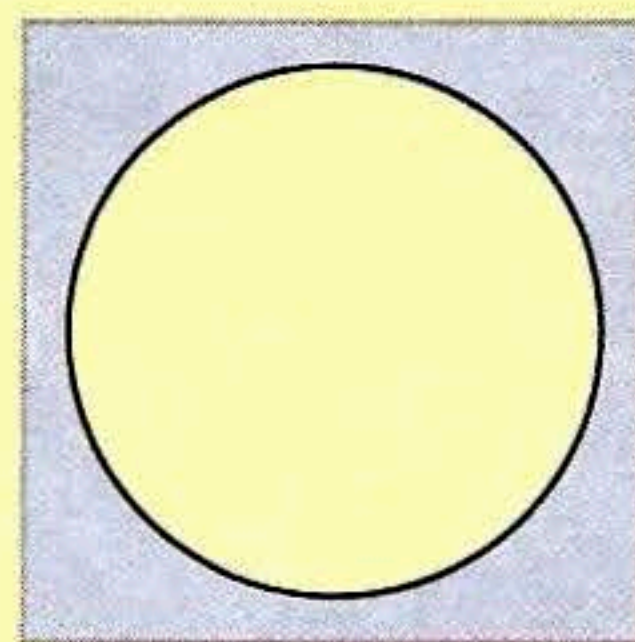
1. Hallar el área de un triángulo cuya base es de 10 cm y su altura de 42 cm. **R. 210 cm²**
2. La base de un triángulo es 8 cm 6 mm y la altura 0.84 dm. Hallar el área en metros cuadrados. **R. 0.003612 m²**
3. ¿Cuánto importará un pedazo triangular de tierra de 9 varas cubanas por 6 varas cubanas a \$0.80 la ca? **R. \$15.53**
4. ¿Cuánto importará un solar triangular de 9 dam de base por 30 m 6 dm de altura a \$1.25 la vara cuadrada cubana? **R. \$2,393.95**
5. Hallar en áreas la superficie de un triángulo cuya base es 3 cordeles y su altura 50 yardas. **R. 13.95 a**
6. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 6 m, respectivamente. Hallar su área en varas cuadradas cubanas. **R. 20.86 v²**
7. La base de un triángulo es $\frac{1}{2}$ hm y su altura $\frac{3}{8}$ de km. Expresar la superficie en denominado métrico decimal. **R. 93 a 75 ca**
8. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 3 cord. y el otro 60 varas cubanas. Expresar su superficie en denominado métrico decimal. **R. 15 a, 53 ca, 4 dm²**
9. La base de un rectángulo es 5 m y la altura 2 m 5 cm. Expresar su área en denominado. **R. 10 m², 25 dm²**
10. Expresar en denominado el área de un romboide cuya altura es 1 vara cubana y la base 6 m 3 cm. **R. 5 m², 11 dm², 34 cm², 40 mm²**
11. Hallar la superficie de una losa cuadrada de 1 m 20 cm de lado. **R. 1.44 m²**
12. ¿Cuál es, en metros cuadrados, la superficie de un cuadrado cuya diagonal mide 8 varas cubanas? **R. 23.008 m²**
13. Expresar en denominado métrico decimal el área de un rombo cuya base es 8 m 5 mm y su altura 6 yardas. **R. 43 m², 89 dm², 94 cm², 20 mm²**
14. Las diagonales de un rombo miden 5 m, 4 dm y 300 cm, respectivamente. Expresar su área en denominado métrico. **R. 8 m², 10 dm²**
15. Expresar en denominado métrico decimal la superficie de la tapa de una caja de puros rectangular que mide $\frac{1}{2}$ vara española por $\frac{1}{4}$ de vara española. **R. 8 dm², 73 cm², 62 mm²**
16. Las bases de un trapecio son 12 y 15 m, y su altura 6 m. Hallar su área. **R. 81 m²**
17. La semisuma de las bases de un trapecio es 40 varas cubanas y su altura 6 m 8 dm. Hallar su área en ha. **R. 0.0230656 ha**
18. ¿Cuántas varas cuadradas cubanas mide la superficie de un trapecio cuya base media tiene 3 dam, 5 dm, 6 cm, y su altura 2 cordeles? **R. 1,729.87 v²**
19. Expresar en denominado métrico la superficie de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 3 dm y 800 mm, respectivamente, y el lado perpendicular a ellas 50 cm. **R. 27 dm², 50 cm²**
20. Hallar el área de un pentágono regular de 7.265 m de lado y 5 m de apotema. **R. 90.8125 m²**
21. Expresar en áreas la superficie de un hexágono regular de 3.46 m de lado y 3 m de apotema. **R. 0.3114 a**
22. Expresar en denominado métrico decimal el área de un dodecágono regular cuyo lado mide 3.75 varas cubanas y el apotema 7 varas cubanas. **R. 1 a, 13 ca, 24 dm², 25 cm²**

23. El corral es una medida superficial cubana circular cuyo radio es una legua cubana. ¿Cuántas caballerías hay en un corral? **R. 420.8 cab.**
24. ¿Cuánto importa una extensión de terreno circular cuyo radio es 80 varas cubanas a razón de \$32 el cordel cuadrado? **R. \$1,117**
25. ¿Cuál es la superficie de un cantero semicircular de 3 m de radio? **R. 14.1372 m²**
26. Un cantero circular de 4 m de diámetro tiene una cerca que se pagó a \$90 el m. ¿Cuánto importó dicha cerca? **R. \$1,131**
27. Se compró un terreno semicircular de 10 m de radio a \$200 la ca y además se le puso a todo él una cerca que se pagó a \$50 el m. ¿Cuánto se pagó en total por el terreno y su cerca? **R. \$33,987**

Hallar el área de las figuras que siguen. (Para ello, primero escríbase la fórmula del área de la figura de que se trate y con ella verá los datos que necesite. Luego, fíjese en cuáles datos no se dan en la figura y trácelos. Después, con una reglita graduada en mm mida todos los datos que hagan falta para aplicar la fórmula y aplique ésta sustituyendo las letras por los datos que ha medido.)

274

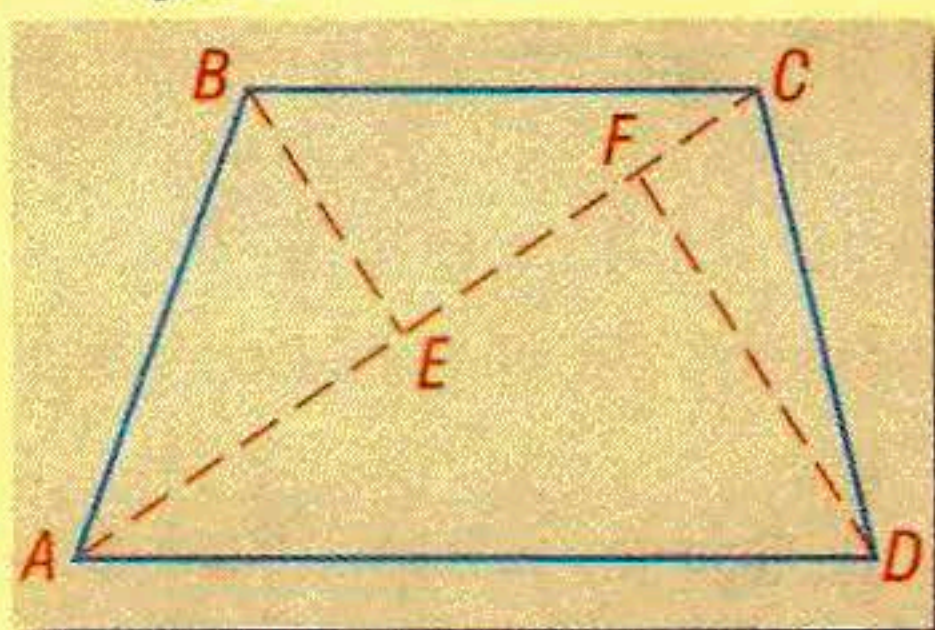
Ejercicio

1. R. 600 mm²2. R. 400 mm²3. R. 320 mm²4. R. 900 mm²5. R. 750 mm²6. R. 700 mm²7. R. 337.5 mm²8. R. 375 mm²9. R. 480 mm²10. R. 706.86 mm²

275

Ejercicio

Figura 50



1. Hallar el área del cuadrilátero $ABCD$ (Fig. 50) sabiendo que $AC = 40$ m, $BE = 15$ m y $DF = 20$ m. **R. 700 m^2**

2. Hallar el área del hexágono $ABCDEF$ (Fig. 51) siendo $AF = 30$ m, $DF = AC = 20$ m, $EH = BI = 10$ m. **R. 800 m^2**

Figura 51

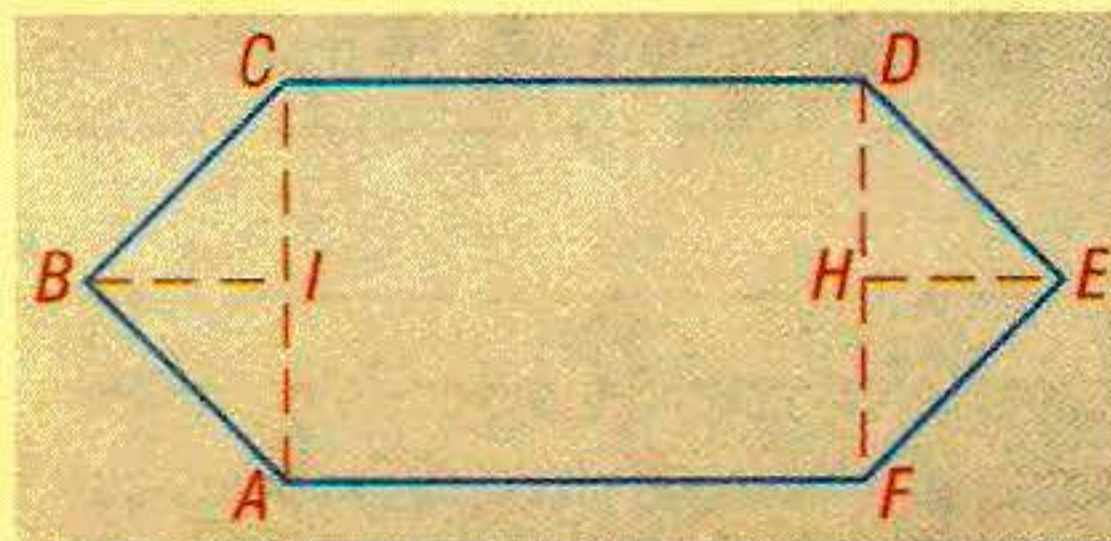
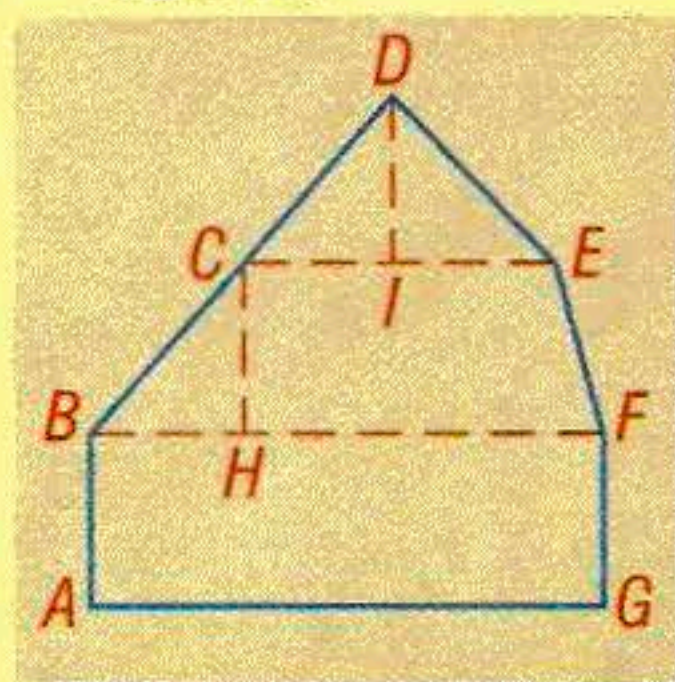


Figura 52



3. Hallar el área del polígono representado en la figura 52 sabiendo que $AG = BF = 30$ mm, $FG = 10$ mm, $CH = 10$ mm, $CE = 20$ mm y $DI = 10$ mm. **R. 650 mm^2**

4. Hallar el área de la parte sombreada (Fig. 53), sabiendo que $BD = 40$ mm. **R. 456.64 mm^2**

Figura 53

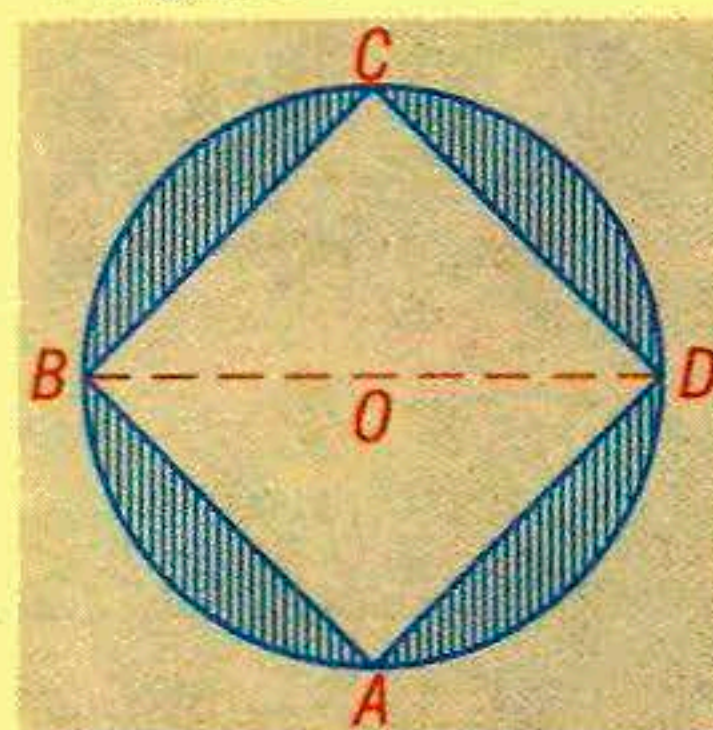
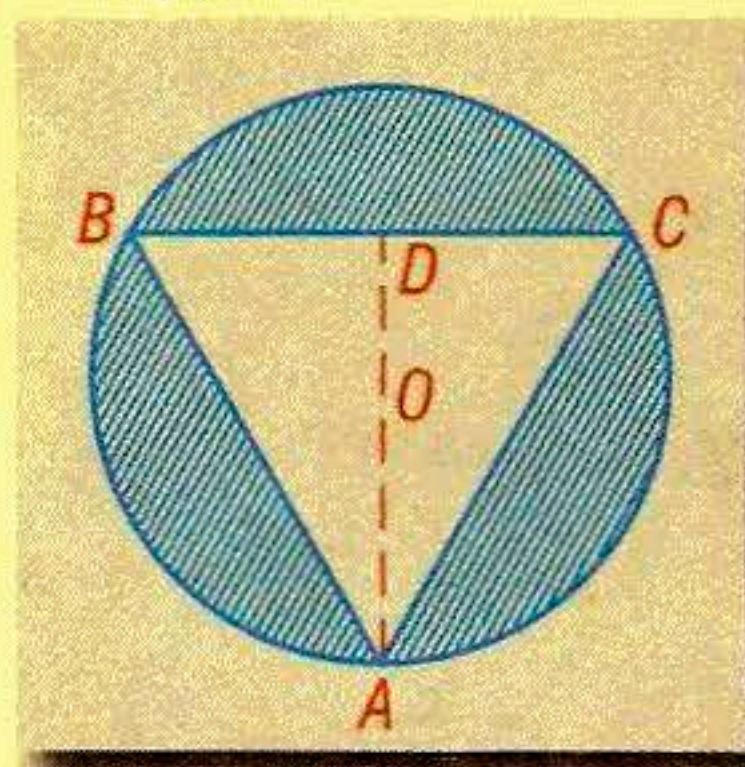
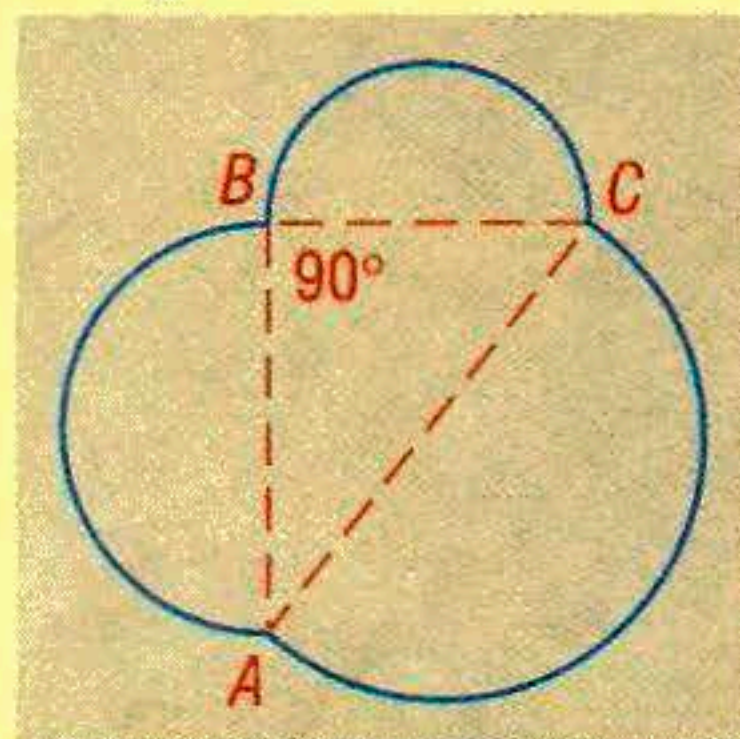


Figura 54



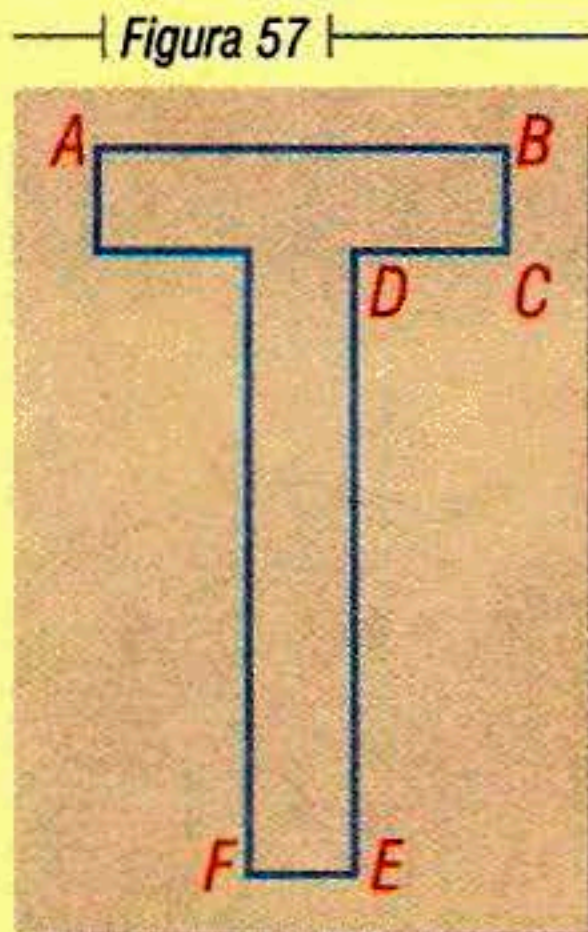
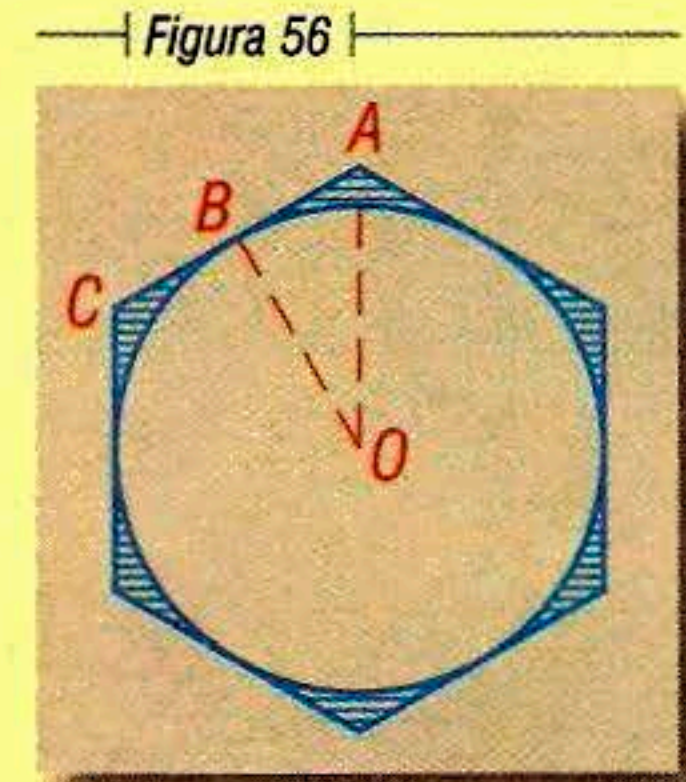
5. Hallar el área de la parte sombreada (Fig. 54) sabiendo que $AO = 15$ mm, $AD = 22.5$ mm y $BC = 26$ mm. **R. 414.36 mm^2**

Figura 55

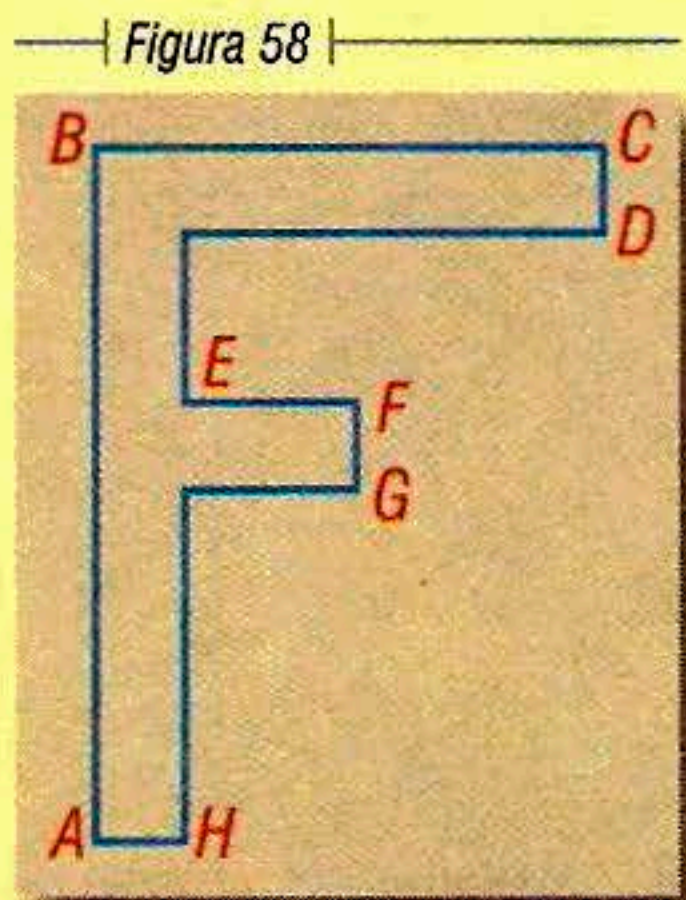


6. Hallar el área de la figura 55 siendo $AB = 20$ mm, $BC = 15$ mm y $AC = 25$ mm. **R. 640.8750 mm^2**

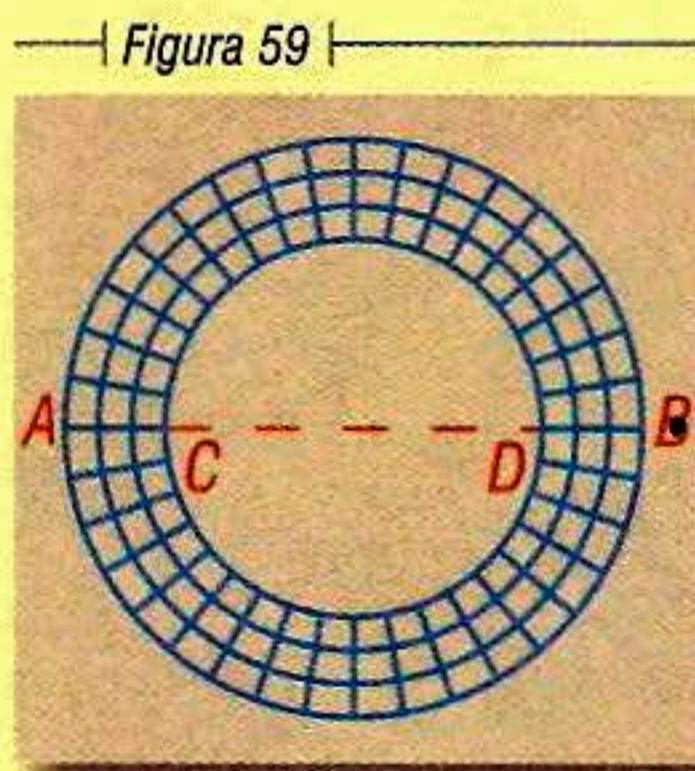
7. Hallar el área de la parte sombreada (Fig. 56), sabiendo que $AC = 15 \text{ mm}$ y $DB = 13 \text{ mm}$. **R. 54.0696 mm^2**



8. Hallar el área de la figura 57 siendo $AB = 20 \text{ mm}$, $BC = 5 \text{ mm}$, $DE = 30 \text{ mm}$ y $EF = 5 \text{ mm}$. **R. 250 mm^2**

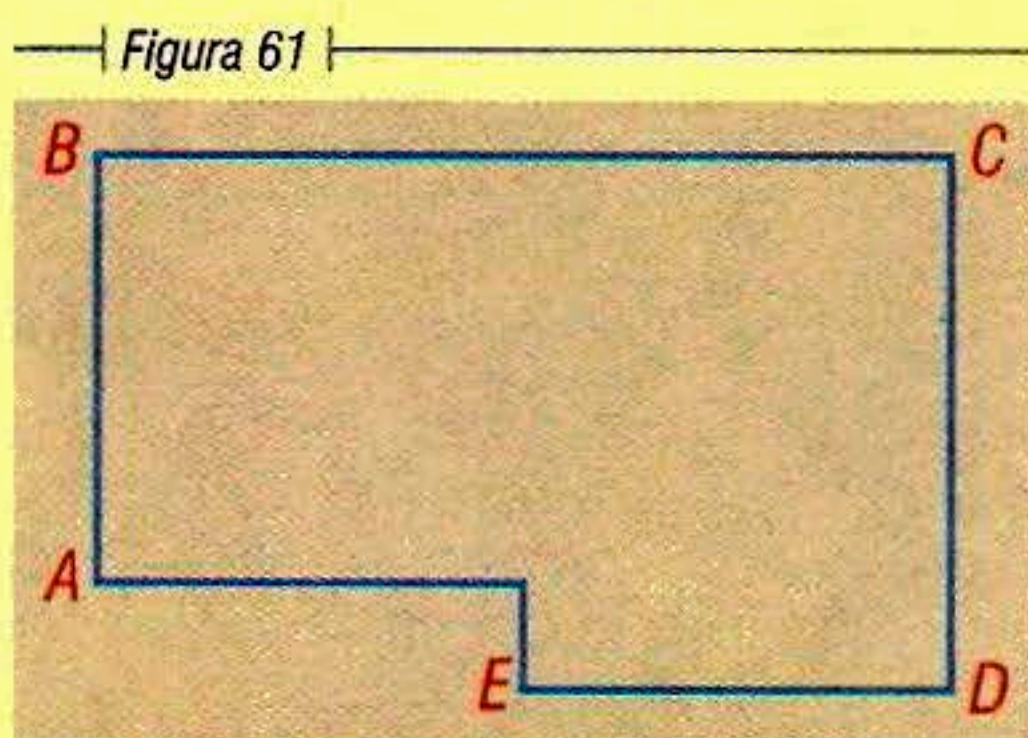
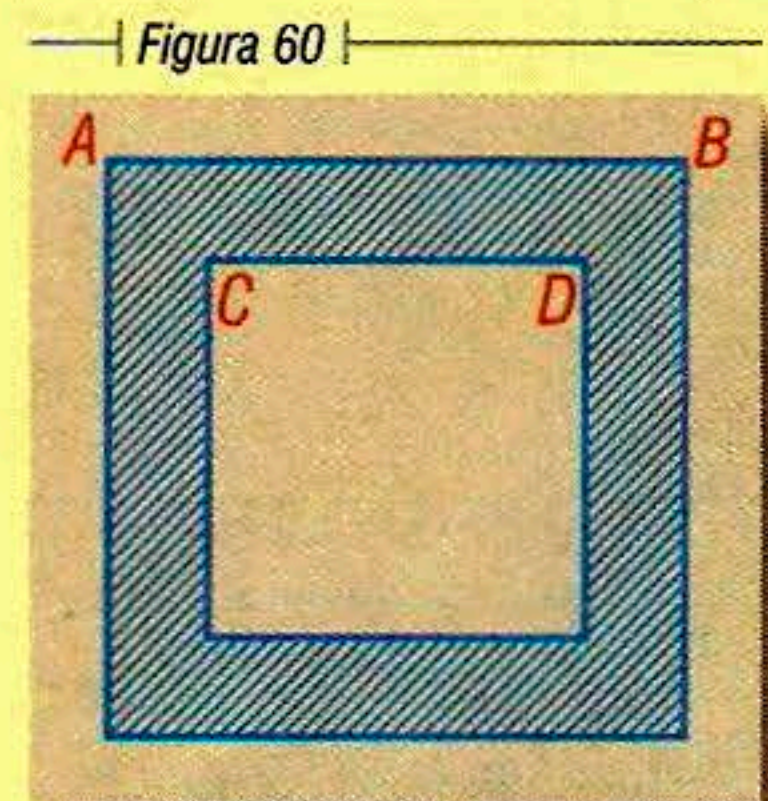


9. Hallar el área de la figura 58 siendo $AB = 40 \text{ mm}$, $BC = 30 \text{ mm}$, $CD = FG = AH = 5 \text{ mm}$, $EF = 10 \text{ mm}$. **R. 375 mm^2**



10. La figura 59 representa un paseo circular pavimentado con losas de 400 cm^2 en cuyo interior hay un jardín circular. Siendo $AB = 30 \text{ m}$ y $CD = 20 \text{ m}$, ¿cuántas losas fueron necesarias para pavimentar el paseo? **R. 9,817.5 losas**

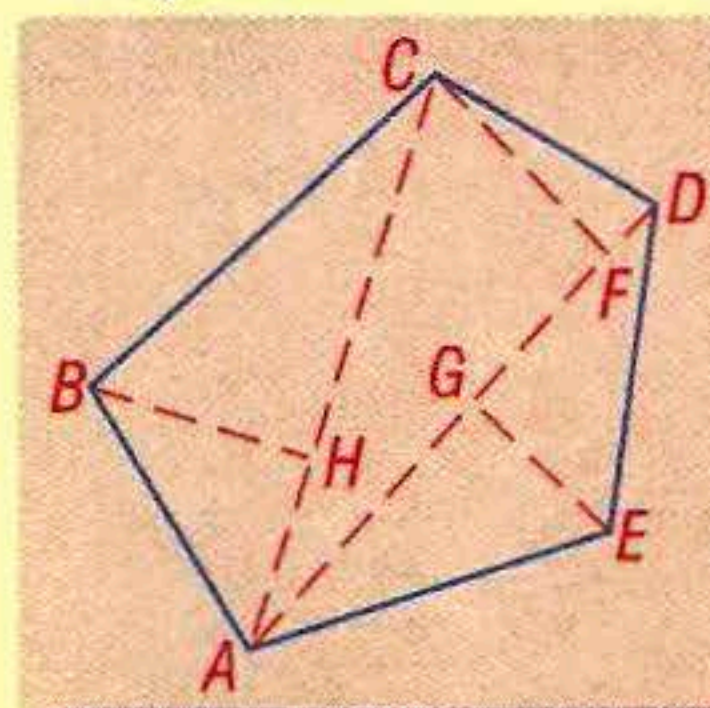
11. La figura 60 representa el marco de un cuadro que se pagó a $\$1.60$ el dm^2 . Siendo $CD = 20 \text{ cm}$ y $AB = 30 \text{ cm}$, ¿cuánto importó el marco? **R. $\$8$**



12. ¿Cuánto costará un piso de concreto como el representado en la figura 61 siendo $AB = 20 \text{ m}$, $BC = 40 \text{ m}$, $CD = 25 \text{ m}$, $AE = 20 \text{ m}$, a $\$18$ el m^2 ? **R. $\$16,200$**

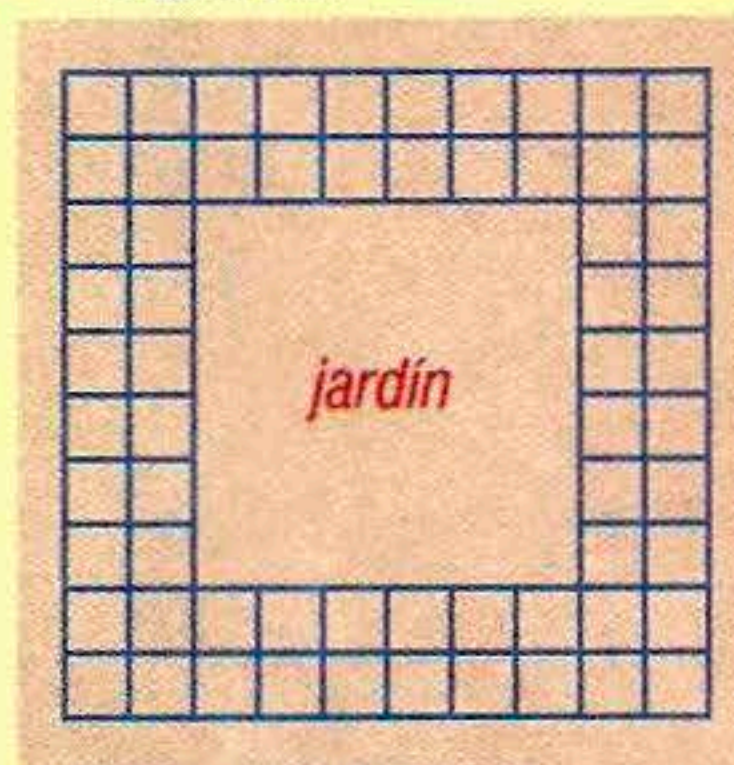
13. Hallar el valor del terreno representado en la figura 62 que se pagó a \$0.80 la ca sabiendo que $AC = 40$ m, $BH = 15$ m, $AD = 39$ m, $CF = 17.5$ m y $GE = 12.5$ m. **R. \$708**

Figura 62



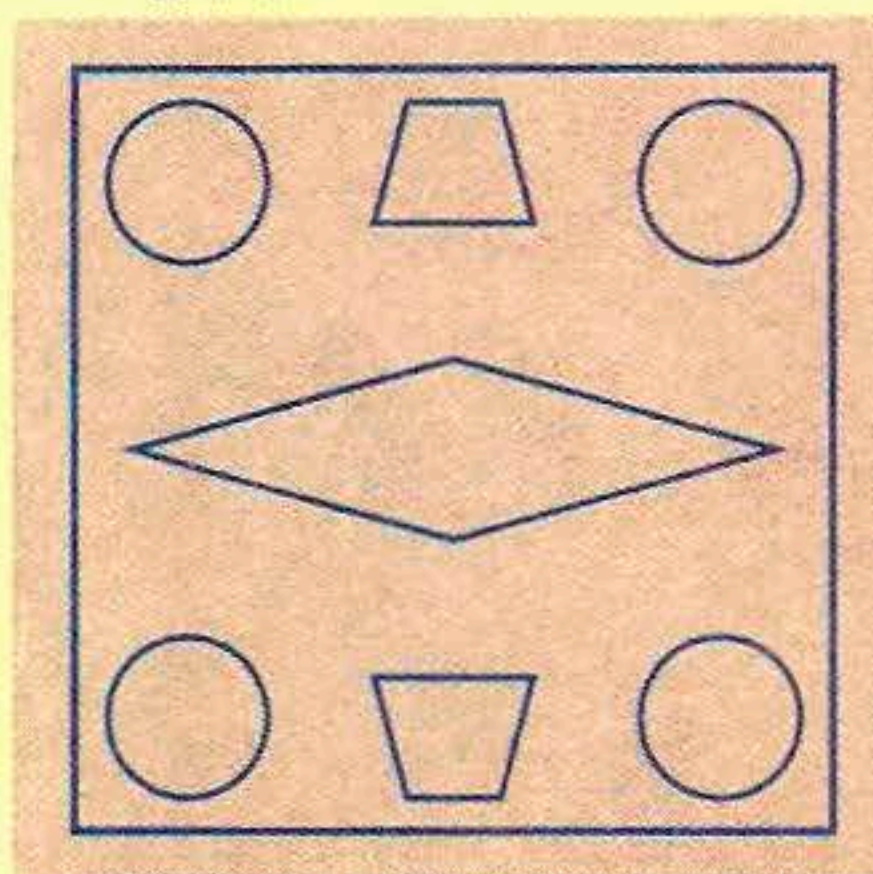
14. La figura 63 representa un parque cuadrado de 100 metros de lado que tiene en el centro un jardín cuadrado de 60 m de lado y el resto es acera. ¿Cuántos m^2 de aceras tiene el parque? **R. 6,400 m^2**

Figura 63



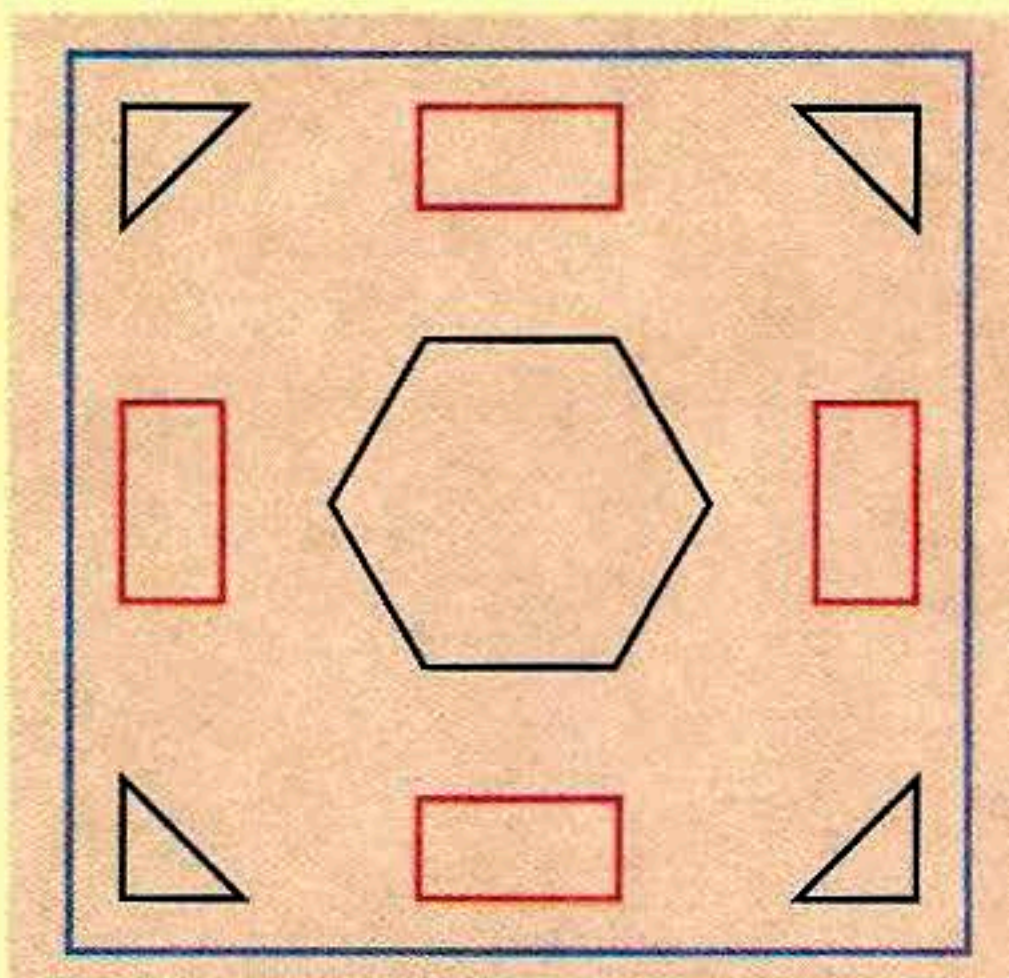
15. La figura 64 representa un parque cuadrado de 90 m de lado. En el parque hay cuatro canteros circulares de 6 m de radio; dos canteros iguales en forma de trapecio cuyas bases son 20 y 12 m y su altura 10 m, y en el centro un estanque en forma de rombo cuyas diagonales miden 70 y 15 m, respectivamente. El resto es paseo cementado. ¿Cuántos m^2 de paseo cementado hay? **R. 6,802.6096 m^2**

Figura 64



16. La figura 65 representa un parque cuadrado de 100 m de lado en el cual hay cuatro canteros rectangulares iguales de 20 m de base y 5 m de altura; cuatro canteros iguales en forma de triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 12 m y un estanque central en forma de hexágono regular de 20 m de lado y 17.3 m de apotema. El resto es paseo por cuya construcción se pagó a \$15 el metro cuadrado. ¿Cuánto importó la construcción del paseo? **R. \$124,110**

Figura 65



II. VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

PRISMA es un cuerpo geométrico cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos.

Por su **base** los prismas pueden ser **triangulares**, **cuadrangulares**, **pentagonales**, **hexagonales**, etcétera.

Aristas de un prisma son las intersecciones de las caras.

El prisma es **recto** (Fig. 66) cuando las aristas son perpendiculares a las bases, y **oblicuo** en caso contrario.

Un prisma es **regular** cuando es recto y sus bases son polígonos regulares, e **irregular** cuando no cumple alguna de estas condiciones.

Altura de un prisma es la perpendicular bajada de una base a la otra. Cuando el prisma es recto, la altura es igual a la arista.

Paralelepípedo es el prisma cuyas bases son paralelogramos iguales: cuando el paralelepípedo es recto y sus bases son rectángulos iguales recibe el nombre de **paralelepípedo recto rectangular** u **ortoeдро** (Fig. 67).

Figura 67

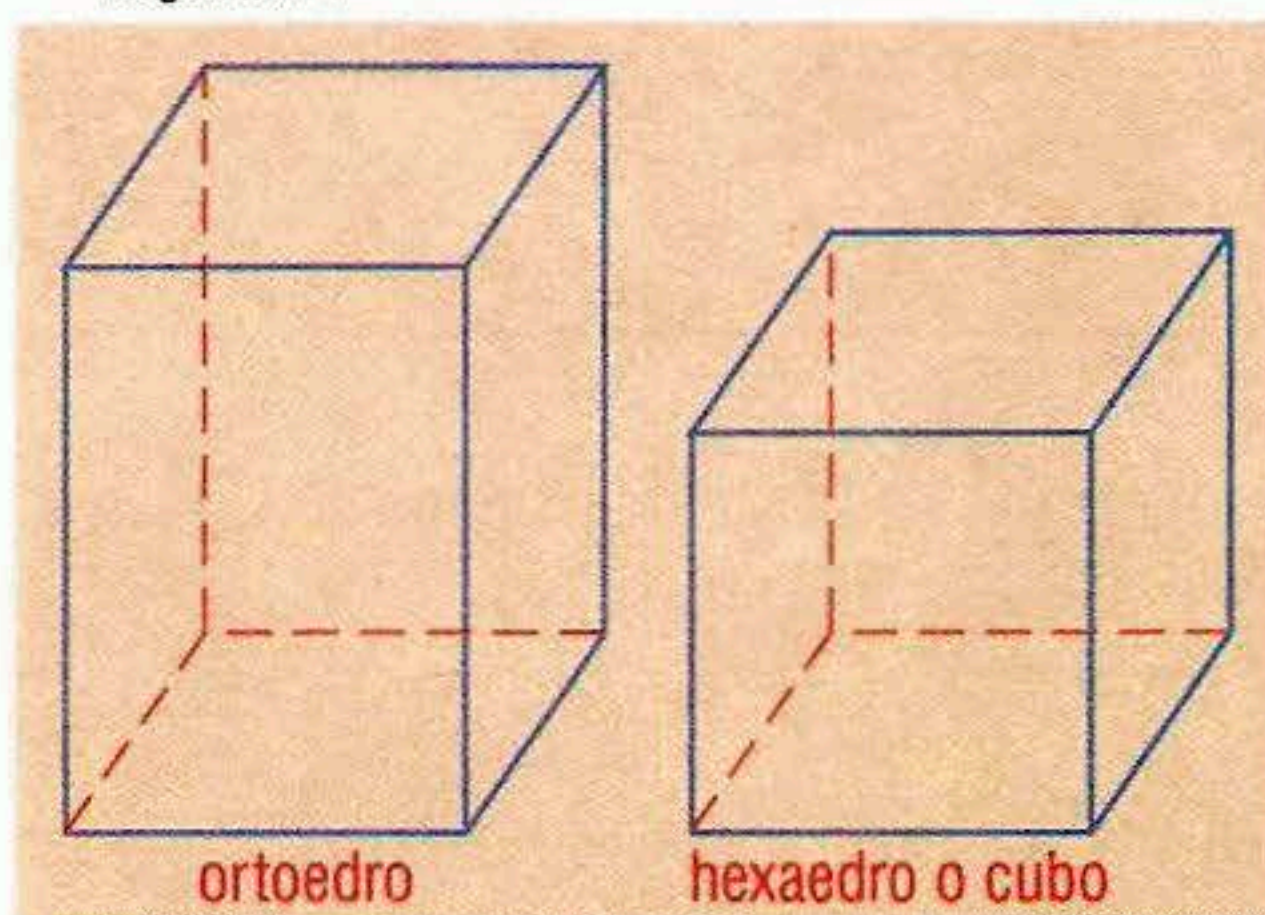
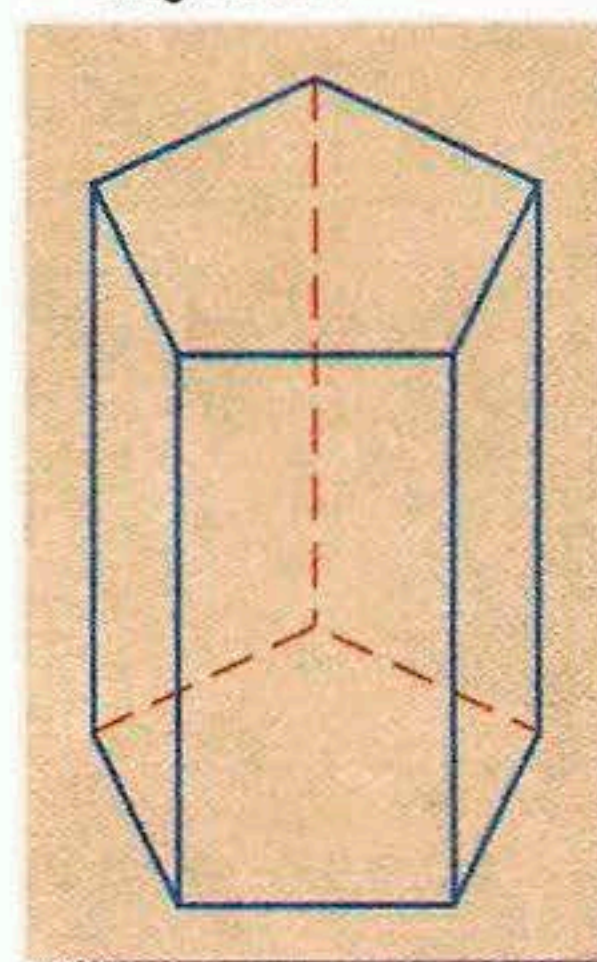


Figura 66



Un ladrillo, una caja de zapatos, una caja de tabacos, las cajas de mercancías, la sala de una casa, etc., son ortoedros.

Cuando las caras del ortoedro son cuadradas, éste recibe el nombre de **hexaedro** o **cubo** (Fig. 67).

Volumen del prisma. El volumen de un prisma es igual a su **altura multiplicada por el área de su base**.

Siendo V = volumen del prisma, h = altura, B = área de la base, tendremos:
 $V = h \times B$

Hallar el volumen de un prisma recto regular triangular cuya altura es 20 cm, el lado del triángulo de la base 15 cm y la altura de este triángulo 13 cm (Fig. 68).

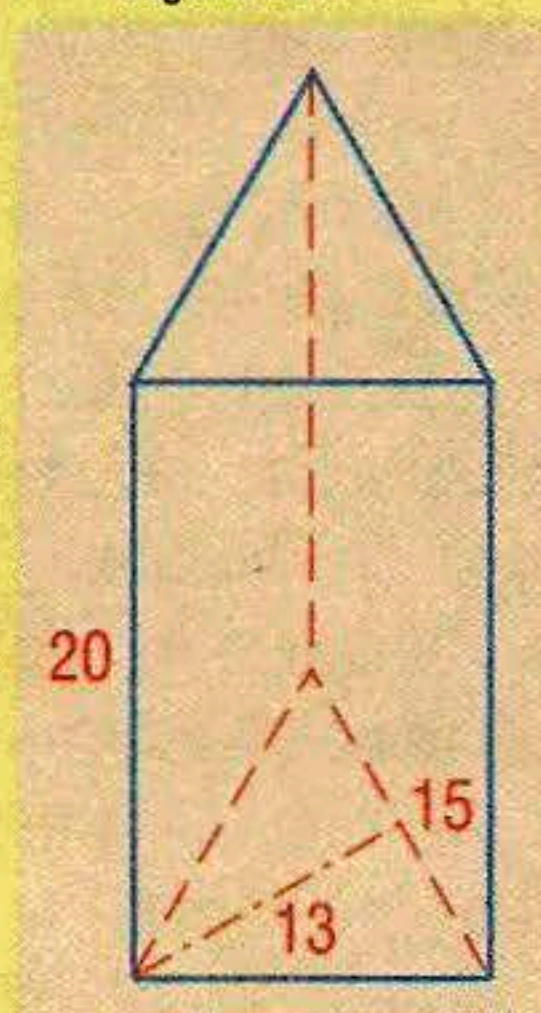
Hallemos el área de la base que por ser un triángulo será igual a la mitad del producto de la base por la altura:

$$\text{Área de la base: } \frac{15 \times 13}{2} = 97.5 \text{ cm}^2$$

Entonces tenemos: $h = 20 \text{ cm}$, $B = 97.5 \text{ cm}^2$, luego:

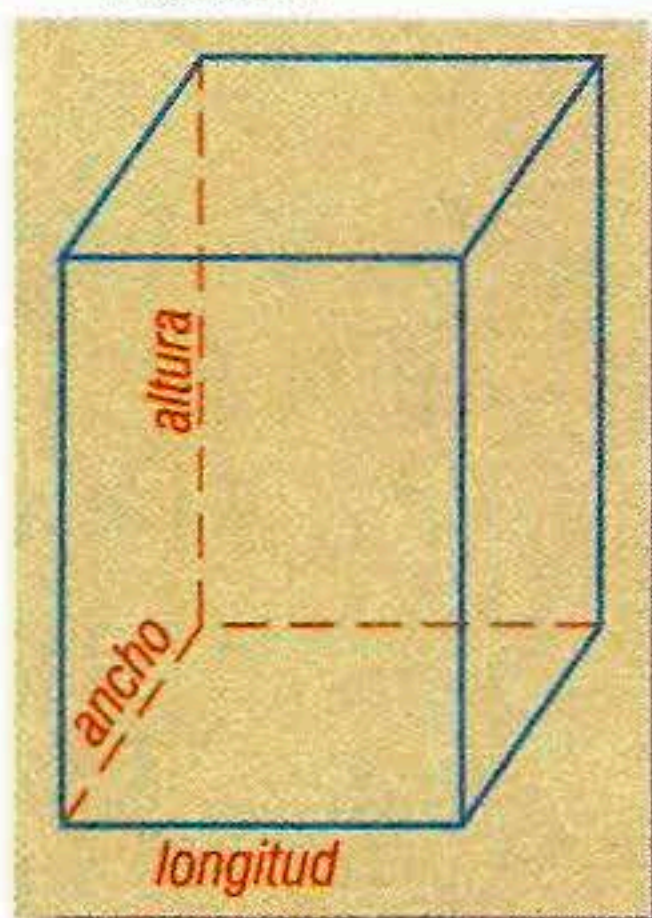
$$V = h \times B = 20 \times 97.5 = 1,950 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

Figura 68



Volumen del ortoedro. El volumen de un ortoedro es igual al **producto de sus tres dimensiones** (Fig. 69).

Figura 69



En efecto: el ortoedro es un prisma y el volumen de todo prisma es:

$$V = \text{altura} \times \text{área de la base}$$

pero como la base del ortoedro es un rectángulo y el área de un rectángulo es igual al producto de su base (**longitud** en la figura 69) por su altura (**anchura** en la figura 69), tendremos que en la fórmula anterior, en lugar de **área de la base** podemos poner **longitud \times anchura** y tendremos:

$$\text{Vol. del ortoedro} = \text{altura} \times \text{longitud} \times \text{anchura} = h \times l \times a$$

Ejemplo

El volumen de una cajita cuyas dimensiones sean 10 cm, por 8 cm por 5 cm sería:

$$V = 10 \times 8 \times 5 = 400 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

Volumen del cubo. Como el cubo es un ortoedro en el cual las tres dimensiones son iguales, el volumen de un cubo es igual al **cubo de su arista**, $V = a^3$.

Así, el volumen de un dado cuya arista es 12 cm sería:

$$V = a^3 = 12^3 = 1,728 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

597

PIRÁMIDE es un cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales triángulos que concurren en un punto llamado **vértice** de la pirámide (S en la figura 70).

Por su **base** las pirámides pueden ser **triangulares**, **cuadrangulares**, **pentagonales**, **hexagonales**, etcétera.

Las pirámides triangulares se llaman **tetraedros**.

Altura de una pirámide es la perpendicular bajada desde el vértice de la pirámide a la base o su prolongación (SO en la figura 70).

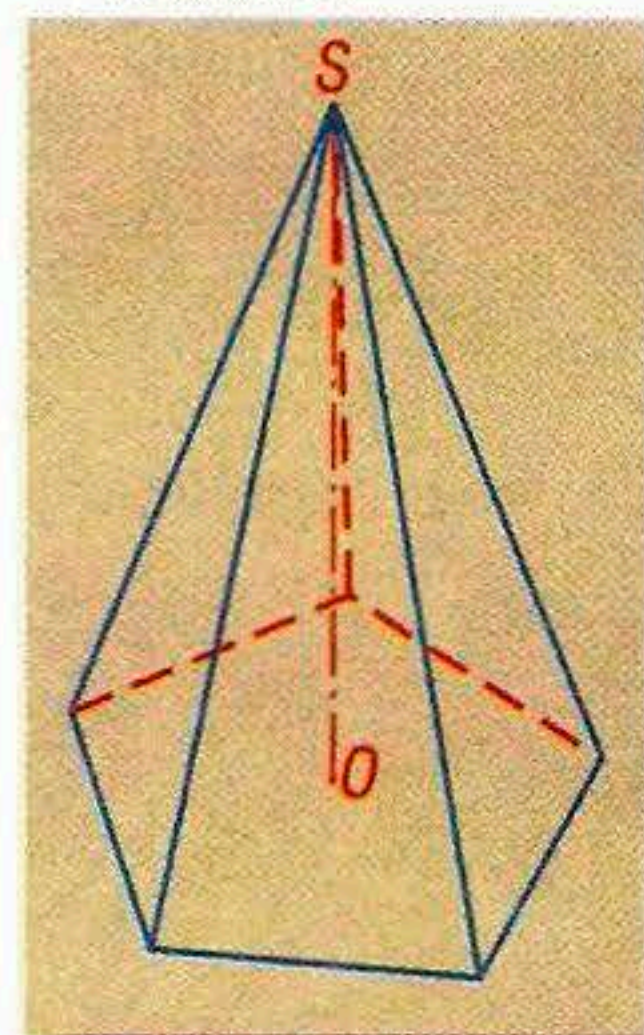
La pirámide es **regular** cuando la base es un polígono regular y la altura cae en el centro de la base, e **irregular** cuando no cumple estas condiciones.

Volumen de la pirámide. El volumen de una pirámide es igual al **tercio de su altura multiplicada por el área de la base**.

Siendo V = volumen de la pirámide, h = altura, B = área de la base, tendremos:

$$V = \frac{1}{3} h \times B$$

Figura 70



- 1) El volumen de una pirámide cuya altura es 20 cm y el área de la base 180 cm² será:

$$V = \frac{1}{3}h \times B = \frac{20 \times 180}{3} = 1,200 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

- 2) Hallar el volumen de una pirámide regular pentagonal siendo su altura 6 varas cubanas, el lado de la base 6 m y el apotema de la base 4 m

$$V = \frac{1}{3}h \times B$$

Aquí, $h = 6 \text{ v cub.} = 6 \times 0.848 = 5.088 \text{ m}$

Hay que hallar el área de la base aplicando la fórmula del área de un polígono regular:

$$B = \frac{a \times ln}{2} = \frac{4 \times 6 \times 5}{2} = 60 \text{ m}^2$$

Entonces,

$$V = \frac{1}{3}h \times B = \frac{5.088 \times 60}{3} = 101.76 \text{ m}^3 \quad \text{R.}$$

CILINDRO de revolución o cilindro circular recto es el cuerpo geométrico producido por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

El cilindro de la figura 71 ha sido producido por el rectángulo $ABOO'$ girando alrededor del lado OO' .

El lado OO' es el **eje** y **altura** del cilindro; el lado opuesto a éste, AB , es la **generatriz** del cilindro; los lados AO' y BO son los **radios** iguales de las bases del cilindro.

La **altura** del cilindro puede definirse también diciendo que es la distancia entre las dos bases.

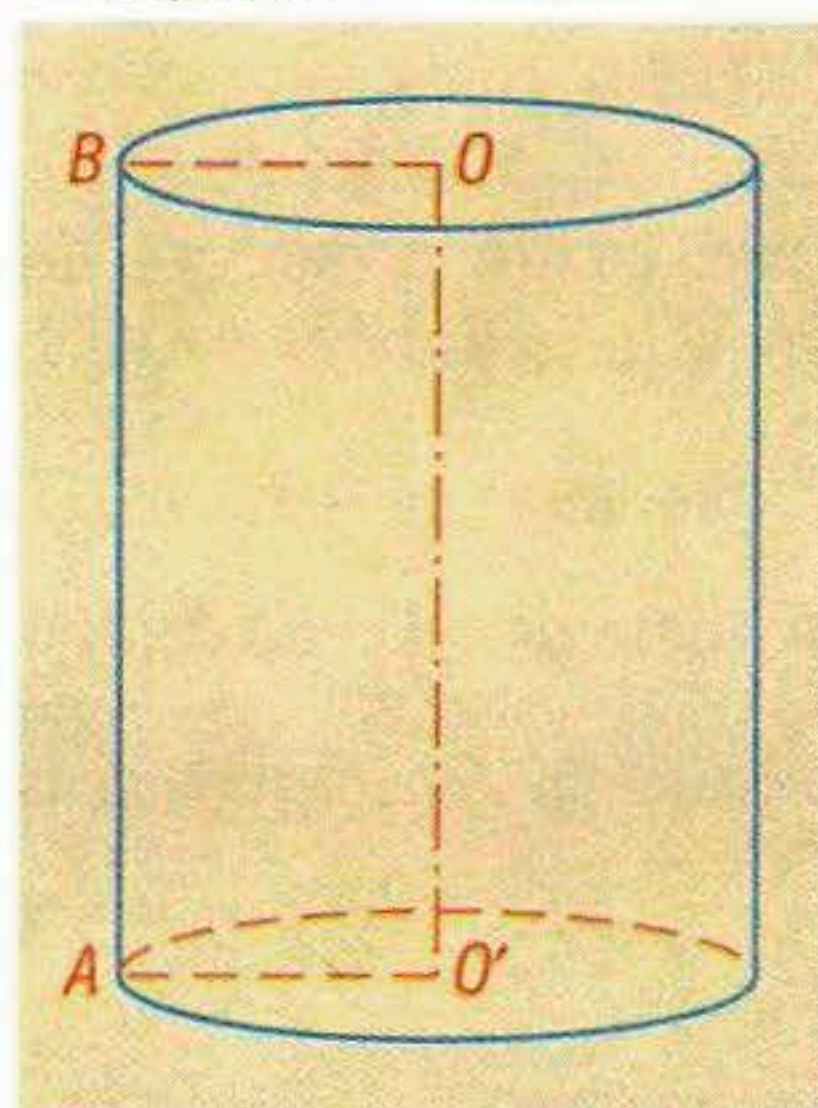
Cuando el cilindro es recto (sólo estudiamos éste), la altura es igual a la generatriz.

Volumen del cilindro. El volumen de un cilindro es igual a su altura multiplicada por el área del círculo de la base.

Siendo V = volumen del cilindro, h = altura, r = radio del círculo de la base y por tanto πr^2 = área de la base, tendremos:

$$V = h \times \pi r^2$$

Figura 71



Ejemplo

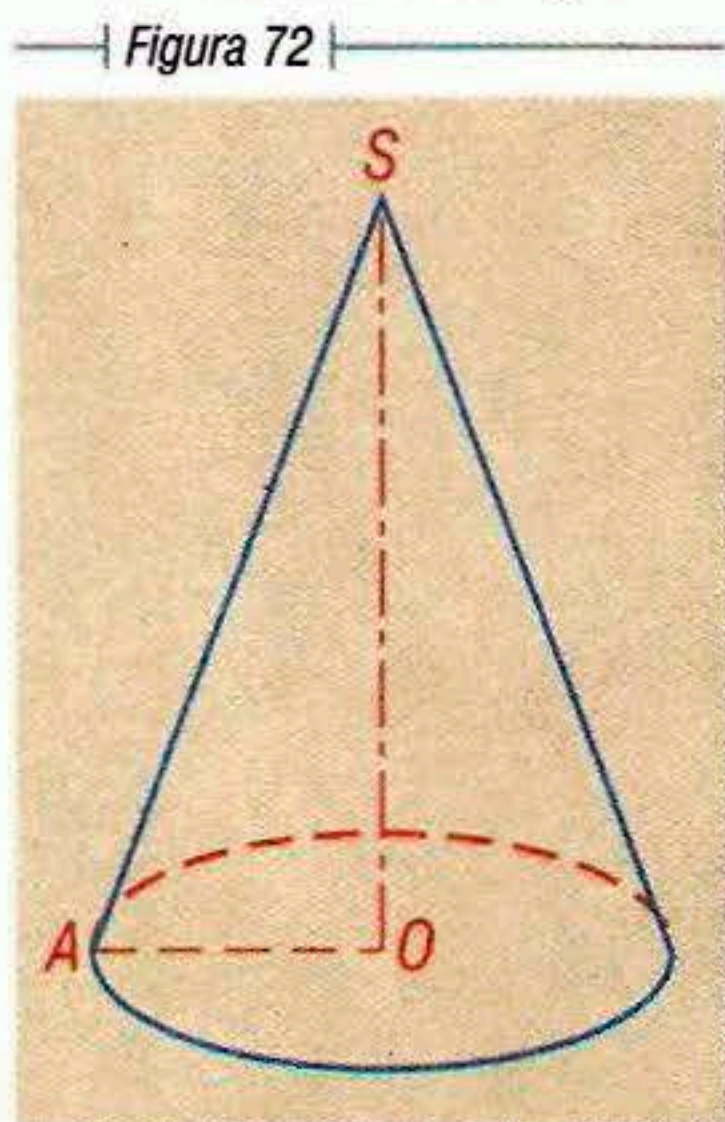
Hallar el volumen de un cilindro cuya altura mide 40 cm y el diámetro del círculo de la base 10 cm.

Aquí $h = 40$ cm, $r = 5$ cm, luego:

$$V = h \times \pi r^2 = 40 \times 3.1416 \times 25 = 3,141.6 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

599 CONO de revolución o cono circular recto es el cuerpo geométrico producido por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El cono de la figura 72 ha sido producido por la revolución del triángulo rectángulo SOA alrededor del cateto SO.



El punto S es el **vértice** del cono; el cateto SO es la **altura** y **eje** del cono; el cateto OA es el **radio** del círculo de la base; la hipotenusa SA es la **generatriz** del cono.

La altura SO del cono puede definirse también como la perpendicular bajada del vértice a la base.

Volumen del cono. El volumen de un cono es igual al **tercio de su altura multiplicada por el área del círculo de la base.**

Siendo $V =$ volumen del cono, $h =$ altura, $r =$ radio de la base, tendremos:

$$V = \frac{1}{3}h \times \pi r^2$$

Ejemplo

Hallar el volumen de un cono cuya altura mide 12 cm y el diámetro de la base 8 cm. Aquí $h = 12$ cm, $r = 4$ cm, luego:

$$V = \frac{1}{3}h \times \pi r^2 = \frac{12 \times 3.1416 \times 16}{3} = 201.0624 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

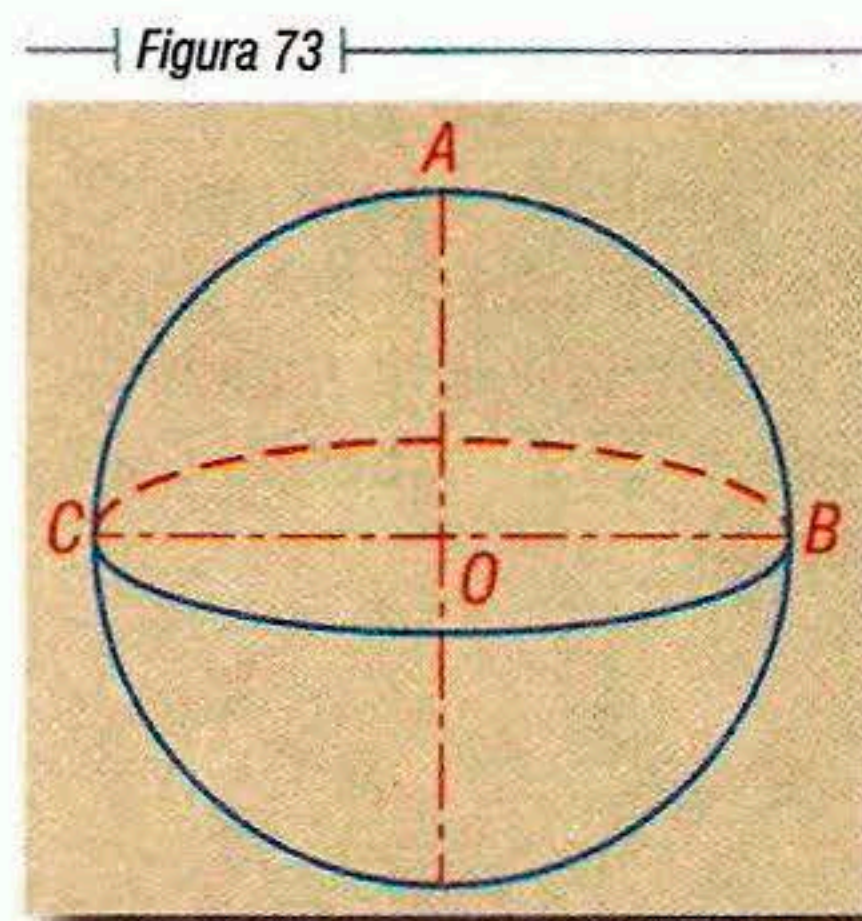
600 ESFERA es el cuerpo geométrico (Fig. 73) producido por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.

El **centro**, el **radio** y el **diámetro** de la esfera son el centro, el radio y el diámetro del círculo que la produce.

Volumen de la esfera. El volumen de una esfera es igual a $\frac{4}{3}$ de π por el cubo del radio.

Siendo $V =$ volumen de la esfera y $r =$ radio, tendremos:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



El volumen de una esfera cuyo radio sea 30 cm sería:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \times 3.1416 \times 30^3}{3} = 113,097.6 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

Ejemplo

CUADRO DE LOS VOLÚMENES ESTUDIADOS

CUERPO GEOMÉTRICO	VOLUMEN	FÓRMULA
prisma	altura \times área de la base	$h \times B$
ortopedro	altura \times longitud \times ancho	$h \times l \times a$
cubo	el cubo de la arista	a^3
pirámide	$\frac{1}{3}$ de altura \times área de la base	$\frac{1}{3}h \times B$
cilindro	altura \times área de la base	$h \times \pi r^2$
cono	$\frac{1}{3}$ de la altura \times área de la base	$\frac{1}{3}h \times \pi r^2$
esfera	$\frac{4}{3}\pi \times$ el cubo del radio	$\frac{4}{3}\pi \times r^3$

- Una caja de zapatos mide 35 cm por 18 cm por 15 cm. Expresar su volumen en denominado.
R. 9 dm³ 450 cm³
- ¿Cuántos m³ de aire hay en una habitación que mide 8 v cubanas por 4 m por 50 dm?
R. 135.68 m³
- En una nave de 12 v cubanas por 10 m por 2,500 cm, ¿cuántas cajas cúbicas de 50 cm de arista caben?
R. 20,352 cajas
- Hallar el volumen de un prisma cuya altura es 1.50 m y la base un rombo cuyas diagonales miden 70 cm y 50 cm.
R. 262 dm³ 500 cm³
- ¿Cuál será el volumen de un prisma recto regular cuya altura es 3 dm 5 cm y la base un hexágono regular cuyo lado mide 6.9282 cm y el apotema 6 cm?
R. 4 dm³, 364 cm³, 766 mm³
- ¿Cuántos litros de aceite caben en una lata de base cuadrada de 30 cm de lado cuya altura es $\frac{3}{4}$ de vara cubana?
R. 57.24 ℓ
- Hallar la capacidad de un depósito cuya base es un triángulo que tiene 60 cm de base y 50 cm de altura siendo la altura del depósito $\frac{9}{5}$ de metro.
R. 270 ℓ
- Hallar el volumen de una pirámide regular pentagonal cuya altura mide 3 m 20 cm, el lado de la base 87.185 cm y el apotema de la base 60 cm.
R. 1 m³, 394 dm³, 960 cm³
- ¿Cuál será el volumen de una pirámide cuya altura es 10 yardas y el área de la base 18 m²?
R. 54.84 m³

276

Ejercicio

10. Hallar el volumen de un tetraedro cuya altura es 2 m 15 cm, la base del triángulo de la base es 40 cm y su altura 36 cm. **R. 51 dm³ 600 cm³**
11. En una pirámide regular octogonal la altura es 5 m 40 cm, el lado de la base 12.426 cm y el apotema de la base 15 cm. Hallar el volumen. **R. 134 dm³, 200 cm³, 800 mm³**
12. Hallar el volumen de un cilindro de 80 cm de altura siendo el radio del círculo de la base 20 cm. **R. 100 dm³, 531 cm³, 200 mm³**
13. ¿Cuál es la capacidad en litros de un tonel cilíndrico cuya altura es 1 m 40 cm y el diámetro de la base 60 cm? **R. 395.8416 ℓ**
14. ¿Qué cantidad de agua cabe en un jarro cilíndrico de 20 cm de altura si el radio de la base es 5 cm? **R. 1.5708 ℓ**
15. Expresar en denominado la cantidad de agua que puede almacenar un tanque cilíndrico cuya altura es 90.5 cm y el diámetro de la base 30 dm. **R. 6 kl, 3 hl, 9 dal, 7 ℓ, 8 cl, 3 ml**
16. ¿Cuántos tanques cilíndricos de 2 m de altura y 6 m de diámetro harán falta para almacenar 1,130,976 litros de agua? **R. 20 tanques**
17. Hallar el volumen de un cono cuya altura es 6 dm y el diámetro de la base 20 cm. **R. 6 dm³, 283 cm³, 200 mm³**
18. En un barquillo de helado de forma cónica el diámetro de la base es 4 cm y la altura 12 cm. ¿Cuántos cm³ de helado hay en el barquillo cuando está lleno? **R. 50.2656 cm³**
19. ¿Cuál es el volumen de una pelota cuyo diámetro es 20 cm? **R. 4,188.8 cm³**
20. Una pelota de basket inflada tiene un diámetro interior de 24 cm. ¿Qué cantidad de aire contiene? **R. 7 dm³, 238 cm³, 246.4 mm³**

601

PROBLEMAS EN QUE SE COMBINA VOLUMEN CON PESO Y DENSIDAD

Para la resolución de estos problemas el alumno debe tener presentes las fórmulas:

$$D = \frac{P}{V} \quad P = V \times D \quad V = \frac{P}{D}$$

1. Un listón de cedro que mide 15 cm por 10 cm por 5 cm pesa 390 g. ¿Cuál es la densidad del cedro?

La fórmula a aplicar es $D = \frac{P}{V}$

$P = 390$ g. Hallemos el volumen del listón: $V = 15 \times 10 \times 5 = 750$ cm³

Entonces $D = \frac{P}{V} = \frac{390}{750} = 0.52$ **R.**

2. ¿Cuánto pesa una esfera de hierro (densidad 7.8) cuyo diámetro es 20 cm?

La fórmula a aplicar es $P = V \times D$

Aquí $D = 7.8$. Hallemos el volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \times 3.1416 \times 10^3}{3} = 4,188.8 \text{ cm}^3 \quad \text{R.}$$

Entonces: $P = V \times D = 4,188.8 \times 7.8 = 32,672.64 \text{ g} = 32.67264 \text{ kg}$ **R.**

3. Hallar el volumen de un cono de cobre (densidad 8.9), sabiendo que pesa 2 Tm, 4 Mg, 7 kg.

La fórmula a aplicar es $V = \frac{P}{D}$

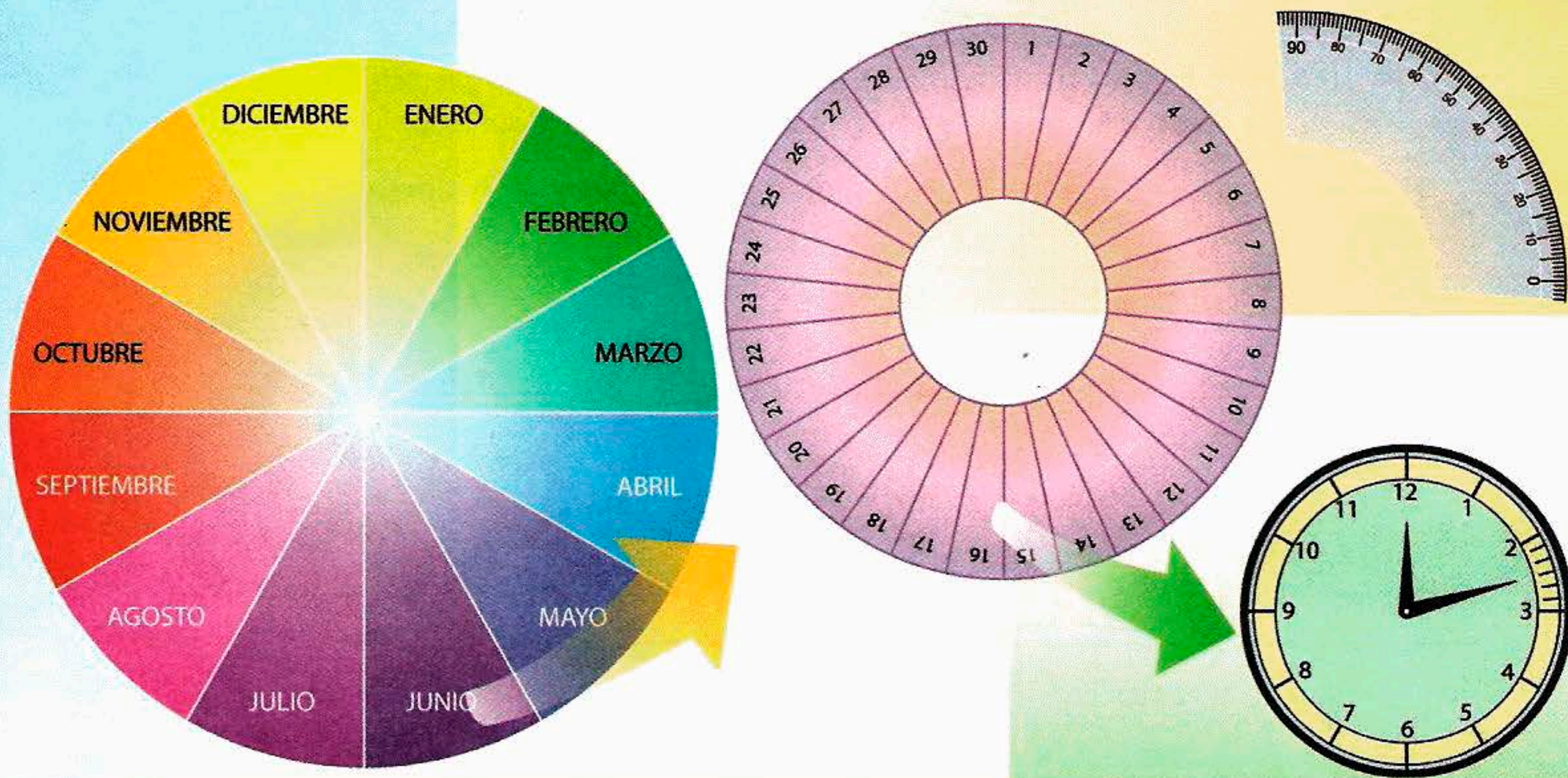
Aquí $P = 2 \text{ Tm } 4 \text{ Mg } 7 \text{ kg} = 2,047 \text{ kg}$ y $D = 8.9$; luego:

$$V = \frac{P}{D} = \frac{2,047}{8.9} = 230 \text{ dm}^3 \quad \text{R.}$$

277

Ejercicio

- Un terrón de azúcar de 3 cm por 2 cm por 1 cm pesa 9.6 g. Hallar la densidad del azúcar.
R. 1.6
- La goma de borrar de un lápiz tiene forma de cilindro. Si su altura es 1.5 cm y el diámetro de la base 1 cm, ¿cuánto pesa la goma? (densidad de la goma 0.9). **R. 1.06129 g**
- Un trozo de cedro pesa 2 dag 6 g. Siendo la densidad del cedro 0.52, ¿cuál es su volumen?
R. 50 cm³
- Hallar el peso de un cono de bronce (densidad 8.8) cuya altura es 30 cm y el diámetro de la base 12 cm. **R. 9.952 kg**
- ¿Cuánto pesa el aceite de oliva que contiene lleno un jarro de lata cilíndrico de 20 cm de altura, siendo 5 cm el radio de su base? (densidad del aceite de oliva 0.91). **R. 1.429 kg**
- El pedestal de una estatua es una columna de mármol (densidad 2.7) que tiene la forma de un prisma regular de base octogonal. La altura del pedestal es 5 m, el perímetro de la base 198.82 cm y el apotema de la base 30 cm. ¿Cuánto pesa el pedestal? **R. 4,026.105 kg**
- Un tanque cuyas dimensiones interiores son 2 m × 3 m × 1.5 m de altura contiene gasolina. Si la gasolina llega a 30 cm del borde y la densidad de la gasolina es 0.73, ¿cuánto pesa esa cantidad de gasolina? **R. 5,256 kg**
- Hallar el peso de una esfera de plomo (densidad 11.35) cuyo diámetro es 6 cm. **R. 1.2836 kg**
- Las dimensiones interiores de un latón cilíndrico son: altura 1 m 20 cm y radio de la base 30 cm. ¿Cuánto pesará el alcohol (densidad 0.79) que puede contener el latón llenándolo hasta sus 2/3? **R. 178.694 kg**
- Se tiene una copa de forma cónica en la cual la altura es 15 cm y el diámetro del círculo que forma la boca de la copa es 8 cm. Esta copa se llena con cierto líquido y el peso de este líquido es 15 dag 79 cg 6.8 mg. ¿Cuál es la densidad de ese líquido? **R. 0.6**
- Un tanque cilíndrico cuyas dimensiones interiores son 1 m de altura y 2 m 60 cm de diámetro de la base, pesa vacío 180 kg. ¿Cuánto pesará lleno de petróleo? (densidad del petróleo 0.80).
R. 4,427.4432 kg
- Un pisapapel de marfil tiene la forma de una pirámide regular de base cuadrada de 8 cm de lado y 2 dm 4 cm de altura. ¿Cuánto pesa el pisapapel? (densidad del marfil 1.87). Expresar el resultado en denominado. **R. 9 hg, 5 dag, 7 g, 4 dg, 4 cg**
- Si un tanque cuyas dimensiones interiores son 2 m × 1 m × 3 m se llena de arena (densidad 2.3) pesa 13,845 kg. ¿Cuánto pesa el tanque vacío? **R. 45 kg**



Los números denominados, tienen su origen en los sistemas de medidas. Los babilonios dividieron el círculo en grados y minutos. Establecieron también la división en años, meses, días,

horas, minutos y segundos, basándose en su sistema sexagesimal de numeración. Los romanos aportaron la pulgada.

Capítulo **XXXIX**

NÚMEROS DENOMINADOS

602 **NÚMERO DENOMINADO** es el que consta de diversas unidades de medida de la misma magnitud, como 4 arrobas y 6 libras; 3 leguas, 4 cordeles y 8 varas.

603 **NÚMERO INCOMPLEJO** es el que consta de unidades de una sola especie, como 45 libras; 8 yardas; 8 meses.

REDUCCIÓN DE DENOMINADOS A INCOMPLEJOS

604 **REDUCCIÓN DE UN DENOMINADO A INCOMPLEJO DE ESPECIE INFERIOR**

Ejemplos

- 1) Reducir 4 varas³ 2 pies 5 pulgadas a pulgadas.
Se reducen las varas a pies: $4 v \times 3 = 12$ pies.
A 12 pies le sumamos los 2 pies del número dado:

$$12 \text{ pies} + 2 \text{ pies} = 14 \text{ pies}$$

Se reducen los 14 pies a pulgadas: $14 \times 12 = 168$ pulg.
A 168 pulgadas le sumamos las 5 pulgadas del número dado:

$$168 \text{ pulgadas} + 5 \text{ pulgadas} = \mathbf{173 \text{ pulgadas}} \quad \mathbf{R.}$$

2) Reducir 3 qq, 2 @, 5 oz a onzas.

$$\begin{aligned} 3 \text{ qq} \times 4 &= 12 @ \\ 12 @ \times 25 &= 350 \text{ lb} \\ 350 \text{ lb} \times 16 &= 5,600 \text{ oz} \end{aligned}$$

$$12 @ + 2 @ = 14 @$$

$$5,600 \text{ oz} + 5 \text{ oz} = 5,605 \text{ oz} \quad \text{R.}$$

Reducir a incomplejo de la especie indicada:

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. 3 leguas 8 cord. 16 v a varas | R. 15,208 v |
| 2. 1 leguas 200 v a varas | R. 5,200 v |
| 3. 1 cab. 10 cord. ² 500 v ² a varas ² | R. 192,884 v ² |
| 4. 3 mesanas 18 v ² a varas ² | R. 10,818 v ² |
| 5. 3 cab. 400 v ² a varas ² | R. 560,272 v ² |
| 6. 2 pipas 3 garraf. a botellas | R. 1,275 botellas |
| 7. 7 v 2 pies 6 pulgadas a pulgadas | R. 282 pulg |
| 8. 5 v 3 pulg a líneas | R. 2,196 líneas |
| 9. 2 v ² 2 pies ² 6 pulg ² a pulg ² | R. 2,886 pulg ² |
| 10. 1 T 3 qq 5 arrobas a arrobas | R. 97 @ |
| 11. 1 qq 18 lb a onzas | R. 1,888 oz |
| 12. 14 lb 6 onzas a adarmes | R. 3,680 adarmes |
| 13. 1 milla 2 furl. 3 poles a poles | R. 403 poles |
| 14. 1 pole 2 yardas 2 pies a pulgadas | R. 294 pulgadas |
| 15. 2 poles 3 yardas a pies | R. 42 pies |
| 16. 8° 6' 14" a s (S) | R. 29,174" S |
| 17. 20° 6" a s (S) | R. 72,006" S |
| 18. 35' 46" a s (S) | R. 2,146" S |
| 19. 3° 4' 5" a s (C) | R. 30,405" C |
| 20. 15° 23" a s (C) | R. 150,023" C |
| 21. 3 días 4 horas 9 min a s | R. 274,140 s |
| 22. 2 días 16 min a s | R. 173,760 s |
| 23. 3 años 6 h 9 min a min | R. 1,555,569 min |
| 24. 4 lustros 3 meses a horas | R. 174,960 h |

278

Ejercicio

REDUCCIÓN DE UN DENOMINADO A INCOMPLEJO DE ESPECIE INTERMEDIA O SUPERIOR

605

1) Reducir 4 T 5 qq 3 lb a quintales.

Reducimos las 4 T a qq: $4 \text{ T} \times 20 = 80 \text{ qq}$

$$80 \text{ qq} + 5 \text{ qq} = 85 \text{ qq}$$

Reducimos las 3 libras a quintales dividiéndolas entre las 100 lb que tiene un quintal:

$$3 \text{ lb} = \frac{3}{100} \text{ qq}$$

Ejemplos

Esta fracción de quintal la sumamos con los 85 qq que ya teníamos:

$$85 \text{ qq} + \frac{3}{100} \text{ qq} = 85\frac{3}{100} \text{ qq} \quad \text{R.}$$

2) Reducir 5 meses 3 días 8 horas 6 minutos a días.

Reducimos los 5 meses y 3 días a días:

$$5 \text{ meses} \times 30 = 150 \text{ días}$$

$$150 \text{ días} + 3 \text{ días} = 153 \text{ días}$$

Ahora hay que reducir las 8 h 6 min a días, pero para ello se reducen primero a minutos:

$$8 \text{ h} \times 60 = 480 \text{ min}$$

$$480 \text{ min} + 6 \text{ min} = 486 \text{ min}$$

Estos 486 min tenemos que reducirlos a días, dividiéndolos entre los minutos que tiene un día. Para saberlo, digo: 1 día tiene 24 horas y 1 hora tiene 60 minutos, luego un día tiene $24 \times 60 = 1,440$ min. Así que divido los 486 min entre 1,440 min que tiene un día y tendré:

$$486 \text{ min} = \frac{486}{1,440} \text{ días} = \frac{27}{80} \text{ días}$$

Esta fracción de día la sumamos con los 153 días y tendremos:

$$153 \text{ días} + \frac{27}{80} \text{ días} = 153\frac{27}{80} \text{ días} \quad \text{R.}$$

3) Reducir $5^\circ 9' 16''$ S a grados.

Ya tengo 5° . Reduzco los $9' 16''$ a s y después a grados.

$$9' \times 60 = 540''$$

$$540'' + 16'' = 556''$$

Estos 556'' tengo que reducirlos a grados, dividiéndolos entre los segundos que tiene un grado. Para saberlo, digo: 1° tiene 60' y 1' tiene 60'', luego un grado tiene $60 \times 60 = 3,600''$. Así que divido los 556'' entre 3,600 y tendré:

$$556'' = \frac{556''}{3,600} = \frac{139}{900}^\circ$$

Esta fracción de grado la sumo con los 5° del número dado y tengo:

$$5^\circ + \frac{139}{900}^\circ = 5\frac{139}{900}^\circ \quad \text{R.}$$

279

Reducir a incomplejo de la especie pedida:

Ejercicio

1. 3 cord. 8 v a cord.

R. $3\frac{1}{3}$ cord.

5. 3 cab. 300 cord.² 100 v² a cab. R. $3\frac{43,225}{46,656}$ cab.

2. 3 leg 8 cord. 4 v a cord.

R. $633\frac{1}{6}$ cord.

6. 4 mes. 200 v² a cord.² R. $25\frac{25}{72}$ cord.²

3. 2 leg 3 cord. 18 v a leg

R. $2\frac{9}{500}$ leg

7. 2 pipas 3 garraf. 20 bot. a garraf.

4. 1 cab 20 cord.² 500 v² a cord.² R. $344\frac{125}{144}$ cord.²

R. $51\frac{4}{5}$ garraf.

8. 5 v 2 pies 6 pulg a pies R. $17\frac{1}{2}$ pies
9. 7 v 10 pulg a pies R. $21\frac{5}{6}$ pies
10. 2 v 1 pie 2 lín a pulg R. $84\frac{2}{3}$ pulg
11. 12 v 3 pulg 6 lín a pulg R. $435\frac{1}{2}$ pulg
12. 7 v 2 pulg 4 lín a varas R. $7\frac{7}{108}$ v
13. 3 @ 8 lb 8 oz a lb R. $83\frac{1}{2}$ lb
14. 2 qq 3 @ 9 lb 6 oz a @ R. $11\frac{3}{8}$ @
15. 2 T 2 @ 10 oz a quintales R. $40\frac{81}{160}$ qq
16. 3 qq 9 lb 4 oz a quintales R. $3\frac{37}{400}$ qq
17. 2 y 2 pies 6 pulg a yardas R. $2\frac{5}{6}$ y
18. 2 furl 3 poles 4 y 4 pulg a poles R. $83\frac{149}{198}$ pol
19. 5 mill 40 yard 8 pulg a yardas R. $8,840\frac{2}{9}$ y
20. $5^{\circ} 6' 10''$ a minutos (S) R. $306\frac{1}{6}$ S
21. $23^{\circ} 40' 24''$ a minutos (S) R. $1,420\frac{2}{5}$ S
22. $14^{\circ} 50''$ a minutos (S) R. $840\frac{5}{6}$ S
23. $6^{\circ} 6' 6''$ a grados (S) R. $6\frac{61}{600}$ S
24. $5^{\circ} 6' 10''$ a minutos (C) R. $506\frac{1}{10}$ C
25. $23^{\circ} 40' 24''$ a minutos (C) R. $2,340\frac{6}{25}$ C
26. $14^{\circ} 50''$ a minutos (C) R. $1,400\frac{1}{2}$ C
27. $6^{\circ} 6' 6''$ a grados (C) R. $6\frac{303}{5,000}$ C
28. 9 días 6 horas 14 min a horas R. $222\frac{7}{20}$ h
29. 1 mes 4 días 30 min a horas R. $816\frac{1}{2}$ h
30. 2 meses 20 días 18 segundos a horas R. $1,920\frac{1}{200}$ h
31. 2 meses 15 días 16 segundos a días R. $75\frac{1}{5,400}$ días
32. 2 años 20 días 24 min a meses R. $24\frac{1,201}{1,800}$ meses
33. 8 meses 8 horas 8 minutos 8 segundos a meses R. $8\frac{3,661}{324,000}$ meses

REDUCCIÓN DE INCOMPLEJOS A DENOMINADOS

606

REDUCCIÓN DE UN INCOMPLEJO ENTERO DE ESPECIE INFERIOR A DENOMINADO

REGLA

Se reduce el número dado a la especie superior inmediata, dividiendo; el cociente que resulte se reduce a la especie superior inmediata; con el nuevo cociente se hace lo mismo y así sucesivamente. El denominado se forma con el último cociente y todos los residuos con sus especies respectivas.

Ejemplos

1) Reducir a denominado 123,121 segundos.

$$\begin{array}{r} 2052 \text{ min} \\ 60 \overline{) 123121 \text{ s}} \\ \underline{031} \\ 312 \\ \underline{121} \\ 01 \text{ s} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \text{ h} \\ 60 \overline{) 2052 \text{ min}} \\ \underline{252} \\ 12 \text{ min} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ d} \\ 24 \overline{) 34 \text{ h}} \\ \underline{10} \text{ h} \end{array}$$

$$123,121 \text{ s} = 1 \text{ d } 10 \text{ h } 12 \text{ min } 1 \text{ s} \quad \text{R.}$$

2) Reducir 10,126 líneas a denominado.

$$\begin{array}{r} 843 \text{ pulg} \\ 12 \overline{) 10126 \text{ lín}} \\ \underline{052} \\ 046 \\ \underline{10} \text{ lín} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \text{ pies} \\ 12 \overline{) 843 \text{ pulg}} \\ \underline{03} \text{ pulg} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \text{ v} \\ 3 \overline{) 70 \text{ pies}} \\ \underline{10} \\ 1 \text{ pie} \end{array}$$

$$10,126 \text{ lín} = 23 \text{ v } 1 \text{ pie } 3 \text{ pulg } 10 \text{ lín} \quad \text{R.}$$

280

Reducir a denominado:

Ejercicio

1. 121,207 s

R. 1 d 9 h 40 min 7 s

2. 8,197 días

R. 2 dec 2 a 9 m 7 d

3. 19,123 lb

R. 9 T 11 qq 23 lb

4. 873 @

R. 10 T 18 qq 1 @

5. 186,931 ad

R. 7 qq 1 @ 5 lb 3 oz 3 ad

6. 50,131" S

R. 13° 55' 13" S

7. 563 pulg

R. 15 v 1 pie 11 pulg

8. 37,932 oz

R. 1 T 3 qq 2 @ 20 lb 12 oz

- | | |
|-----------------------|--------------------------------------|
| 9. 1,097 h | R. 1 m 15 d 17 h |
| 10. 1,201 lín | R. 2 v 2 pies 4 pulg 1 lín |
| 11. 517 años | R. 5 siglos 1 década 1 lustro 2 años |
| 12. 10,800 puntos | R. 2 v 3 pulg |
| 13. 1,901' S | R. 31° 41' S |
| 14. 3,154" C | R. 31' 54" C |
| 15. 123,104" C | R. 12° 31' 4" C |
| 16. 3,410 yardas | R. 1 mill. 7 furl. 20 pol. |
| 17. 20,318" S | R. 5° 38' 38" S |
| 18. 180,180 pulg ing. | R. 2 mill. 6 furl. 30 pol. |

REDUCCIÓN DE UN INCOMPLEJO FRACCIÓN DE ESPECIE SUPERIOR A DENOMINADO

607

REGLA

Se reduce el quebrado a su especie inferior inmediata, multiplicándolo; se anota la parte entera y la fracción que resulte se reduce a la especie siguiente, y así sucesivamente hasta llegar a la última especie. Al llegar a ésta, se anotan el entero y el quebrado.

- 1) Reducir a denominador o valuar el quebrado $\frac{2}{7}$ de día.

Reducimos los $\frac{2}{7}$ de día a horas:

$$\frac{2}{7} \text{ día} \times 24 = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7} \text{ h} \quad 6 \text{ horas}$$

$\frac{6}{7}$ de hora lo reducimos a minutos:

$$\frac{6}{7} \text{ h} \times 60 = \frac{360}{7} = 51\frac{3}{7} \text{ min} \quad 51 \text{ minutos}$$

$\frac{3}{7}$ de minuto lo reducimos a segundos:

$$\frac{3}{7} \text{ min} \times 60 = \frac{180}{7} = 25\frac{5}{7} \text{ s} \quad 25\frac{5}{7} \text{ segundos}$$

Luego $\frac{2}{7}$ de día = 6 horas, 51 minutos, $25\frac{5}{7}$ segundos R.

Esta operación se llama *valuar una fracción*.

Ejemplos

2) Valuar $\frac{2}{5}$ de vara.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} v \times 3 &= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \text{ pie} && 1 \text{ pie} \\ \frac{1}{5} \text{ pie} \times 12 &= \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \text{ pulg} && 2 \text{ pulg} \\ \frac{2}{5} \text{ pulg} \times 12 &= \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ lín} && 4 \text{ lín} \\ \frac{4}{5} \text{ lín} \times 12 &= \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} \text{ puntos} && 9\frac{3}{5} \text{ puntos} \\ \frac{2}{5} \text{ de vara} &= 1 \text{ pie } 2 \text{ pulg } 4 \text{ lín } 9\frac{3}{5} \text{ puntos} && \text{R.} \end{aligned}$$

281

Reducir a denominado o valuar:

Ejercicio

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $\frac{1}{7}$ de hora | R. 8 min $34\frac{2}{7}$ s |
| 2. $\frac{8}{11}$ de año | R. 3 m 8 d 4 h 21 min $49\frac{1}{11}$ s |
| 3. $\frac{5}{13}$ de @ | R. 9 lb 9 oz 13 ad 1 tom $7\frac{5}{13}$ g |
| 4. $\frac{6}{17}$ de grado S | R. $21' 10\frac{10}{17}''$ S |
| 5. $\frac{5}{7}$ de libra | R. 11 oz 6 ad 2 tom $6\frac{6}{7}$ g |
| 6. $\frac{8}{19}$ de vara | R. 1 pie 3 pulg $1\frac{17}{19}$ lín |
| 7. $\frac{2}{3}$ de legua cubana | R. 138 cord 21 v 1 p |
| 8. $\frac{2}{9}$ de caballería | R. 72 cord. ² |
| 9. $\frac{5}{7}$ de día | R. 17 h 8 min $34\frac{2}{7}$ s |
| 10. $\frac{3}{5}$ de grado C | R. $60' C$ |
| 11. $\frac{7}{9}$ de pie | R. 9 pulg 4 lín |
| 12. $\frac{3}{8}$ de minuto | R. $22\frac{1}{2}$ s |
| 13. $\frac{5}{7}$ de yarda | R. 2 pies 1 pulg $8\frac{4}{7}$ lín |
| 14. $\frac{1}{19}$ de mes | R. 1 d 13 h 53 m $41\frac{1}{19}$ s |
| 15. $\frac{2}{11}$ de día | R. 4 h 21 min $49\frac{1}{11}$ s |

REDUCCIÓN DE UN INCOMPLEJO NÚMERO MIXTO DE ESPECIE SUPERIOR A DENOMINADO

608

REGLA

Con la parte entera se opera como en el primer caso, y con la fracción, como en el segundo.

Reducir $325\frac{2}{11}$ @ a denominado.

Primero reducimos a denominado las 325 @:

$$\begin{array}{r} 81 \text{ qq} \\ 4 \overline{) 325 \text{ @}} \\ \underline{05} \\ 1 \text{ @} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \text{ T} \\ 20 \overline{) 81 \text{ qq}} \\ \underline{1 \text{ qq}} \end{array}$$

Ahora reducimos los $\frac{2}{11}$ @ a denominado:

$$\frac{2}{11} \text{ @} \times 25 = \frac{50}{11} = 4\frac{6}{11} \text{ lb}$$

4 lb

$$\frac{6}{11} \text{ lb} \times 16 = \frac{96}{11} = 8\frac{8}{11} \text{ oz}$$

8 oz

$$\frac{8}{11} \text{ oz} \times 16 = \frac{128}{11} = 11\frac{7}{11} \text{ ad}$$

11 ad

$$\frac{7}{11} \text{ ad} \times 3 = \frac{21}{11} = 1\frac{10}{11} \text{ tom}$$

1 tom

$$\frac{10}{11} \text{ tom} \times 12 = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11} \text{ granos}$$

10 $\frac{10}{11}$ granos

$$\text{Luego } 325\frac{2}{11} \text{ @} = 4 \text{ T } 1 \text{ qq } 1 \text{ @ } 4 \text{ lb } 8 \text{ oz } 11 \text{ ad } 1 \text{ tom } 10\frac{10}{11} \text{ gran}$$

Ejemplo

Reducir a denominado:

1. $36\frac{2}{3}$ pulg

R. 1 v 8 lín

2. $18\frac{2}{5}$ lb

R. 18 lb 6 oz 6 ad 1 tom $2\frac{2}{5}$ g

3. $200\frac{3}{8}$ S

R. $3^{\circ} 20' 22\frac{1}{2}''$ S

4. $32\frac{3}{5}$ pies

R. 10 v 2 pies 7 pulg $2\frac{2}{5}$ lín

5. $200\frac{3}{8}$ C

R. $2^{\circ} 37\frac{1}{2}''$ C

282

Ejercicio

- | | |
|--------------------------------|---|
| 6. $108\frac{2}{7}$ pulg ing | R. 3 v $3\frac{3}{7}$ lín |
| 7. $1,023\frac{4}{7}$ lb | R. 10 qq 23 lb 9 oz 2 ad $10\frac{2}{7}$ g |
| 8. $503\frac{1}{13}$ h | R. 20 d 23 h 4 min $36\frac{12}{13}$ s |
| 9. $103\frac{2}{11}$ S | R. $1^{\circ} 43' 10\frac{10}{11}"$ S |
| 10. $5,608\frac{5}{7}$ días | R. 1 década 1 lustro 6 meses 28 días 17 horas 8 min $34\frac{2}{7}$ s |
| 11. $14\frac{2}{5}$ meses | R. 1 a 2 m 12 d |
| 12. $803\frac{2}{3}$ oz | R. 2 @ 3 oz 10 ad 2 tom |
| 13. $184\frac{3}{7}$ días | R. 6 meses 4 días 10 h 17 min $8\frac{4}{7}$ s |
| 14. $315\frac{3}{11}$ pulg ing | R. 8 yardas 2 pies 3 pulg $3\frac{3}{11}$ lín |
| 15. $16\frac{2}{15}$ adarmes | R. 1 oz $5\frac{7}{13}$ g |

SUMA DE DENOMINADOS

609

REGLA

Se colocan los denominados unos debajo de los otros de modo que las unidades de la misma especie se correspondan. Hecho esto, sumamos independientemente las unidades de cada especie, y terminada esta operación, vemos si las distintas especies contienen unidades de la especie superior inmediata, y en caso afirmativo, se las agregamos.

Ejemplos

- 1) Sumar 4 @ 9 libras 6 onzas 4 adarmes con 3 @ 8 libras 7 onzas 9 adarmes con 1 @ 9 libras 12 onzas 13 adarmes.

4 @	9 libras	6 onzas	4 adarmes
+ 3 "	8 "	7 "	9 "
1 "	9 "	12 "	13 "
<hr/>			
4 @	26 libras	25 onzas	26 adarmes

Suma reducida: 2 qq 1 @ 2 libras 10 onzas 10 adarmes. R.

- 2) Una persona nació el 5 de mayo de 1983. ¿En qué fecha cumplió 14 años, 6 meses y 28 días de edad?

A la fecha del nacimiento hay que sumarle la edad para hallar la fecha en que cumplió esa edad.

Para escribir la fecha del nacimiento se escriben los años y meses completos transcurridos y tendremos:

1,982 años	4 meses	5 días
+ 14 "	6 "	28 "
1,996 "	10 "	33 "

Suma reducida: 1,996 años 11 meses 3 días.

Esto significa que el día en que cumplió la edad habían transcurrido 1,996 años 11 meses y 3 días a partir del inicio de nuestra era.

Si han transcurrido 1,996 años, los 11 meses y 3 días son de 1997; si han transcurrido 11 meses completos ya ha pasado hasta el mes de noviembre inclusive de 1997, luego los 3 días son de diciembre, luego cumplió la edad dicha el **3 de diciembre de 1997.** R.

(En este ejercicio y en los demás de este capítulo las **medidas angulares son sexagesimales.**)

Sumar:

- 5 varas 2 pies 7 pulgadas; 3 varas 1 pie 9 pulgadas. R. 9 v 1 pie 4 pulg
- 9 varas 1 pie 6 pulgadas; 4 varas 2 pies 8 pulgadas; 2 varas 10 pulgadas. R. 16 v 2 pies
- 18 varas 3 pulgadas; 2 pies 5 pulgadas; 7 varas 11 pulgadas. R. 26 v 7 pulg
- 9 varas 6 pulgadas 8 líneas; 1 pie 9 pulgadas 10 líneas; 3 varas 9 líneas. R. 12 v 2 pies 5 pulg 3 lín
- 7 varas² 5 pies² 4 pulgadas²; 7 pies² 10 pulgadas² 14 líneas²; 1 vara² 28 pulgadas² 36 líneas².
R. 9 v² 3 p² 42 pulg² 50 lín²
- 8° 16' 45"; 19° 32' 56" R. 27° 49' 41"
- 43° 43' 44"; 23° 34'; 18° 40' 57" R. 86° 11' 15"
- 67° 39'; 22' 52"; 7° 48' R. 75° 11' 31"
- 2 T 3 qq 2 @; 2 qq 3 @ 18 libras; 1 @ 23 libras. R. 2 T 6 qq 3 @ 16 lb
- 2 qq 1 @ 15 libras 6 onzas; 2 @ 11 libras 7 onzas; 14 libras 6 onzas 2 adarmes.
R. 3 qq 16 lb 3 oz 2 ad
- 5 T 17 libras 18 onzas; 3 qq 7 libras 12 onzas 4 adarmes; 3 @ 13 libras 14 adarmes.
R. 5 T 4 qq 13 lb 15 oz 2 ad
- 134 libras; 14 onzas 12 adarmes 2 tomines; 8 libras; 15 adarmes 1 tomín.
R. 1 qq 1 @ 17 lb 15 oz 12 ad
- 3 días 6 horas 23 minutos; 5 días 9 horas 56 minutos; 9 días 12 horas 48 minutos.
R. 18 días 5 h 7 min
- 2 años 7 meses 24 días 17 horas; 7 años 27 días 14 horas; 9 meses 14 días 19 horas.
R. 10 a 6 m 7 d 2 h
- 4 meses 17 días; 9 días 17 horas 45 minutos; 56 minutos 59 segundos; 54 segundos.
R. 4 mes 26 d 18 h 42 min 53 s
- 5 furlongs 20 poles 3 yardas; 4 furlongs 14 poles 4 yardas; 30 poles 5 yardas.
R. 1 mill. 2 f 26 p 1 y
- Un padre tiene tres hijos cuyas edades son: la del mayor, 15 años 5 meses y 6 días; la del segundo, 7 años 4 meses y 8 días, y la del tercero, 4 años 18 días. ¿Cuánto suman las tres edades?
R. 26 a 10 m 2 d

18. Un comerciante hace tres pedidos de efectos. El 1° de 4 T 4 qq 2 @ 8 libras 5 adarmes; el 2° de 1 T 14 qq 9 libras 14 onzas 4 adarmes; el 3° de 1,234 libras. ¿Cuánto ha pedido en total?
R. 6 T 11 qq 1 lb 14 oz 9 ad
19. Hallar la suma de cuatro ángulos cuyos valores respectivos son: $21^{\circ} 35' 43''$; $19^{\circ} 59' 47''$; $39^{\circ} 54'$ y $51' 38''$ **R. $82^{\circ} 21' 8''$**
20. Una cinta de 2 varas 1 pie 11 pulgadas 6 líneas de longitud, se une con otras dos de 3 varas 2 pies 6 pulgadas 4 líneas y 1 vara 2 pies 8 pulgadas, respectivamente. ¿Cuál será la longitud de la cinta que resulte? **R. 8 v 1 pie 1 pulg 10 lín**
21. Una persona nació el 17 de junio de 1950 y al morir tenía 56 años 5 meses y 14 días de edad. Hallar la fecha de su muerte. **R. 1 de diciembre de 2006**
22. Si una persona nació el 22 de octubre de 1979, ¿en qué fecha cumplió 26 años, 9 meses y 14 días? **R. 6 de agosto de 2006**
23. Una persona que nació el 22 de agosto de 1985, se graduó de abogado cuando tenía 21 años 1 mes y 17 días de edad. ¿En qué fecha se graduó de abogado? **R. 9 de octubre de 2006**
24. Una muchacha nació el 15 de septiembre de 1986, se casó cuando tenía 18 años 4 meses y 20 días de nacida y tuvo el primer hijo, 1 año 2 meses y 3 días después de casada. ¿En qué fecha nació su hijo? **R. 8 de abril de 2006**

RESTA DE DENOMINADOS

610

REGLA

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo de modo que las unidades de la misma especie se correspondan. Hecho esto, se restan las distintas especies independientemente, empezando por la inferior. Si algún sustraendo parcial es mayor que el minuendo, se le agrega una unidad de la especie superior inmediata para que la resta sea posible, teniendo cuidado de restar dicha unidad al minuendo siguiente.

Ejemplos

- 1) Restar 4 días 8 horas 20 minutos 18 segundos de 10 días 7 horas 15 minutos 16 segundos.

$\begin{array}{r} 9 \\ \cancel{10} \text{ días} \\ - 4 \text{ " } \\ \hline 5 \text{ días} \end{array}$	$\begin{array}{r} 30 \\ \cancel{6} \\ \cancel{7} \text{ horas} \\ - 8 \text{ " } \\ \hline 22 \text{ horas} \end{array}$	$\begin{array}{r} 74 \\ \cancel{14} \\ \cancel{15} \text{ min} \\ - 20 \text{ " } \\ \hline 54 \text{ min} \end{array}$	$\begin{array}{r} 76 \\ \cancel{16} \text{ s} \\ - 18 \text{ " } \\ \hline 58 \text{ s} \end{array}$	R.
---	--	---	--	-----------

- 2) Hallar el complemento de un ángulo de $67^{\circ} 34' 54''$.

Tenemos que restar este ángulo de 90° :

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} \\ - 67^{\circ} \quad 34' \quad 54'' \\ \hline \end{array}$$

Ahora, de los 90° quitamos un grado que tiene 60 quedándonos 89° ; de los $60'$ quitamos un minuto que tiene 60" y nos quedan $59'$ y restamos:

$$\begin{array}{r} 89^\circ \quad 59' \quad 60'' \\ - 67^\circ \quad 34' \quad 54'' \\ \hline 22^\circ \quad 25' \quad 6'' \end{array} \quad \text{R.}$$

- 3) Una persona nació el 7 de marzo de 1926 y murió el 3 de agosto de 1956. ¿Qué edad tenía al morir?

Se escribe la fecha en que murió, 3 de agosto de 1956, y debajo la fecha en que nació, 7 de marzo de 1926, restándose dichas fechas, en esta forma:

$$\begin{array}{r} 1956 \text{ años} \quad 7 \text{ meses} \quad 33 \text{ días} \\ - 1926 \text{ " } \quad 3 \text{ " } \quad 7 \text{ " } \\ \hline 30 \text{ años} \quad 4 \text{ meses} \quad 26 \text{ días} \end{array}$$

Tenía al morir **30 años, 4 meses y 26 días.** R.

1. De 5 varas 2 pies 3 pulgadas, restar 2 varas 1 pie 5 pulgadas. R. 3 v 10 pulg
2. De 11 varas 1 pie 6 pulgadas 10 líneas restar 2 varas 2 pies 8 pulgadas 9 líneas. R. 8 v 1 pie 10 pulg 1 lín
3. De 8 varas 8 pulgadas, restar 2 pies 5 pulgadas 7 líneas. R. 7 v 1 pie 2 pulg 5 lín
4. De 89 varas restar 17 varas 11 pulgadas 9 líneas. R. 71 v 2 pies 3 lín
5. De 5 varas² 9 pulgadas² 120 líneas² restar 7 pies² 44 pulgadas² 132 líneas². R. 4 v² 1 pie² 108 pulg² 132 lín²
6. De $45^\circ 35' 45''$ restar $23^\circ 58' 49''$. R. $21^\circ 36' 56''$
7. De $120^\circ 14' 42''$ restar $57^\circ 48''$. R. $119^\circ 16' 54''$
8. De $75^\circ 26''$ restar $29^\circ 35' 46''$. R. $45^\circ 24' 40''$
9. De 90° restar $18^\circ 37' 51''$. R. $71^\circ 22' 9''$
10. De 114° restar $78^\circ 16' 34''$. R. $35^\circ 43' 26''$
11. De 4 @ 15 libras 14 onzas restar 1 @ 18 libras 15 onzas. R. 2 @ 21 lb 15 oz
12. De 17 libras 9 onzas 13 adarmes restar 15 onzas 14 adarmes 2 tomines. R. 16 lb 9 oz 14 ad 1 tom
13. De 2 T 3 @ 11 onzas, restar 2 qq 1 @ 7 libras 9 onzas. R. 1 T 18 qq 1 @ 18 lb 2 oz
14. De 5 días 12 horas 34 minutos restar 2 días 15 horas 56 minutos. R. 2 d 20 h 38 min
15. De 7 meses 9 días 18 horas 23 segundos restar 10 días 22 horas 7 minutos 46 segundos. R. 6 meses 28 días 19 h 52 min 37 s
16. De 9 años 6 meses 27 días restar 29 días 13 horas 45 minutos 23 segundos. R. 9 años 5 meses 27 días 10 horas 14 minutos 37 segundos

17. De una cinta de 5 varas 2 pies 3 pulgadas se corta un pedazo de 2 varas 1 pie 11 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la parte que queda? **R. 3 v 4 pulg**
18. Si de una circunferencia se quita un arco de $93^{\circ} 53' 19''$, ¿cuál es el valor del arco que queda? **R. $266^{\circ} 6' 41''$**
19. Una persona nació el 5 de marzo de 1949 y murió el 4 de abril de 1966. ¿Qué edad tenía al morir? **R. 17 años 29 días**
20. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde que Colón descubrió América, el 12 de octubre de 1492?
21. ¿Cuánto tiempo hace que se constituyó la República Cubana, sabiendo que la fecha fue el 20 de mayo de 1902?
22. Una persona cumplió 69 años, 4 meses, 20 días el 8 de noviembre de 2006. ¿En qué fecha nació? **R. 18 de junio de 1937**
23. Hallar el complemento de un ángulo de $34^{\circ} 56' 49''$. **R. $55^{\circ} 3' 11''$**
24. Hallar el suplemento de un ángulo de $112^{\circ} 54' 58''$. **R. $67^{\circ} 5' 2''$**
25. Un hombre que nació el 6 de julio de 1979, terminó su carrera el 25 de junio de 2006. ¿Qué edad tenía al terminar la carrera? **R. 26 años 11 meses 19 días**
26. Si una persona cumplió 17 años 7 meses y 26 días el 14 de septiembre de 2006, ¿en qué fecha nació? **R. 18 de enero de 1989**

SUMA Y RESTA COMBINADAS DE DENOMINADOS

285

Ejercicio

1. De la suma de 4 varas 2 pies 7 pulgadas con 5 varas 1 pie 10 pulgadas, restar 6 varas 2 pies 8 pulgadas. **R. 3 v 1 pie 9 pulg**
2. De la suma de 14 varas 7 pulgadas con 4 varas 11 pulgadas, restar 12 varas 2 pies 9 pulgadas. **R. 5 v 1 pie 9 pulg**
3. De 9 varas 10 pulgadas, restar la suma de 2 varas 1 pie 6 pulgadas con 3 varas 2 pies 10 pulgadas. **R. 2 v 2 pies 6 pulg**
4. De la suma de 7 varas 1 pie 8 pulgadas con 11 varas 7 pulgadas, restar la suma de 4 varas 1 pie 4 pulgadas con 5 varas 9 pulgadas. **R. 9 v 2 pulg**
5. De $78^{\circ} 6' 57''$, restar la suma de $24^{\circ} 43' 48''$ con $10^{\circ} 10' 20''$. **R. $43^{\circ} 12' 49''$**
6. De la suma de $32^{\circ} 45' 26''$ con $18^{\circ} 19' 51''$ restar $42^{\circ} 59''$. **R. $9^{\circ} 4' 18''$**
7. De la suma de $8^{\circ} 16'$ con $71^{\circ} 53' 34''$ restar la suma de $45^{\circ} 45' 45''$ con $7^{\circ} 39' 38''$. **R. $26^{\circ} 44' 11''$**
8. De 2 qq 3 @ 17 libras 6 onzas, restar la suma de 14 libras 7 onzas con 1 @ 20 libras 15 onzas. **R. 2 qq 1 @ 7 lb**
9. De la suma de 3 T 1 @ 17 libras con 2 qq 2 @ 14 libras 7 onzas, restar la suma de 1 T 3 qq 2 @ 14 libras con 19 libras 8 onzas. **R. 1 T 19 qq 22 lb 15 oz**
10. De 2 años 7 meses 23 días, restar la suma de 11 meses 24 días 23 horas con 2 meses 8 días 16 horas 43 minutos. **R. 1 año 5 meses 19 días 8 horas 17 minutos**

11. Restar 9 meses 18 horas 23 minutos 45 segundos de la suma de 1 año 8 meses 32 segundos con 9 meses 17 días 13 horas 17 minutos. **R. 1 año 8 meses 16 días 18 horas 53 minutos 47 segundos**
12. Restar la suma de 2 años con 1 año 7 meses 24 minutos de la suma de 5 años 2 meses 17 horas 14 minutos con 23 horas 16 minutos. **R. 1 año 7 meses 1 día 16 horas 6 minutos**
13. De 90° restar la suma de $45^\circ 45' 56''$ con $7^\circ 23' 56''$. **R. $36^\circ 50' 8''$**
14. De 180° restar la suma de $17^\circ 56' 43''$ con $10^\circ 10' 19''$. **R. $151^\circ 52' 58''$**
15. De 7 años restar la suma de 2 años 5 meses 20 días con 3 meses 14 días. **R. 4 años 2 meses 26 días**
16. De 5 T restar la suma de 2 T 1 qq 3 @ 18 libras con 2 @ 10 libras 14 onzas 7 adarmes. **R. 2 T 17 qq 1 @ 21 lb 1 oz 9 ad**
17. La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180° y dos de ellos valen, respectivamente, $78^\circ 45' 34''$ y $23^\circ 21' 39''$. ¿Cuánto vale el tercer ángulo? **R. $77^\circ 52' 47''$**
18. Hallar el complemento de la suma de 2 ángulos de $17^\circ 61'$ y $41^\circ 54' 59''$. **R. $30^\circ 4' 1''$**
19. Un comerciante hace un pedido de 5 T 3 qq 2 @ 23 libras de mercancías y le mandan primero 2 T 2 qq 15 libras 8 onzas y más tarde 1 T 3 @ 14 libras. ¿Cuánto falta por enviarle? **R. 2 T 2 @ 18 lb 8 oz**
20. La edad de Juan es 60 años y las de sus tres hijos 14 años 7 meses 6 días; 12 años 8 días y 10 años 8 meses. ¿Cuánto falta a la suma de las edades de los hijos para igualar la edad del padre? **R. 22 años 8 meses 16 días**
21. Un alumno hizo el examen de ingreso al bachillerato cuando tenía 13 años 4 meses y 20 días de edad, y lo terminó 4 años 3 meses y 6 días después. Si terminó el 14 de septiembre de 2006, ¿en qué fecha había nacido? **R. 18 de enero de 1989**
22. María se casó cuando tenía 19 años 8 meses y 3 días de edad, y tuvo su primer hijo al año 2 meses y 20 días de casada. El niño cumplió 5 años 6 meses y 9 días el día 1° de mayo de 2006. ¿En qué fecha nació María? **R. 29 de noviembre de 1979**
23. El padre de Miguel murió a los 65 años 7 meses y 4 días de edad. Miguel nació cuando su padre tenía 23 años 2 meses y 17 días; y se casó a los 27 años y 15 días. El primer hijo de Miguel, Guillermo, nació a los 11 meses y 20 días de casado Miguel. Guillermo cumplió 7 años 8 meses y 9 días el 18 de agosto de 2006. ¿Qué día nació el padre de Miguel y cuántos años tenía Guillermo cuando él murió? **R. 17 de septiembre de 1947; 14 años 4 meses 12 días**

MULTIPLICACIÓN DE DENOMINADOS

611

Hallar el quíntuple de un ángulo de $18^\circ 39' 43''$.

Hay que multiplicar este denominado por 5. Para ello, se multiplica cada una de las especies del denominado por 5 y después se hace la reducción de cada especie a la especie superior:

	18°	$39'$	$43''$	
			$\times 5$	
	90°	$195'$	$215''$	
Producto reducido:	93°	$18'$	$35''$	R.

612 A \$0.50 la libra de mercancía, ¿cuánto cuestan 3 @ 8 lb 8 oz?

Como nos dan el precio de una libra, debemos reducir 3 @ 8 lb 8 oz a libras:

$$3 @ \times 25 = 75 \text{ lb}$$

$$75 \text{ lb} + 8 \text{ lb} = 83 \text{ lb}$$

$$8 \text{ oz} = \frac{8}{16} \text{ lb} = \frac{1}{2} \text{ lb}$$

$$83 \text{ lb} + \frac{1}{2} \text{ lb} = 83\frac{1}{2} \text{ lb}$$

Entonces, si una libra cuesta \$0.50, $83\frac{1}{2} \text{ lb}$ costarán:

$$\text{\$}0.50 \times 83\frac{1}{2} = \text{\$}41.75 \quad \text{R.}$$

613 Un móvil recorre 8 varas 1 pie 3 pulgadas en 1 segundo. ¿Cuánto recorrerá en 3 minutos 8 segundos?

Como me dan lo que el móvil recorre en 1 s debo reducir los 3 min 8 s a segundos:

$$3 \text{ min} \times 60 = 180 \text{ s}$$

$$180 \text{ s} + 8 \text{ s} = 188 \text{ s}$$

Ahora, si en 1 s el móvil recorre 8 v 1 pie 3 pulgadas en 188 s recorrerá:

8 v	1 pie	3 pulg
×		188
1,504 v	188 pies	564 pulg

Producto reducido: **1,582 v 1 pie** **R.**

286**Ejercicio**

1. Una persona recorre 25 varas 2 pies 9 pulgadas en 1 minuto. ¿Cuánto recorrerá en 8 minutos?
R. 207 v 1 pie
2. Si un móvil recorre 4 varas 1 pie 7 pulgadas 10 líneas en 1 segundo, ¿cuánto recorrerá en $\frac{2}{5}$ de minuto?
R. 109 v 8 pulg
3. Un móvil recorre 15 varas 8 pulgadas 3 líneas en 1 segundo. ¿Cuánto recorrerá en 2 minutos 5 segundos?
R. 1,903 v 1 pie 11 pulg 3 lín
4. Un ángulo vale $23^\circ 56' 58''$. ¿Cuánto valdrá el triple de ese ángulo?
R. $71^\circ 50' 54''$
5. ¿Cuál es el séxtuplo de un ángulo de $72^\circ 34' 56''$?
R. $435^\circ 29' 36''$
6. Si con \$20 pueden comprarse 2 libras 7 onzas y 4 adarmes de una mercancía, ¿cuánto podrá adquirirse con \$120?
R. 14 lb 11 oz 8 ad

7. Un mecanógrafo ha empleado 3 horas, 16 minutos 18 segundos en hacer un trabajo. ¿Cuánto tiempo necesitará para hacer una tarea 7 veces mayor? **R. 22 h 54 min 6 s**
8. A \$60 el pie de madera, ¿cuánto importarán 7 pies 10 pulgadas? **R. \$470**
9. A \$25 la @ de una mercancía, ¿cuánto importarán 3 T 5 qq 3 @ y 6 libras? **R. \$6,581**
10. Hallar el doble de la suma de dos ángulos de $54^{\circ} 56' 58''$ y $31^{\circ} 34' 38''$. **R. $173^{\circ} 3' 12''$**
11. Hallar el quíntuple del complemento de un ángulo de $72^{\circ} 37' 56''$. **R. $86^{\circ} 50' 20''$**
12. Un comerciante hace tres pedidos de efectos. El 1° de 3 @ 17 libras 8 onzas; el 2° de 2 qq y el 3° de 1 T 2 qq 4 onzas. ¿Cuánto importarán los tres pedidos a \$0.18 la libra? **R. \$448.695**
13. La tercera parte de la distancia entre dos puntos es 48 varas 2 pies 8 pulgadas 5 líneas. ¿Cuál será dicha distancia? **R. 146 v 2 pies 1 pulg 3 lín**
14. La distancia que ha recorrido un móvil es el cuádruple de la diferencia entre 78 varas 1 pie 9 pulgadas y 35 varas 2 pies 11 pulgadas. Hallar la distancia recorrida por el móvil.
R. 170 v 1 pie 4 pulg

DIVISIÓN DE DENOMINADOS

Se reparten 4 T 3 @ 18 lb de alimentos entre 3 asilos en partes iguales. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

614

Tenemos que dividir el denominado entre 3. Para ello se divide entre 3 cada una de las especies, teniendo cuidado de reducir cada resto a la especie siguiente y sumarlo a dicha especie:

1 T	6 qq	3 @	22 lb	$10\frac{2}{3}$ oz
3 4 T	20 qq	3 @	18 lb	32 oz
1 T	2 qq	+ 8 @	+ 50 lb	2 oz
$\times 20$	$\times 4$	11 @	68 lb	
20 qq	8 @	2 @	08	
		$\times 25$	2 lb	
		50 lb	$\times 16$	
			32 oz	

A cada uno corresponde **1 T 6 qq 3 @ 22 lb $10\frac{2}{3}$ oz** **R.**

Se compran 8 lb 4 oz de una mercancía por \$6.60. ¿A cómo sale la onza?

615

Como nos piden el precio de una onza debemos reducir el denominado a onzas:

$$8 \text{ lb} \times 16 = 128 \text{ oz}$$

$$128 \text{ oz} + 4 \text{ oz} = 132 \text{ oz}$$

Ahora, si 132 onzas han costado \$6.60 la onza sale a:

$$\$6.60 \div 132 \text{ oz} = \text{\textbf{\$0.05}}$$
 R.

616 Si una persona anda 300 v 2 pies 5 pulg en 3 min 6 s, ¿cuánto anda por segundo?

Reduzco los 3 min 6 s a segundos:

$$3 \text{ min} \times 60 = 180 \text{ s}$$

$$180 \text{ s} + 6 \text{ s} = 186 \text{ s}$$

Si en 186 s la persona anda 300 v 2 pies 5 pulg para saber lo que anda en 1 s tengo que dividir este denominador entre 186:

1 v	1 pies	10 pulg	$2\frac{20}{31}$ lín
186 $\overline{)300 \text{ v}}$	2 pies	5 pulg	492 lín
114 v	+ 342 pies	+ 1,896 pulg	120 lín
$\times 3$	344 pies	1,901 pulg	
342 pies	158 pies	41 pulg	
	$\times 12$	$\times 12$	
	316	82	
	158	41	
	<u>1,896</u>	<u>492 lín</u>	

287

Ejercicio

- Seis ángulos iguales suman $1,345^\circ 23' 57''$ ¿Cuánto vale cada ángulo? **R. $224^\circ 13' 59\frac{1}{2}''$**
- El triple de un ángulo es $137^\circ 56' 42''$. Hallar el ángulo. **R. $45^\circ 58' 54''$**
- Un ángulo vale $109^\circ 45''$. ¿Cuánto valdrá su cuarta parte? **R. $27^\circ 15' 11\frac{1}{4}''$**
- Una distancia de 1,234 varas 2 pies 11 pulgadas se quiere recorrer en tres jornadas iguales. ¿Cuánto se andará en cada una? **R. 411 v 1 pies 11 pulg 8 lín**
- ¿Cuál será la sexta parte de una varilla de 7 pies 8 pulgadas 4 líneas de longitud?
R. 1 pies 3 pulg $4\frac{2}{3}$ lín
- De un pedido de 3 @ 18 libras 7 onzas se envía la quinta parte. ¿Cuánto falta por enviar?
R. 2 @ 24 lb 12 oz
- Se quieren repartir 5 T 17 libras 3 adarmes de alimentos entre 15 personas. ¿Cuánto corresponderá a cada una? **R. 6 qq 2 @ 17 lb 12 oz 13 ad**
- Tres personas tienen la misma edad y la suma de las tres edades es 61 años 18 días. Hallar la edad común. **R. 20 años 4 meses 6 días**
- ¿Cuál será la mitad del complemento de un ángulo de $18^\circ 19' 19''$? **R. $35^\circ 50' 20\frac{1}{2}''$**
- De las 7 libras 6 onzas 5 adarmes de alimentos que tenía Pedro, separó para sí 2 libras 8 onzas y el resto lo dividió en partes iguales entre tres pobres. ¿Cuánto correspondió a cada uno?
R. 1 lb 10 oz 1 ad 2 tom
- ¿Cuál será el quinto del suplemento de la suma de dos ángulos de $45^\circ 54' 35''$ y $19^\circ 42' 38''$?
R. $22^\circ 52' 33\frac{2}{5}''$
- Se vende en 500 dólares una cadena de plata de 18 varas 2 pies 8 pulgadas de longitud. ¿A cómo sale la vara? **R. $26\frac{8}{17}$ dólares**

13. En una circunferencia, un arco de $12^\circ 25' 36''$ tiene una longitud de 36 cm. ¿Cuál es la longitud correspondiente a cada minuto? **R. $\frac{45}{932}$ cm**
14. Un móvil anda 300 v 8 pulg en 1 minuto 20 segundos. ¿Cuánto anda por segundo? **R. 3 v 2 pies 3 pulg $1\frac{1}{5}$ lin**
15. Si un móvil recorre 5,000 v 1 pie en 3 minutos 20 segundos, ¿cuál es su velocidad por segundo? **R. 25 v $\frac{18}{25}$ lin**

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN COMBINADAS

Si un móvil recorre 8 v 2 pies 6 pulg en 3 min 6 s, ¿cuánto recorrerá en 5 minutos?

617

Reducimos 8 v 2 pies 6 pulg a pulgadas:

$$\begin{array}{ll} 8 \text{ v} \times 3 = 24 \text{ pies} & 24 \text{ pies} + 2 \text{ pies} = 26 \text{ pies} \\ 26 \text{ pies} \times 12 = 312 \text{ pulg} & 312 \text{ pulg} + 6 \text{ pulg} = 318 \text{ pulg} \end{array}$$

Reducimos 3 min 6 s a segundos:

$$3 \text{ min} \times 60 = 180 \text{ s} \qquad 180 \text{ s} + 6 \text{ s} = 186 \text{ s}$$

Reducimos los 5 minutos a segundos:

$$5 \text{ min} \times 60 = 300 \text{ s}$$

El problema queda reducido a lo siguiente:

Si un móvil recorre 318 pulg en 186 s, ¿cuánto recorrerá en 300 s?

Si en 186 s recorre 318 pulg en 1 s recorrerá: $\frac{318}{186}$ pulg y en 300 s recorrerá $\frac{318 \times 300}{186}$

$$\text{pulg} = 512\frac{28}{31} \text{ pulg}$$

Reduciendo este número a denominador, tenemos:

$$14 \text{ v } 8 \text{ pulg } 10\frac{26}{31} \text{ líneas} \quad \text{R.}$$

Un móvil recorre 8 v 3 pulg en $\frac{3}{5}$ de min. ¿Cuánto recorrerá en $\frac{3}{4}$ de hora?

618

Reducimos 8 v 3 pulg a pulg:

$$\begin{array}{l} 8 \text{ v} \times 36 = 288 \text{ pulg} \\ 288 \text{ pulg} + 3 \text{ pulg} = 291 \text{ pulg} \end{array}$$

Reducimos los $\frac{3}{5}$ de minuto a segundos:

$$\frac{3}{5} \text{ min} \times 60 = \frac{180}{5} = 36 \text{ s}$$

Reducimos los $\frac{3}{4}$ de hora a segundos:

$$\frac{3}{4} \text{ h} \times 3,600 = \frac{10,800}{4} = 2,700 \text{ s}$$

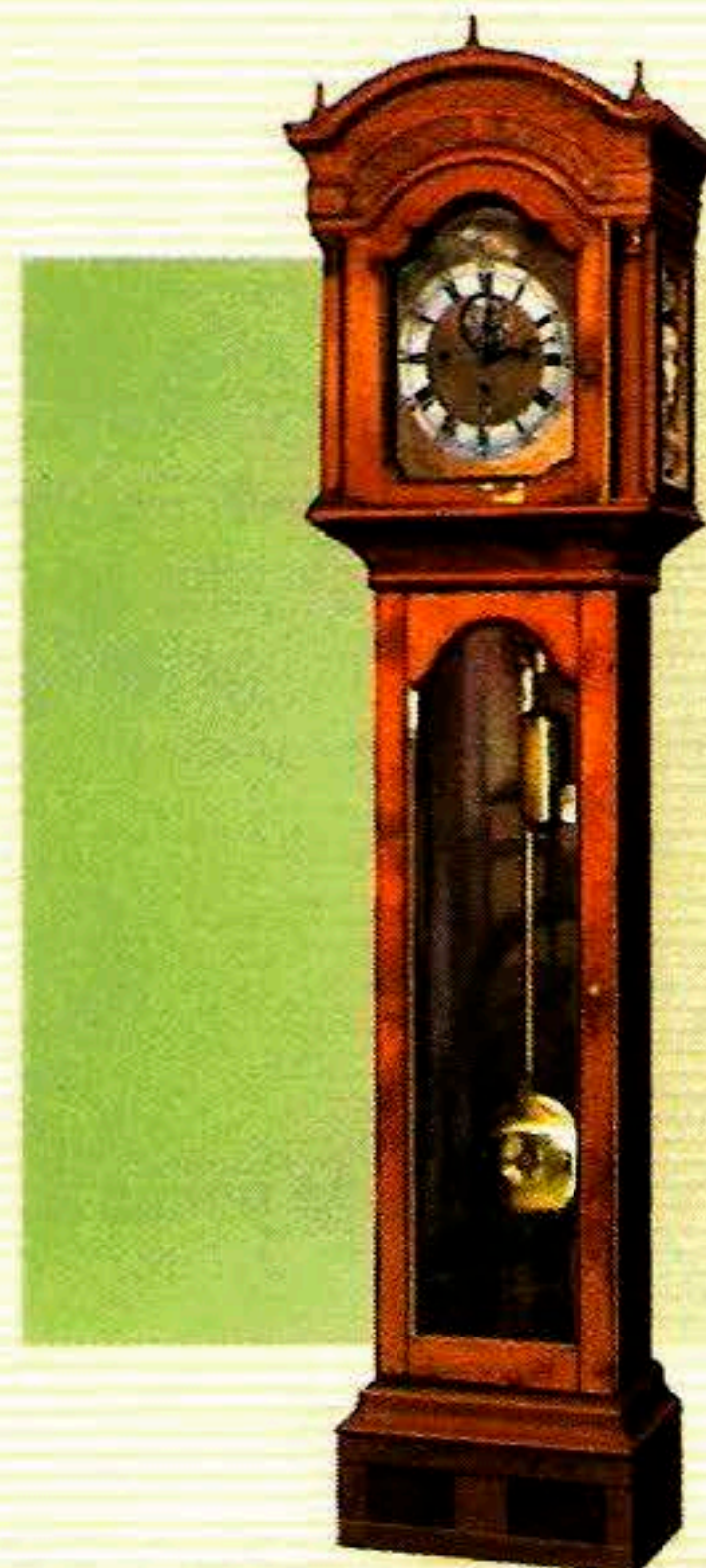
El problema queda reducido a lo siguiente:

Un móvil recorre 291 pulg en 36 s. ¿Cuánto recorrerá en 2,700 s?

Si en 36 s recorre 291 pulg en 1 s recorrerá $\frac{291}{36}$ pulg y en 2,700 s recorrerá $\frac{291 \times 2,700}{36}$ pulg = 21,825 pulg = **606 v 9 pulg** **R.**

288
Ejercicio

1. Un móvil recorre 5 varas 2 pies 8 pulgadas en 3 segundos. ¿Cuánto recorrerá en $\frac{3}{4}$ de minuto? **R. 88 v 1 pie**
2. Un móvil recorre 50 varas 1 pie 11 pulgadas en 12 minutos 6 segundos. ¿Qué distancia andará en $\frac{2}{5}$ de minuto? **R. 1 v 2 pies $3\frac{21}{121}$ lín**
3. Si un móvil anda 8 varas 9 pulgadas en $\frac{9}{20}$ de minuto, ¿cuánto andará en $\frac{1}{3}$ de hora? **R. 366 v 2 p**
4. Para tejer 15 varas 8 pulgadas una obrera emplea 4 horas 15 minutos 18 segundos. ¿Qué tiempo empleará en tejer $\frac{2}{3}$ de vara? **R. 11 min $10\frac{118}{137}$ s**
5. Un móvil recorre en $\frac{2}{5}$ de minuto una distancia de 1 cordel 14 varas. ¿Cuánto recorrerá en $\frac{3}{10}$ de hora? **R. 71 c 6 v**
6. Un arco de $8^{\circ} 9' 10''$ tiene una longitud de 9 dm 5 cm. ¿Cuál será la longitud de otro arco de $2^{\circ} 14''$ en la misma circunferencia? **R. 2 dm 3 cm 3.502 mm**
7. La sexta parte de un ángulo vale $10^{\circ} 9' 8''$. ¿Cuánto valdrán los $\frac{3}{4}$ de dicho ángulo? **R. $45^{\circ} 41' 6''$**
8. En $\frac{1}{6}$ de hora un hombre camina una distancia de 128 varas 2 pies 6 pulgadas. ¿Cuánto recorrerá en 2 horas 16 segundos? **R. 1,549 v 1 pie 3 pulg $8\frac{4}{25}$ lín**
9. Se compran 4 @ 3 libras 12 onzas de una mercancía por \$450. ¿Cuánto importarán $\frac{2}{5}$ de arroba de la misma mercancía? **R. \$43.4**



Los antiguos tropezaban con muchas dificultades para determinar la longitud. En el siglo II d. C., **Ptolomeo** estableció la longitud aproximada de cinco o seis ciudades, tomando como referencia a Alejandría. El descubrimiento del sextante

permitió a los marinos determinar la longitud exacta durante la navegación. A fines del siglo XVII, y partiendo de los descubrimientos de Galileo, el holandés **Huygens** construyó los primeros relojes de péndulo, de gran precisión.

Capítulo **XL**

LONGITUD Y TIEMPO

MERIDIANO es un círculo máximo (Fig. 74) que pasa por los polos de la Tierra y corta perpendicularmente al Ecuador.

Cada punto o lugar de la Tierra tiene su meridiano.

Figura 74

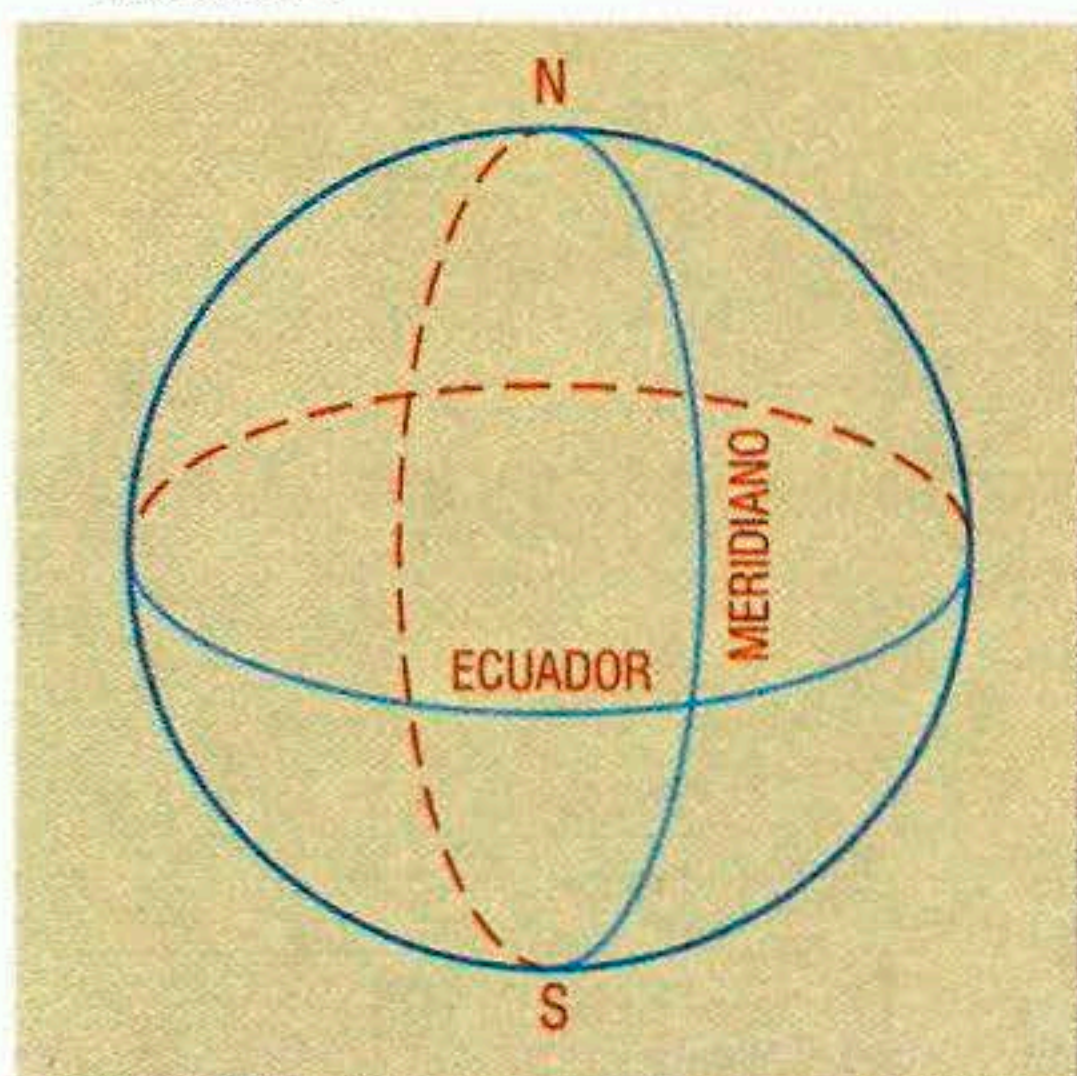
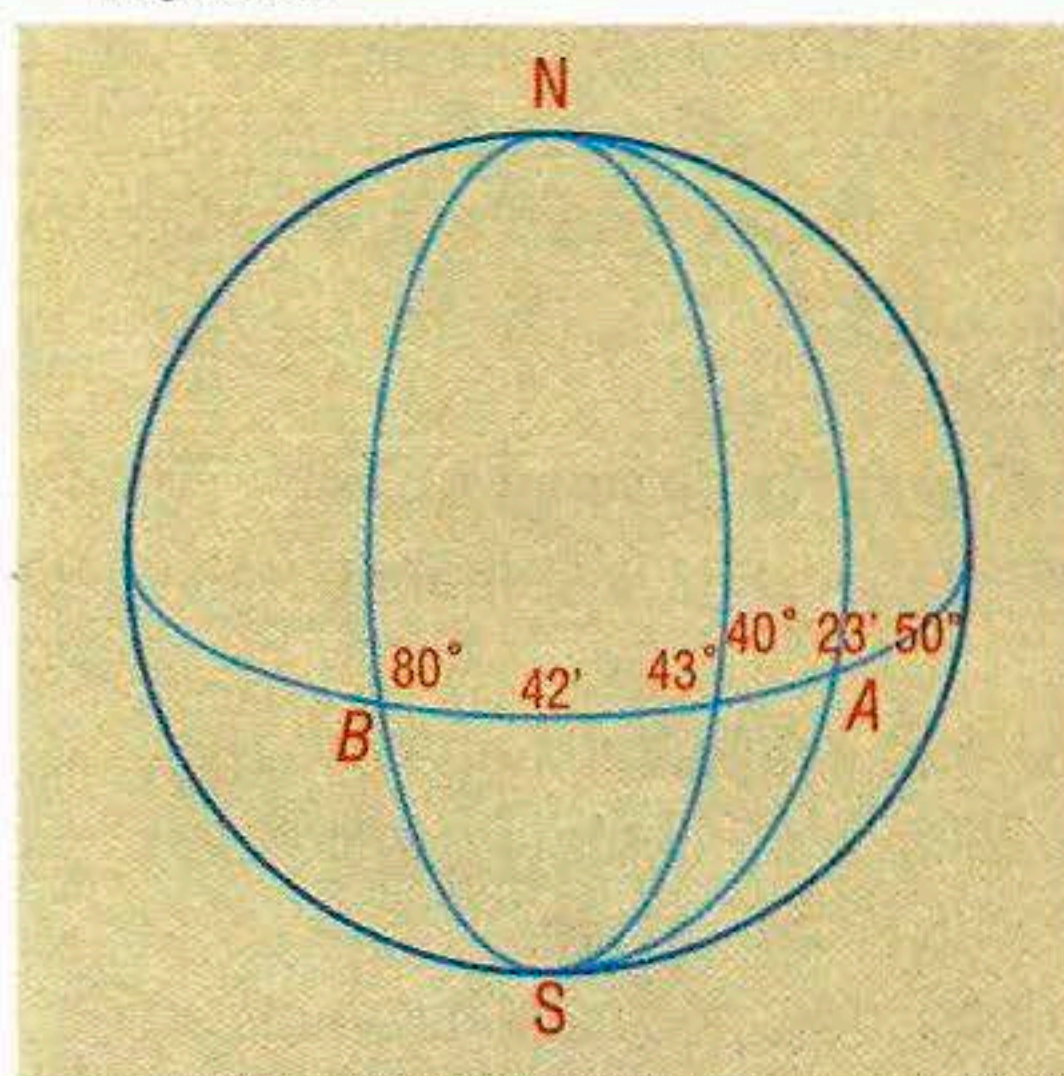


Figura 75



LONGITUD de un punto o lugar de la Tierra es la distancia de este punto al primer meridiano.

Primer meridiano es el meridiano de un lugar escogido para referir a él todas las longitudes. El primer meridiano aceptado generalmente es el que pasa por Greenwich, cerca de Londres.

La longitud se mide en grados, minutos y segundos.

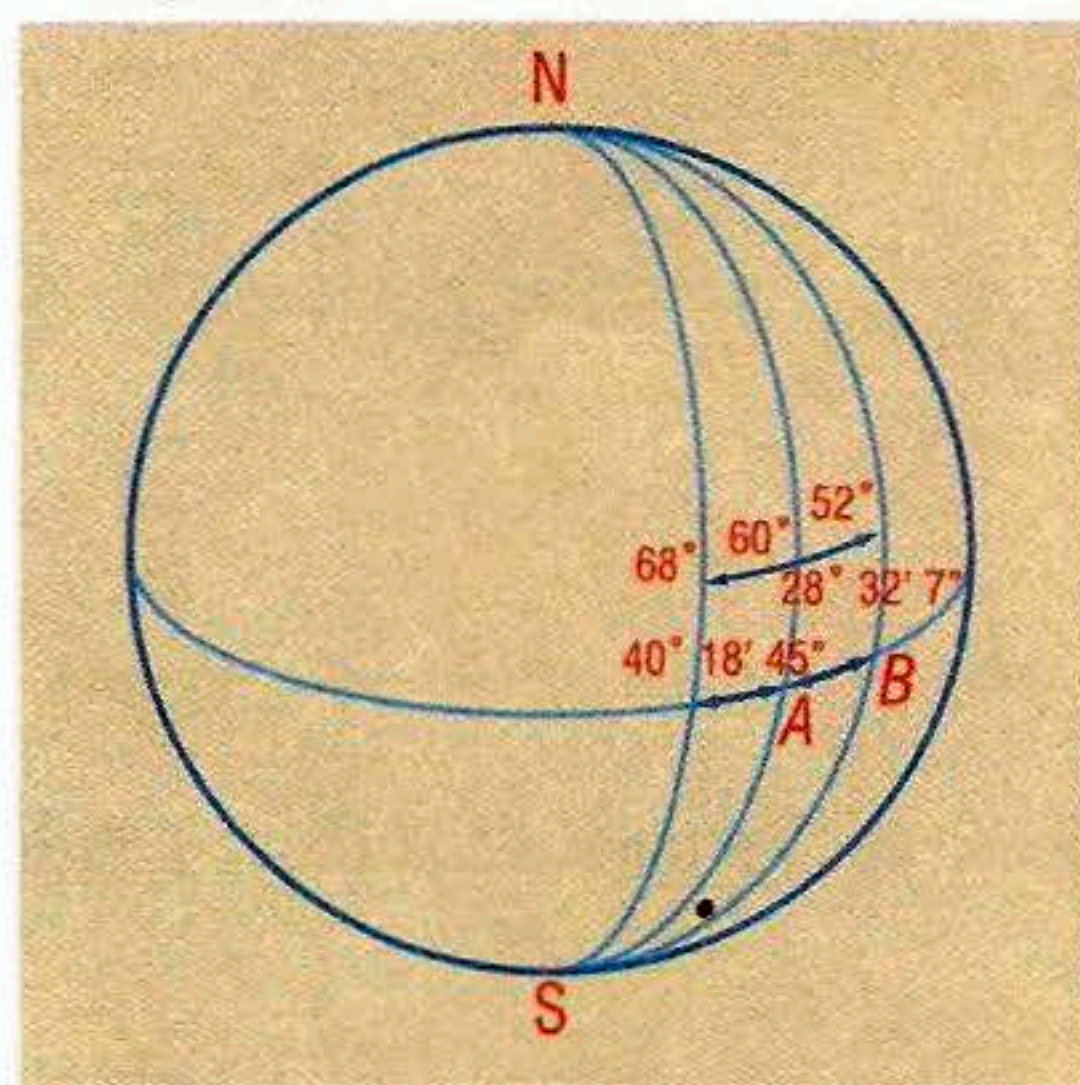
La longitud puede ser **este** u **oeste**, según que el lugar de que se trate esté situado al Este o al Oeste del primer meridiano. Así, decir que la longitud de un punto A (Fig. 75) es $40^{\circ} 23' 50''$ **este**, significa que este punto está situado al Este del primer meridiano y a una distancia de él igual a $40^{\circ} 23' 50''$, y decir que la longitud del punto B es $80^{\circ} 42' 43''$ **oeste** significa que este punto está situado al Oeste del primer meridiano y a una distancia de él igual a $80^{\circ} 42' 43''$.

La longitud **no puede pasar de 180°** .

621 DIFERENCIA DE LONGITUD entre dos puntos es la **distancia**, medida en grados, minutos y segundos, que hay entre los meridianos que pasan por ambos puntos.

La **diferencia de longitud** entre dos puntos situados **ambos al Este** o **al Oeste** del primer meridiano, se halla **restando ambas longitudes**.

Figura 76



Así, si la longitud del punto A (Fig. 76) es $40^{\circ} 18' 45''$ **este** y la del punto B es $68^{\circ} 50' 52''$ **este**, la diferencia de sus longitudes, o sea la distancia en longitud de A a B, será:

$$\begin{array}{r} 68^{\circ} \quad 50' \quad 52'' \\ - 40^{\circ} \quad 18' \quad 45'' \\ \hline 28^{\circ} \quad 32' \quad 7'' \quad \text{R.} \end{array}$$

La **diferencia de longitud** entre dos puntos situados **uno al Este** y **otro al Oeste** del primer meridiano se halla **sumando ambas longitudes**.

Así, si la longitud del punto A (Fig. 77) es $23^{\circ} 50' 43''$ **este** y la del punto B es $52^{\circ} 51' 29''$ **oeste**, la diferencia de sus longitudes, o sea la distancia en longitud de A a B, será:

$$\begin{array}{r} 23^{\circ} \quad 50' \quad 43'' \\ + 52^{\circ} \quad 51' \quad 29'' \\ \hline 75^{\circ} \quad 101' \quad 72'' \\ \text{Reduciendo:} \quad 76^{\circ} \quad 42' \quad 12'' \quad \text{R.} \end{array}$$

Cuando, al sumar ambas longitudes, la **suma es mayor que 180°** , debe **restarse de 360°** .

Así, si la longitud de un punto es $120^{\circ} 42' 17''$ oeste y la de otro $80^{\circ} 9' 23''$ este, la diferencia de sus longitudes será:

$$\begin{array}{r} 120^{\circ} \quad 42' \quad 17'' \\ + \quad 80^{\circ} \quad \quad 9' \quad 23'' \\ \hline 200^{\circ} \quad 51' \quad 40'' \end{array}$$

pero como esta suma es mayor que 180° hay que restarla de 360° para hallar la verdadera distancia en longitud entre los dos puntos y tendremos:

$$\begin{array}{r} 359^{\circ} \quad 59' \quad 60'' \\ - 200^{\circ} \quad 51' \quad 40'' \\ \hline 159^{\circ} \quad 8' \quad 20'' \end{array} \quad \text{R.}$$

Hallar la diferencia de longitud entre:

1. Cienfuegos (longitud $80^{\circ} 29' 16''$ oeste) y Liverpool (longitud $30^{\circ} 37''$ oeste) **R. $77^{\circ} 28' 39''$**
2. Santiago de Cuba ($75^{\circ} 45' 7''$ oeste) y Coruña ($8^{\circ} 2' 24''$ oeste) **R. $67^{\circ} 20' 43''$**
3. Ottawa ($75^{\circ} 42' 59''$ oeste) y Río de Janeiro ($43^{\circ} 10' 22''$ oeste) **R. $32^{\circ} 32' 37''$**
4. Key West ($81^{\circ} 48' 24''$ oeste) y Montevideo ($56^{\circ} 15' 30''$ oeste) **R. $25^{\circ} 32' 37''$**
5. Barcelona ($2^{\circ} 11' 4''$ este) y San Petersburgo ($30^{\circ} 17' 42''$ este) **R. $28^{\circ} 6' 38''$**
6. El Havre ($6' 28''$ este) y Hong-Kong ($114^{\circ} 10' 19''$ este) **R. $114^{\circ} 3' 51''$**
7. Varsovia ($21^{\circ} 1' 49''$ este) y Melbourne ($144^{\circ} 58' 33''$ este) **R. $123^{\circ} 56' 44''$**
8. Marsella ($5^{\circ} 23' 37''$ este) y Calcuta ($88^{\circ} 20' 12''$ este) **R. $82^{\circ} 56' 35''$**
9. Nueva Orleans ($90^{\circ} 3' 51''$ oeste) y Viena ($16^{\circ} 20' 20''$ este) **R. $106^{\circ} 24' 11''$**
10. Vladivostok ($131^{\circ} 53' 6''$ este) y Chicago ($87^{\circ} 37' 37''$ oeste) **R. $140^{\circ} 29' 17''$**
11. Bogotá ($70^{\circ} 4' 53''$ oeste) y Hamburgo ($9^{\circ} 58' 21''$ este) **R. $80^{\circ} 3' 14''$**
12. Tahití ($149^{\circ} 29' 16''$ oeste) y Wellington ($174^{\circ} 46' 6''$ este) **R. $35^{\circ} 44' 38''$**

289

Ejercicio

RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO Y LA LONGITUD

622

Cada punto de la Tierra da una vuelta completa en 24 horas o sea que describe una circunferencia, 360° en 24 horas, luego en una hora describe un arco que será $\frac{1}{24}$ de 360° o sea $\frac{360^{\circ}}{24} = 15^{\circ}$.

Como 1 hora tiene 60 minutos, si en una hora un punto de la Tierra describe un arco de 15° , en un minuto describirá un arco que será $\frac{1}{60}$ de 15° o sea $\frac{15^{\circ}}{60} = \frac{1^{\circ}}{4} = 15'$.

Como 1 minuto tiene 60 segundos, si en un minuto un punto de la Tierra describe un arco de $15'$, en un segundo describirá un arco que será $\frac{1}{60}$ de $15'$ o sea $\frac{15'}{60} = \frac{1'}{4} = 15''$.

Por tanto: 1 hora de tiempo equivale a 15° de longitud.

1 minuto " " " " $15'$ " "

1 segundo " " " " $15''$ " "

623

RELACIÓN ENTRE LA LONGITUD Y EL TIEMPO

Como un punto de la Tierra describe un arco de 15° en 1 hora o 60 minutos, para describir un arco de 1° empleará un tiempo 15 veces menor o sea $\frac{60}{15} \text{ min} = 4 \text{ minutos}$.

Como 1° tiene $60'$, si para recorrer un arco de un grado emplea 4 minutos, para recorrer un arco de $1'$ empleará un tiempo 60 veces menor, o sea $\frac{4}{60} \text{ de min} = \frac{1}{15} \text{ de min} = 4 \text{ s}$.

Luego:

15°	de longitud equivalen a	1 hora	de tiempo
1°	"	"	4 minutos
$1'$	"	"	4 segundos

624

EXPRESAR EL TIEMPO EN LONGITUD

Expresar en longitud 2 horas 8 minutos 16 segundos.

Como 1 hora equivale a 15° , 1 minuto a $15'$ y 1 segundo a $15''$, no hay más que **multiplicar** 2 h 8 min 16 s por 15 y el resultado será la longitud en grados, minutos y segundos.

Reduciendo:

2 h	8 min	16 s	
\times		15	
30°	120'	240''	
32°	4'	0''	R.

625

Hallar la diferencia de longitud entre dos ciudades cuya diferencia de hora es 1 hora 20 minutos 7 segundos.

No hay más que **multiplicar** la diferencia de tiempo por 15:

Reduciendo:

1 h	20 min	7 s	
\times		15	
15°	300'	105''	
20°	1'	45''	

Luego la diferencia de longitud es $20^\circ 1' 45''$. R.

290

Expresar en longitud:

Ejercicio

- | | | | |
|--------------------|------------------------|--------------------|------------------------|
| 1. 40 min 20 s | R. $10^\circ 5'$ | 5. 3 h 23 min 18 s | R. $50^\circ 49' 30''$ |
| 2. 1 h 10 min 6 s | R. $17^\circ 31' 30''$ | 6. 4 h 6 min 7 s | R. $61^\circ 31' 45''$ |
| 3. 1 h 43 min 54 s | R. $25^\circ 58' 30''$ | 7. 5 h 52 min 16 s | R. $88^\circ 4'$ |
| 4. 2 h 18 min | R. $34^\circ 30'$ | 8. 6 h 33 s | R. $90^\circ 8' 15''$ |

Hallar la diferencia de longitud entre dos ciudades, cuya diferencia de hora es:

- | | | | |
|--------------------|------------------------|---------------------|-------------------------|
| 9. 2 h 20 min 17 s | R. $35^\circ 4' 15''$ | 12. 6 h 28 min | R. 97° |
| 10. 3 h 42 min 7 s | R. $55^\circ 31' 45''$ | 13. 7 h 24 min 36 s | R. $111^\circ 9'$ |
| 11. 5 h 54 min | R. $88^\circ 30'$ | 14. 8 h 5 min 5 s | R. $121^\circ 16' 15''$ |

EXPRESAR LA LONGITUD EN TIEMPO

626

Expresar en tiempo $18^\circ 9' 8''$.

Como 15° de longitud equivalen a 1 hora, $15'$ a 1 minuto y $15''$ a 1 segundo, no hay más que **dividir** $18^\circ 9' 8''$ entre 15 y el cociente expresará el tiempo en horas, minutos y segundos:

$$\begin{array}{r}
 \text{1 h} \qquad \text{12 min} \qquad \text{36}\frac{8}{15} \text{ s} \qquad \text{R.} \\
 15 \overline{) 18^\circ \quad 9' \quad 8''} \\
 \underline{3} \qquad \qquad \underline{+ 180} \qquad \underline{+ 540} \\
 \times 60 \qquad \qquad \times 60' \qquad \qquad \times 60'' \\
 \underline{180'} \qquad \qquad \underline{189'} \qquad \underline{548''} \\
 \qquad \qquad \qquad 39 \qquad \qquad 98 \\
 \qquad \qquad \qquad 9' \qquad \qquad 8 \\
 \qquad \qquad \times 60'' \\
 \qquad \qquad \underline{540''}
 \end{array}$$

Hallar la diferencia de tiempo entre dos ciudades cuya diferencia de longitud es $16^\circ 43' 9''$

627

Dividimos la diferencia de longitud entre 15.

$$\begin{array}{r}
 \text{1 h} \qquad \text{6 min} \qquad \text{52}\frac{3}{5} \text{ s} \qquad \text{R.} \\
 15 \overline{) 16^\circ \quad 43' \quad 9''} \\
 \underline{1} \qquad \qquad \underline{+ 60} \qquad \underline{+ 780} \\
 \times 60 \qquad \qquad \times 60' \qquad \qquad \times 60'' \\
 \underline{60'} \qquad \qquad \underline{103'} \qquad \underline{789''} \\
 \qquad \qquad \qquad 13' \qquad \qquad 39 \\
 \qquad \qquad \times 60'' \\
 \qquad \qquad \underline{780''}
 \end{array}$$

Expresar en tiempo:

291

Ejercicio

- | | | | |
|------------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|
| 1. $1^\circ 6' 8''$ | R. 4 min $24\frac{8}{15}$ s | 5. $32^\circ 45' 50''$ | R. 2 h 11 min $3\frac{1}{3}$ s |
| 2. $9^\circ 23' 40''$ | R. 37 min $34\frac{2}{3}$ s | 6. $45^\circ 52' 56''$ | R. 3 h 3 min $31\frac{11}{15}$ s |
| 3. $24^\circ 24' 8''$ | R. 1 h 37 min $36\frac{8}{15}$ s | 7. $60^\circ 31'$ | R. 4 h 2 min 4 s |
| 4. $30^\circ 30' 15''$ | R. 2 h 2 min 1 s | 8. $72^\circ 54''$ | R. 4 h 48 min $3\frac{3}{5}$ s |

Hallar la diferencia de tiempo entre dos ciudades, cuya diferencia de longitud es:

- | | | | |
|-------------------------|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| 9. $32^\circ 43' 7''$ | R. 2 h 10 min $52\frac{7}{15}$ s | 12. $60^\circ 15' 45''$ | R. 4 h 1 min 3 s |
| 10. $45^\circ 7' 16''$ | R. 3 h $29\frac{1}{15}$ s | 13. $72^\circ 34' 41''$ | R. 4 h 50 min $18\frac{11}{15}$ s |
| 11. $50^\circ 52' 52''$ | R. 3 h 23 min $31\frac{7}{15}$ s | 14. $106^\circ 56' 3''$ | R. 7 h 7 min $44\frac{1}{5}$ s |

628

DADA LA LONGITUD DE DOS LUGARES Y LA HORA DE UNO DE ELLOS, HALLAR LA HORA DEL OTRO

Como la Tierra gira de Oeste a Este, si fijamos un lugar en la superficie de la Tierra sucederá que en todos los lugares situados al **Este** de ese punto, el Sol sale más temprano que en ese punto y en todos los lugares situados al **Oeste**, el Sol sale más tarde.

Por tanto, conociendo la **hora de un lugar**, para hallar la hora de otro lugar situado al **Este**, se **suma** a la hora dada la diferencia de hora entre los dos lugares, y para hallar la hora de otro lugar situado al **Oeste** del primero, se **resta** de la hora dada la diferencia de hora entre los dos lugares.

La diferencia de hora entre los dos lugares se halla, como se ha visto antes, encontrando la diferencia de longitud entre los dos lugares y dividiéndola entre 15.

Ejemplos

629

Cuando es mediodía en Greenwich, ¿qué hora es en Bombay (longitud $72^\circ 48' 54''$ este)?

A la hora de Greenwich, 12 del día, hay que *sumarle* la diferencia de hora entre Greenwich y Bombay, porque Bombay está al *este* de Greenwich. Para hallar la diferencia de hora hay que hallar la diferencia de longitud y dividirla entre 15, pero como la longitud de Greenwich es 0, la diferencia de longitud es $72^\circ 48' 54''$. Por tanto, se divide $72^\circ 48' 54''$ entre 15:

4 h	51 min	$15\frac{3}{5}$ s
15 $\overline{) 72^\circ}$	48'	54''
12°	+ 720'	+ 180''
× 60	768'	234''
<u>720'</u>	18	84
	3'	9
	× 60	
	<u>180''</u>	

A la hora de Greenwich 12 del día, le *sumo* la diferencia de hora $4\text{ h } 51\text{ min } 15\frac{3}{5}\text{ s}$ y **en Bombay serán las $4\text{ h } 51\text{ min } 15\frac{3}{5}\text{ s p. m.}$** R.

630

Cuando son las 8 a. m. en Barcelona (longitud $20^\circ 11' 4''$ este), ¿qué hora es en Sidney, Australia (longitud $151^\circ 12' 23''$ este)?

Hallamos la diferencia de longitud *restando* ambas longitudes, porque los dos lugares están al *este* del primer meridiano:

151°	12'	23''
– 2°	11'	4''
<u>149°</u>	1'	19''

La *diferencia de hora* la obtengo dividiendo entre 15 la diferencia de longitud:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 9 \text{ h} \\
 15 \overline{) 149^\circ} \\
 \underline{14^\circ} \\
 \times 60 \\
 840'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 56 \text{ min} \\
 1' \\
 + 840' \\
 \hline
 841' \\
 91 \\
 1' \\
 \times 60 \\
 \hline
 60''
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5\frac{4}{15} \text{ s} \\
 19'' \\
 + 60'' \\
 \hline
 79'' \\
 4
 \end{array}
 \end{array}$$

Como Sidney está al *este* de Barcelona, a la hora dada de Barcelona, 8 a. m., le sumo la diferencia de hora, 9 h 56 min $5\frac{4}{15}$ s y tendremos que en Sidney serán las
5 h 56 min $5\frac{4}{15}$ s p. m. R.

¿Qué hora es en Calcuta (longitud $88^\circ 20' 12''$ este) cuando en La Habana (longitud $82^\circ 20' 54''$ oeste) son las 9 p. m.? 631

Se halla la diferencia de la longitud *sumando* ambas longitudes porque La Habana está al *oeste* y Calcuta al *este* del primer meridiano:

$$\begin{array}{r}
 88^\circ \quad 20' \quad 12'' \\
 + 82^\circ \quad 20' \quad 54'' \\
 \hline
 170^\circ \quad 41' \quad 6'' \quad (\text{reducida})
 \end{array}$$

$$\text{Diferencia de hora: } \frac{170^\circ 41' 6''}{15} = 11 \text{ h } 22 \text{ min } 44\frac{2}{5} \text{ s}$$

A la hora dada en La Habana, 9 p. m., le *sumo* esta diferencia de hora y en Calcuta serán las
8 h 22 min $44\frac{2}{5}$ s a. m. del día siguiente. R.

¿Qué hora es en Washington (longitud $77^\circ 3' 56''$ oeste) cuando en París (longitud $2^\circ 20' 14''$ este) son las 7 a. m.? 632

Se halla la diferencia de hora *sumando* ambas longitudes:

$$\begin{array}{r}
 77^\circ \quad 3' \quad 56'' \\
 + 2^\circ \quad 20' \quad 14'' \\
 \hline
 79^\circ \quad 24' \quad 10'' \quad (\text{reducida})
 \end{array}$$

$$\text{La diferencia de hora será: } \frac{79^\circ 24' 10''}{15} = 5 \text{ h } 17 \text{ min } 36\frac{2}{3} \text{ s}$$

A la hora de París, 7 a. m., tengo que *restarle* la diferencia de hora, *porque* Washington está al *oeste* de París y tendremos que la hora de Washington será

1 h 42' $23\frac{1}{3}''$ s a. m. del mismo día. R.

292

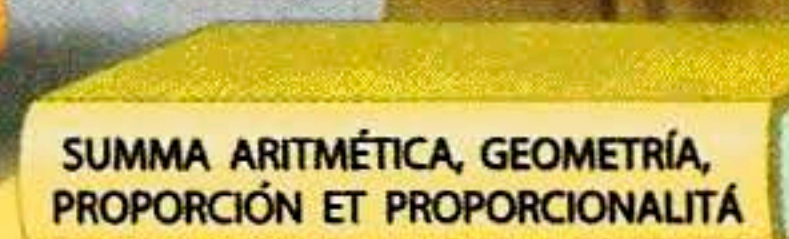
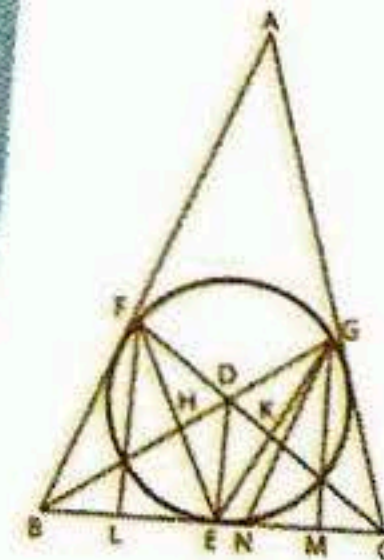
Ejercicio

¿Qué hora es en:

- La Habana (longitud $82^{\circ} 20' 54''$ oeste) cuando en Greenwich son las 10 a. m.
R. Las 4 h 30 min $36\frac{2}{5}$ s a. m.
- Londres ($5^{\circ} 43''$ oeste) cuando en Greenwich son las 3 p. m.
R. Las 2 h 59 min $37\frac{2}{15}$ s p. m.
- Moscú ($37^{\circ} 34' 15''$ este) cuando en Greenwich son las 12 p. m.
R. Las 2 h 30 min 17 s p. m.
- Manila ($120^{\circ} 57' 24''$ este) cuando en Roma ($12^{\circ} 29' 5''$ este) son las 6 a. m.
R. Será 1 h 13 min $53\frac{4}{15}$ s p. m.
- Washington ($77^{\circ} 3' 56''$ oeste) cuando en La Habana ($82^{\circ} 20' 54''$ oeste) son las 3 p. m.
R. Las 3 h 21 min $7\frac{13}{15}$ s p. m.
- Panamá ($79^{\circ} 32' 4''$ oeste) cuando en Buenos Aires ($58^{\circ} 15' 14''$ oeste) son las 9 p. m.
R. Las 7 h 34 min $52\frac{2}{3}$ s p. m.
- Ciudad de México ($99^{\circ} 11' 41''$ oeste) cuando en Dublín ($6^{\circ} 20' 16''$ oeste) son las 10 p. m.
R. Las 3 h 48 min $34\frac{1}{3}$ s p. m.
- Honolulu ($157^{\circ} 51' 48''$ oeste) cuando en Santiago de Chile ($70^{\circ} 41' 16''$ oeste) son las 2 a. m.
R. Las 8 h 11 min $17\frac{13}{15}$ s p. m. del día anterior.
- París ($2^{\circ} 20' 14''$ este) cuando en La Habana ($82^{\circ} 20' 54''$ oeste) son las 5 p. m.
R. Las 10 h 38 min $44\frac{8}{15}$ s p. m.
- San Francisco de California ($122^{\circ} 23' 39''$ oeste) cuando en Cape-Town, África ($18^{\circ} 28' 38''$ este) son las 3 a. m.
R. Las 5 h 36 min $30\frac{13}{15}$ s p. m. del día anterior.
- La Habana ($82^{\circ} 20' 54''$ oeste) cuando en Manila ($120^{\circ} 57' 24''$ este) son las 12 del día?
R. Las 10 h 26 min $46\frac{4}{5}$ s p. m. del día anterior.
- Madrid ($3^{\circ} 41' 15''$ oeste) cuando en Bombay ($72^{\circ} 48' 54''$ este) son las 2 p. m.
R. Las 8 h 53 min $59\frac{2}{5}$ s a. m.
- Un viajero va de Nueva York ($74^{\circ} 25''$ oeste) hasta Lisboa ($90^{\circ} 11' 10''$ oeste). Al llegar a Lisboa, ¿estará su reloj adelantado o atrasado, y cuánto?
R. 4 h 19 min 17 s atrasado.
- Si un viajero va de Roma ($12^{\circ} 29' 5''$ este) a Londres ($5^{\circ} 43''$ oeste), ¿encontrará su reloj adelantado o atrasado en Londres, y cuánto?
R. 50 min $19\frac{1}{5}$ s adelantado.

REGIOMONTANO
1436 - 1476

LUCAS PACIOLI
1440 - 1515



Los griegos tuvieron un concepto teórico de las proporciones. La aplicación práctica del conocimiento de las proporciones se la debemos a los matemáticos italianos del Renacimiento. Regiomontano y Lucas Pacioli (Fray Lucas de Burgos) di-

vulgaron de manera considerable el empleo de las proporciones en sus leídas obras, en especial este último, que ha pasado a la historia como el inventor de la contabilidad por partida doble.

Capítulo **XLI**

RAZONES Y PROPORCIONES

I. RAZONES

RAZÓN O RELACIÓN de dos cantidades es el resultado de comparar dos cantidades.

Dos cantidades pueden compararse de dos maneras: hallando en cuánto excede una a la otra, es decir, **restándolas**, o hallando cuántas veces contiene una a la otra, es decir, **dividiéndolas**. De aquí que haya dos clases de razones: **razón aritmética** o **por diferencia** y **razón geométrica** o **por cociente**.

RAZÓN ARITMÉTICA O POR DIFERENCIA de dos cantidades es la diferencia indicada de dichas cantidades.

Las razones aritméticas se pueden escribir de dos modos: separando las dos cantidades con el signo $-$ o con un punto $(.)$.

Así, la razón aritmética de 6 a 4 se escribe: $6 - 4$ o 6.4 y se lee **seis es a cuatro**.

Los términos de la razón se llaman: **antecedente** el primero y **consecuente** el segundo. Así, en la razón $6 - 4$, el antecedente es 6 y el consecuente 4.

RAZÓN GEOMÉTRICA O POR COCIENTE de dos cantidades es el cociente indicado de dichas cantidades.

633

634

635

Las razones geométricas se pueden escribir de dos modos: en forma de quebrado, separados numerador y denominador por una raya horizontal o separadas las cantidades por el signo de división (\div).

Así, la razón geométrica de 8 a 4 se escribe: $\frac{8}{4}$ u $8 \div 4$, y se lee **ocho es a cuatro**.

Los términos de la razón geométrica se llaman **antecedente** el primero y **consecuente** el segundo. Así, en la razón $8 \div 4$, el antecedente es 8 y el consecuente 4.

636

PROPIEDADES DE LAS RAZONES ARITMÉTICAS O POR DIFERENCIA

Como la razón aritmética o por diferencia de dos cantidades no es más que la diferencia indicada de dichas cantidades, las propiedades de las razones aritméticas serán las propiedades de toda resta o diferencia (113):

- 1) Si al antecedente de una razón aritmética se suma o resta un número, la razón queda aumentada o disminuida en ese número.
- 2) Si al consecuente de una razón aritmética se suma o resta un número, la razón queda disminuida en el primer caso y aumentada en el segundo en el mismo número.
- 3) Si al antecedente y consecuente de una razón aritmética se suma o resta un mismo número, la razón no varía.

637

PROPIEDADES DE LAS RAZONES GEOMÉTRICAS O POR COCIENTE

Como la razón geométrica o por cociente de dos cantidades no es más que una división indicada o un quebrado, las propiedades de las razones geométricas serán las propiedades de los quebrados (352, 353, 354):

- 1) Si el antecedente de una razón geométrica se multiplica o divide entre un número, la razón queda multiplicada o dividida entre ese número.
- 2) Si el consecuente de una razón geométrica se multiplica o divide entre un número, la razón queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo por ese mismo número.
- 3) Si el antecedente y el consecuente de una razón geométrica se multiplican o dividen entre un mismo número, la razón no varía.

293

(En los ejercicios siguientes, cuando se diga simplemente razón o relación, se entenderá que la razón pedida es geométrica.)

Ejercicio

1. Cite dos números cuya razón aritmética sea 6; dos números cuya razón geométrica sea $\frac{2}{3}$.
2. Hallar la razón aritmética y geométrica de:

a) 60 y 12

R. 48; 5

c) 5.6 y 3.5

R. 2.1; $\frac{8}{5}$ b) $\frac{11}{12}$ y $\frac{5}{6}$ R. $\frac{1}{12}$; $\frac{11}{10}$ d) $\frac{3}{8}$ y 0.02R. 0.355; $\frac{75}{4}$

3. Hallar la relación entre las edades de dos niños de 10 y 14 años. **R. $\frac{5}{7}$**
4. Cite tres pares de números que estén en la relación de 2 y 3.
5. Cite tres pares de números cuya razón sea $\frac{3}{4}$; tres pares de números cuya relación sea de 1 a 6.
6. La razón de dos números es $\frac{5}{6}$. Si el menor es 20, ¿cuál es el mayor? **R. 24**
7. El mayor de dos números es 42 y la relación entre ambos de 5 a 7. Hallar el número menor. **R. 30**
8. Dos números son entre sí como 2 es a 17. Si el menor es 14, ¿cuál es el mayor? **R. 119**

II. PROPORCIONES ARITMÉTICAS

EQUIDIFERENCIA O PROPORCIÓN ARITMÉTICA es la igualdad de dos diferencias o razones aritméticas.

Una equidiferencia se escribe de los dos modos siguientes:

$$a - b = c - d \text{ y } a.b :: c.d \text{ y se lee } a \text{ es a } b \text{ como } c \text{ es a } d.$$

TÉRMINOS DE UNA EQUIDIFERENCIA

Los términos de una equidiferencia se llaman: **extremos** el primero y el cuarto, y **medios** el segundo y tercero. También según lo visto antes (634) se llaman **antecedentes** al primero y tercer términos y **consecuentes** al segundo y al cuarto.

Así, en la equidiferencia $20 - 5 = 21 - 6$, 20 y 6 son los extremos, 5 y 21 son los medios, 20 y 21 son los antecedentes, 5 y 6 son los consecuentes.

CLASES DE EQUIDIFERENCIAS

Hay dos clases: equidiferencia **discreta**, que es aquella cuyos medios no son iguales; por ejemplo, $9 - 7 = 8 - 6$ y equidiferencia **continua**, que es la que tiene los medios iguales; por ejemplo, $10 - 8 = 8 - 6$.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS EQUIDIFERENCIAS. TEOREMA

En toda equidiferencia la suma de los extremos es igual a la suma de los medios.

Sea la equidiferencia $a - b = c - d$. Vamos a demostrar que $a + d = c + b$.

En efecto: sumando a los dos miembros de la equidiferencia dada $a - b = c - d$ un extremo y un medio, $b + d$, tendremos:

$$a - b + b + d = c - d + b + d$$

y simplificando, queda $a + d = c + b$ que era lo que queríamos demostrar.

En la equidiferencia, $8 - 6 = 9 - 7$ tenemos: $8 + 7 = 9 + 6$
o sea $15 = 15$

642 **COROLARIOS**

De la propiedad fundamental de las equidiferencias se derivan los siguientes corolarios:

- 1) En toda equidiferencia un extremo es igual a la suma de los medios, menos el otro extremo.

Sea la equidiferencia $a - b = c - d$. Vamos a demostrar que $a = b + c - d$.

En efecto: ya sabemos por la propiedad fundamental, que $a + d = b + c$.

Restando d a ambos miembros, tendremos: $a + d - d = b + c - d$ y simplificando $a = b + c - d$.

Ejemplo

$$\text{En } 9 - 5 = 10 - 6 \text{ tenemos que } 9 = 5 + 10 - 6$$

- 2) En toda equidiferencia un medio es igual a la suma de los extremos, menos el otro medio.

Sea la equidiferencia $a - b = c - d$. Vamos a demostrar que $b = a + d - c$.

En efecto: ya sabemos que $a + d = b + c$.

Restando c a los dos miembros, tendremos: $a + d - c = b + c - c$ y simplificando: $b = a + d - c$.

Ejemplo

$$\text{En } 11 - 7 = 9 - 5 \text{ tenemos que } 7 = 11 + 5 - 9$$

- 643 **MEDIA DIFERENCIAL O MEDIA ARITMÉTICA** es cada uno de los términos medios de una equidiferencia continua, o sea cada uno de los medios de una equidiferencia, cuando son iguales. Así, en la equidiferencia $8 - 6 = 6 - 4$, la media diferencial es 6.

644 **TEOREMA**

La media diferencial es igual a la semisuma de los extremos.

Sea la equidiferencia $a - b = b - c$. Vamos a demostrar que $b = \frac{a + c}{2}$

En efecto: por la propiedad fundamental sabemos que $a + c = b + b$ o sea $a + c = 2b$.

Dividiendo ambos miembros entre 2, queda: $\frac{a + c}{2} = \frac{2b}{2}$, o sea $\frac{a + c}{2} = b$, que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

$$\text{En } 12 - 9 = 9 - 6 \text{ tenemos } 9 = \frac{12 + 6}{2}$$

HALLAR TÉRMINOS DESCONOCIDOS EN EQUIDIFERENCIAS

645

Ejemplos

- 1) Hallar el término desconocido en
- $8 - 6 = 4 - x$
- .

Como el término desconocido es un extremo y un extremo es igual a la suma de los medios menos el extremo conocido, tendremos:

$$x = 6 + 4 - 8 = 2$$

y queda, sustituyendo el valor de x en la equidiferencia: $8 - 6 = 4 - 2$

- 2) Hallar el término desconocido en
- $3.4 - x = \frac{8}{5} - 1$
- .

Como el término desconocido es un medio y un medio es igual a la suma de los extremos menos el medio conocido, tendremos:

$$x = 3.4 + 1 - \frac{8}{5} = 4.4 - \frac{8}{5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$$

y sustituyendo el valor de x : $3.4 - 2\frac{4}{5} = \frac{8}{5} - 1$

- 3) Hallar el término desconocido en
- $14 - x = x - 3.04$
- .

Aquí el término desconocido es la media diferencial, que es igual a la semisuma de los extremos, luego:

$$x = \frac{14 + 3.04}{2} = \frac{17.04}{2} = 8.52$$

y queda, sustituyendo el valor de x en la equidiferencia dada: $14 - 8.52 = 8.52 - 3.04$

Hallar el término desconocido en:

1. $50 - 42 = 25 - x$

R. 17

2. $16.5 - 8 = x - 2$

R. 10.5

3. $45.3 - x = 18 - 0.03$

R. 27.33

4. $x - 0.4 = 25 - 0.004$

R. 25.396

5. $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{5}{6} - x$

R. $\frac{9}{14}$

6. $\frac{9}{19} - x = \frac{3}{7} - \frac{1}{4}$

R. $\frac{157}{532}$

7. $8\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = x - 5\frac{1}{4}$

R. $13\frac{19}{60}$

8. $0.03 - 0.01 = 15\frac{2}{5} - x$

R. 15.38

9. $x - \frac{5}{16} = 6\frac{2}{5} - \frac{1}{8}$

R. $6\frac{47}{80}$

10. $8\frac{1}{3} - x = 5\frac{1}{4} - 14\frac{1}{12}$

R. $17\frac{1}{6}$

11. $\frac{1}{2} - 0.36 = x - 4\frac{1}{8}$

R. 4.265

12. $x - 14 = 16\frac{2}{9} - \frac{1}{12}$

R. $30\frac{5}{36}$

13. $50 - x = x - 14.26$

R. 32.13

14. $\frac{1}{3} - x = x - \frac{1}{5}$

R. $\frac{4}{15}$

15. $16\frac{2}{9} - x = x - \frac{1}{36}$

R. $8\frac{1}{8}$

16. $5.04 - x = x - 5\frac{1}{4}$

R. 5.145

294

Ejercicio

646

HALLAR EL TÉRMINO MEDIO DIFERENCIAL ENTRE DOS NÚMEROS**Ejemplo**

Hallar la media diferencial entre 8.04 y 4.

No hay más que formar una equidiferencia continua cuyo medio diferencial sea x y los extremos los números dados y despejar x :

$$8.04 - x = x - 4$$

Despejando x : $x = \frac{8.04 + 4}{2} = \frac{12.04}{2} = 6.02$

y sustituyendo el valor de x : $8.04 - 6.02 = 6.02 - 4$

295

Hallar el término medio diferencial entre:

Ejercicio

1. 26 y 14

R. 20

2. 18 y 14.04

R. 16.02

3. 25.02 y 0.004

R. 12.512

4. 5.004 y 0.0016

R. 2.5028

5. $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$

R. $\frac{11}{30}$

6. $\frac{5}{7}$ y $\frac{1}{8}$

R. $\frac{47}{112}$

7. $6\frac{2}{3}$ y $5\frac{1}{4}$

R. $5\frac{23}{24}$

8. $14\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$

R. $7\frac{29}{70}$

9. 100 y $50\frac{3}{11}$

R. $75\frac{3}{22}$

10. 150 y 20.364

R. 85.182

11. $5\frac{3}{5}$ y 0.006

R. 2.803

12. 3.42 y $\frac{3}{4}$

R. 2.085

13. 8.16 y $5\frac{1}{5}$

R. 6.68

14. $16\frac{2}{7}$ y $\frac{1}{17}$

R. $8\frac{41}{238}$

15. 50.36 y $\frac{3}{4}$

R. 25.555

16. $\frac{1}{300}$ y $\frac{1}{1,150}$

R. $\frac{29}{13,800}$

III. PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

647

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA O EQUICOCIENTE es la igualdad de dos razones geométricas o por cociente.

Una proporción geométrica se escribe de los dos modos siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ o } a : b :: c : d$$

y se lee: **a es a b como c es a d .**

648

TÉRMINOS DE UNA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Los términos de una proporción geométrica se llaman: **extremos** el primero y el cuarto, y **medios** el segundo y tercero.

También, según lo visto antes (635), se llaman **antecedentes** el primero y tercer términos, y **consecuentes** el segundo y cuarto términos.

Así, en la proporción $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$ los extremos son 8 y 5 y los medios 10 y 4; los antecedentes son 8 y 10 y los consecuentes 4 y 5.

CLASES DE PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

649

Hay dos clases de proporciones geométricas: proporción **discreta**, que es aquella cuyos medios no son iguales; por ejemplo, $8 : 4 :: 10 : 5$, y proporción **continua**, que es la que tiene los medios iguales; por ejemplo $20 : 10 :: 10 : 5$.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS. TEOREMA

650

En toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $a \times d = c \times b$.

En efecto: multiplicando ambos miembros de la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por el producto de un medio y un extremo, $b \times d$, para lo cual basta multiplicar solamente los numeradores, tendremos:

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d}$$

y simplificando queda: $a \times d = c \times b$, que era lo que queríamos demostrar.

En la proporción $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ tenemos que $6 \times 2 = 3 \times 4$ o sea $12 = 12$.

Ejemplo

COROLARIOS

651

De la propiedad fundamental de las proporciones geométricas se derivan los siguientes corolarios:

- 1) En toda proporción geométrica un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo.**

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $a = \frac{b \times c}{d}$

En efecto: ya sabemos por la propiedad fundamental que $a \times d = b \times c$.

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad entre d , tendremos: $\frac{a \times d}{d} = \frac{b \times c}{d}$ y

simplificando: $a = \frac{b \times c}{d}$

En $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ tenemos $9 = \frac{12 \times 3}{4}$

Ejemplo

- 2) En toda proporción geométrica un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $b = \frac{a \times d}{c}$.

En efecto: ya sabemos que $a \times d = b \times c$.

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por c , tendremos: $\frac{a \times d}{c} = \frac{b \times c}{c}$ y simplificando: $b = \frac{a \times d}{c}$

Ejemplo

$$\text{En } \frac{5}{10} = \frac{2}{4} \text{ tenemos } 2 = \frac{5 \times 4}{10}$$

- 652 **MEDIA PROPORCIONAL O MEDIA GEOMÉTRICA** es cada uno de los términos medios de una proporción geométrica continua, o sea, cada uno de los términos medios de una proporción geométrica, cuando son iguales. Así, en la proporción $8 : 4 :: 4 : 2$ la media proporcional es 4.

653 TEOREMA

La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Sea la proporción continua $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Vamos a demostrar que $b = \sqrt{a \times c}$.

En efecto: ya sabemos por la propiedad fundamental que $a \times c = b \times b$, o sea, $a \times c = b^2$.

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros, tendremos: $\sqrt{a \times c} = \sqrt{b^2}$ y simplificando: $b = \sqrt{a \times c}$ que era lo que queríamos demostrar:

Ejemplo

$$\text{En } \frac{9}{6} = \frac{6}{4} \text{ tenemos que } 6 = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

654 HALLAR TÉRMINOS DESCONOCIDOS EN PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplos

- 1) Hallar el término desconocido en $8 : 4 :: 10 : x$.

Como el término desconocido es un extremo y un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el extremo conocido, tendremos:

$$x = \frac{4 \times 10}{8} = 5$$

Sustituyendo el valor de la x en la proporción dada, queda: $8 : 4 :: 10 : 5$.

2) Hallar el término desconocido en $10 : \frac{1}{6} :: x : 4$

Como el término desconocido es un medio y un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el medio conocido, tendremos:

$$x = \frac{10 \times 4}{1/6} = \frac{40}{1/6} = 240$$

Sustituyendo el valor de x en la proporción dada, queda: $10 : 1/6 :: 240 : 4$

3) Hallar el término desconocido en $25 : x :: x : \frac{1}{16}$

Como el término desconocido es la media proporcional y la media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos, tendremos:

$$x = \sqrt{25 \times \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Sustituyendo el valor de x en la proporción dada, queda: $25 : 1\frac{1}{4} :: 1\frac{1}{4} : \frac{1}{16}$

Hallar el término desconocido en:

1. $8 : x :: 16 : 4$

R. 2

2. $x : 0.04 :: 24 : 0.4$

R. 2.4

3. $14.25 : 14 :: x : 0.002$

R. $\frac{57}{28,000}$

4. $0.04 : 0.05 :: 0.06 : x$

R. 0.075

5. $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} :: x : \frac{2}{3}$

R. $1\frac{1}{9}$

6. $5\frac{2}{3} : x :: 8\frac{1}{4} : \frac{5}{6}$

R. $\frac{170}{297}$

7. $\frac{1}{12} : 3\frac{1}{6} :: \frac{2}{3} : x$

R. $25\frac{1}{3}$

8. $0.45 : \frac{1}{12} :: 10\frac{2}{9} : x$

R. $1\frac{217}{243}$

9. $3.45 : \frac{1}{8} :: x : 4.36$

R. 120.336

10. $x : \frac{1}{5} :: 6 : 2$

R. $\frac{3}{5}$

11. $5 : \frac{1}{2} :: x : 0.04$

R. 0.4

12. $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} :: 4.25 : x$

R. $5\frac{1}{10}$

13. $8\frac{1}{4} : 5\frac{1}{6} :: x : 3\frac{1}{7}$

R. $5\frac{4}{217}$

14. $0.03 : x :: \frac{1}{6} : \frac{2}{9}$

R. $\frac{1}{25}$

15. $16 : x :: x : 25$

R. 20

16. $0.49 : x :: x : 0.64$

R. 0.56

17. $\frac{1}{4} : x :: x : \frac{9}{16}$

R. $\frac{3}{8}$

18. $2.25 : x :: x : 1.69$

R. 1.95

296

Ejercicio

HALLAR EL TÉRMINO MEDIO PROPORCIONAL ENTRE DOS NÚMEROS

655

Hallar el término medio proporcional entre 16 y 81.

No hay más que formar una proporción geométrica continua cuyo medio proporcional sea x y los extremos los números dados y despejar x : $16 : x :: x : 81$.

Despejando x : $x = \sqrt{16 \times 81} = 4 \times 9 = 36$

Sustituyendo el valor de x en la proporción dada, queda: $16 : 36 :: 36 : 81$

Ejemplo

297

Hallar el término medio proporcional entre:

Ejercicio

1. 81 y 4 **R. 18**

2. 64 y 25 **R. 40**

3. 49 y 0.25 **R. 3.5**

4. 0.16 y 169 **R. 5.2**

5. 0.0064 y 225 **R. 1.2**

6. 144 y 0.0169 **R. 1.56**

7. $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{9}$ **R. $\frac{1}{6}$**

8. $\frac{25}{36}$ y $\frac{49}{81}$ **R. $\frac{35}{54}$**

9. 0.0144 y $\frac{1}{324}$ **R. $\frac{1}{150}$**

10. $\frac{121}{169}$ y $\frac{289}{361}$ **R. $\frac{187}{247}$**

11. $2\frac{1}{4}$ y $3\frac{1}{16}$ **R. $2\frac{5}{8}$**

12. $1\frac{47}{529}$ y $1\frac{49}{576}$ **R. $1\frac{2}{23}$**

656

HALLAR UNA CUARTA PROPORCIONAL DE TRES NÚMEROS

Cuarta proporcional es cualquiera de los cuatro términos de una proporción geométrica discreta. Así, en la proporción $8 : 16 :: 5 : 10$, cualquiera de estos cuatro términos es cuarta proporcional respecto de los otros tres.

Ejemplo

Hallar una cuarta proporcional de 20, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$.

Se forma una proporción geométrica con estas tres cantidades, poniendo de último extremo x y se despeja el valor de x :

$$20 : \frac{1}{3} :: \frac{2}{5} : x$$

Despejando x : $x = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{20} = \frac{\frac{2}{15}}{20} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}$

Sustituyendo el valor de x : $20 : \frac{1}{3} :: \frac{2}{5} : \frac{1}{150}$

298

Hallar una cuarta proporcional entre:

Ejercicio

1. 5, 6 y 0.04 **R. 0.048**

2. $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$ **R. $\frac{1}{5}$**

3. $\frac{1}{16}$, $5\frac{2}{3}$ y $6\frac{1}{12}$ **R. $551\frac{5}{9}$**

4. 150, $24\frac{1}{7}$ y $16\frac{2}{5}$ **R. $2\frac{1,679}{2,625}$**

5. $\frac{5}{12}$, 0.004 y 3.24 **R. $\frac{486}{15,625}$**

6. $\frac{1}{14}$, 5.34 y $16\frac{2}{5}$ **R. $1,226\frac{8}{125}$**

HALLAR UNA TERCERA PROPORCIONAL DE DOS NÚMEROS

657

Tercera o tertia proporcional es el primero o cuarto término de una proporción geométrica continua. Así, en la proporción $20 : 10 :: 10 : 5$.

20 es una tertia proporcional de 10 y 5, y 5 es una tertia proporcional de 20 y 10.

Hallar una tercera proporcional entre $\frac{1}{5}$ y 6.

Se forma una proporción continua, poniendo de término medio proporcional uno de los números dados y x de último extremo y se despeja x :

$$\frac{1}{5} : 6 :: 6 : x$$

Despejando x : $x = \frac{6 \times 6}{1/5} = \frac{36}{1/5} = 180$

Sustituyendo el valor de x : $\frac{1}{5} : 6 :: 6 : 180$

Ejemplo

Hallar una tercera proporcional entre:

1. 8 y 0.4 R. 0.02

2. $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{3}$ R. $\frac{8}{15}$

3. $\frac{1}{8}$ y $14\frac{2}{5}$ R. $1,658\frac{22}{25}$

4. 0.12 y 0.36 R. 1.08

5. $\frac{1}{3}$ y $8\frac{1}{4}$ R. $204\frac{3}{16}$

6. 0.002 y 16.34 R. 133,497.8

299

Ejercicio



Las razones y proporciones se conocen desde tiempos antiguos. **Euclides** expone en el libro v de sus *Elementos* la teoría de las proporciones debida a Eudoxio. Los romanos le daban a cada proporción un nombre. En el siglo xv d. C., **Al-Kalsadi**,

empleó en su aritmética el signo (...) para indicar las proporciones. En 1537, **Nicolás de Brescia** (conocido por Tartaglia) escribió las proporciones así: 6//3//8//4.

Capítulo **XLII**

TRANSFORMACIÓN, COMPARACIÓN Y PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

I. TRANSFORMACIÓN DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

658

DIVERSOS CAMBIOS QUE PUEDEN VERIFICARSE EN UNA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA SUBSISTIENDO LA PROPORCIONALIDAD

Una proporción geométrica puede sufrir diversas transformaciones, pero para que éstas sean legítimas es necesario que se conserve el **producto de los extremos igual al producto de los medios**.

Así, una proporción geométrica puede recibir ocho formas distintas, haciendo con sus términos los cambios que se indican a continuación:

- 1º La proporción dada $a : b :: c : d$
- 2º Cambiando los medios en la 1ª $a : c :: b : d$
- 3º Cambiando los extremos en la 1ª $d : b :: c : a$
- 4º Cambiando los medios en la anterior $d : c :: b : a$
- 5º Invirtiendo las razones de la 1ª $c : d :: a : b$
- 6º Invirtiendo las razones de la 2ª $b : d :: a : c$
- 7º Invirtiendo las razones de la 3ª $c : a :: d : b$
- 8º Invirtiendo las razones de la 4ª $b : a :: d : c$

Todos estos cambios son legítimos porque en todas las proporciones se conserva el producto de los extremos igual al de los medios $a \times d = b \times c$, lo mismo que en la proporción dada.

La proporción $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ puede escribirse de ocho modos:

$$1^{\circ} \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

$$3^{\circ} \quad \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$$

$$5^{\circ} \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$7^{\circ} \quad \frac{6}{3} = \frac{4}{2}$$

$$2^{\circ} \quad \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$

$$4^{\circ} \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$6^{\circ} \quad \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

$$8^{\circ} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Todas estas formas son legítimas porque en cualquiera de ellas se tiene que $6 \times 2 = 3 \times 4$.

Ejemplo

II. COMPARACIÓN DE PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

TEOREMA

659

Si dos proporciones geométricas tienen una razón común, las otras dos razones forman proporción geométrica.

Sean las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. Vamos a demostrar que $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$.

En efecto: en las proporciones dadas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

vemos que la razón $\frac{c}{d}$ es igual a $\frac{a}{b}$ y la razón $\frac{m}{n}$

también es igual a $\frac{a}{b}$ y como dos cosas iguales

a una tercera son iguales entre sí

$$\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

que era lo que queríamos demostrar.

De las proporciones $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ resulta que $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$.

Ejemplo

TEOREMA

660

Si dos proporciones geométricas tienen los antecedentes iguales, los consecuentes forman proporción geométrica.

Sean las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m} = \frac{c}{n}$. Vamos a demostrar que $\frac{b}{d} = \frac{m}{n}$.

En efecto, en las dos proporciones dadas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m} = \frac{c}{n}$

cambiamos los medios y tendremos: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$

y como por el teorema anterior sabemos que si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones forman proporción, tendremos:

$$\frac{b}{d} = \frac{m}{n} \quad \text{que era lo que queríamos demostrar.}$$

Ejemplo

De las proporciones $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ y $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ resulta $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$.

661

TEOREMA

Si dos proporciones geométricas tienen los consecuentes iguales, los antecedentes forman proporción geométrica.

Sean las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{b} = \frac{n}{d}$. Vamos a demostrar que $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$.

En efecto, en las dos proporciones dadas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{b} = \frac{n}{d}$ cambiemos los medios y tendremos: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{b}{d}$

y como si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos forman proporción, tendremos:

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{n} \quad \text{que era lo que queríamos demostrar.}$$

Ejemplo

De las proporciones $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ y $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$ resulta $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

662

TEOREMA

Los productos que resultan de multiplicar término a término varias proporciones geométricas forman proporción geométrica.

Sean las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ y $\frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''}$.

Vamos a demostrar que $\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''} = \frac{c \times c' \times c''}{d \times d' \times d''}$.

En efecto, multiplicando miembro a miembro las tres proporciones dadas, tendremos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'} \times \frac{c''}{d''}$$

y efectuando la multiplicación de estas fracciones, tendremos:

$$\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''} = \frac{c \times c' \times c''}{d \times d' \times d''}$$

que era lo que queríamos demostrar.

De las proporciones $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ y $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ resulta $\frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 4 \times 5} = \frac{3 \times 3 \times 2}{6 \times 12 \times 10}$ o sea $\frac{1}{40} = \frac{18}{720}$ que es legítima porque $1 \times 720 = 40 \times 18$.

Ejemplo

TEOREMA

663

Con los cuatro términos de dos productos iguales se puede formar proporción geométrica.

Sean los productos $a \times d = c \times b$. Vamos a demostrar que con sus cuatro términos podemos formar la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En efecto, dividiendo los dos miembros de la igualdad $a \times d = c \times b$ entre $b \times d$, tendremos:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}$$

y simplificando los factores iguales en el numerador y denominador, queda: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ que era lo que queríamos demostrar.

De $5 \times 4 = 10 \times 2$ resulta $\frac{5}{10} = \frac{2}{4}$

Ejemplo

III. PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS**TEOREMA. DIVERSAS OPERACIONES QUE PUEDEN VERIFICARSE CON LOS TÉRMINOS DE UNA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA**

664

Con los términos de una proporción geométrica pueden verificarse las operaciones siguientes, sin que la proporción varíe:

1) Multiplicar o dividir todos los términos entre un mismo número.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Tendremos: $\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{c \times m}{d \times m}$ y $\frac{a \div m}{b \div m} = \frac{c \div m}{d \div m}$ porque al multiplicar o dividir los dos términos de un quebrado entre un mismo número, el quebrado o razón no varía.

En $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tenemos:

$$\frac{4 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} \text{ o sea } \frac{8}{12} = \frac{4}{6} \quad \text{legítima porque } 8 \times 6 = 12 \times 4$$

$$\text{y } \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2 \div 2}{3 \div 2} \text{ o sea } \frac{2}{3} = \frac{1}{1.5} \quad \text{" " } 2 \times 1.5 = 1 \times 3$$

Ejemplo

2) Multiplicar o dividir los antecedentes entre un mismo número.

$$\frac{a \times m}{b} = \frac{c \times m}{d} \text{ y } \frac{a \div m}{b} = \frac{c \div m}{d}$$

porque al multiplicar o dividir los numeradores de los dos quebrados o razones entre un mismo número, ambos quebrados quedan multiplicados en el primer caso, divididos en el segundo entre el mismo número, luego la igualdad no varía.

Ejemplo

En $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tenemos:

$$\frac{4 \times 2}{6} = \frac{2 \times 2}{3} \text{ o sea } \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{legítima porque } 8 \times 3 = 6 \times 4$$

$$\text{y } \frac{4 \div 2}{6} = \frac{2 \div 2}{3} \text{ o sea } \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{" " } 2 \times 3 = 6 \times 1$$

3) Multiplicar o dividir los consecuentes entre un mismo número.

$$\frac{a}{b \times m} = \frac{c}{d \times m} \text{ y } \frac{a}{b \div m} = \frac{c}{d \div m}$$

porque al multiplicar o dividir los denominadores de los dos quebrados o razones entre un mismo número, ambos quebrados quedan divididos en el primer caso y multiplicados en el segundo entre el mismo número, luego la igualdad no varía.

Ejemplo

En $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tenemos:

$$\frac{4}{6 \times 2} = \frac{2}{3 \times 2} \text{ o sea } \frac{4}{12} = \frac{2}{6} \quad \text{legítima porque } 4 \times 6 = 12 \times 2$$

$$\text{y } \frac{4}{6 \div 3} = \frac{2}{3 \div 3} \text{ o sea } \frac{4}{2} = \frac{2}{1} \quad \text{" " } 4 \times 1 = 2 \times 2$$

4) Multiplicar o dividir los dos términos de una de las razones entre un mismo número.

$$\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{c}{d} \text{ y } \frac{a}{b \div m} = \frac{c \div m}{d \div m}$$

porque al multiplicar o dividir los dos términos de un quebrado entre un mismo número, el quebrado o razón no varía.

Ejemplo

En $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$ tenemos:

$$\frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{14}{4} \text{ o sea } \frac{35}{10} = \frac{14}{4} \quad \text{legítima porque } 35 \times 4 = 14 \times 10$$

$$\text{y } \frac{7 \div 2}{2 \div 2} = \frac{14}{4} \text{ o sea } \frac{3.5}{1} = \frac{14}{4} \quad \text{" " } 3.5 \times 4 = 14 \times 1$$

5) Elevar todos sus términos a una misma potencia.

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$$

porque si en la proporción o igualdad dada

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, elevamos sus dos miembros a una misma potencia, la igualdad no varía y tendremos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m \text{ o sea } \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$$

En $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ tenemos:

$$\frac{2^2}{3^2} = \frac{4^2}{6^2} \text{ o sea } \frac{4}{9} = \frac{16}{36} \text{ legítima porque } 4 \times 36 = 9 \times 16$$

Ejemplo

6) Extraer una misma raíz a todos los términos.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

porque si en la proporción o igualdad dada $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ extraemos una misma raíz a sus dos miembros, la igualdad no varía, y tendremos:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}} \text{ o sea } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

En $\frac{4}{9} = \frac{16}{36}$ tenemos:

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} \text{ o sea } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ legítima porque } 2 \times 6 = 3 \times 4$$

Ejemplo

TEOREMA

665

En toda proporción geométrica la suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su consecuente o antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su consecuente o antecedente.

Dividiremos la demostración en dos partes:

1) La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su consecuente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su consecuente.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.

En efecto, sumando o restando a los dos miembros de la igualdad o proporción dada la unidad, tendremos:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

y efectuando operaciones, queda: $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ que era lo que queríamos demostrar.

- 2) La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su antecedente.**

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$.

En efecto, invirtiendo las razones en la proporción dada, tendremos:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Sumando los dos miembros de esta igualdad con la unidad o restándolos de la unidad, tendremos:

$$1 \pm \frac{b}{a} = 1 \pm \frac{d}{c}$$

y efectuando operaciones, quedará: $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$ que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

En la proporción $\frac{10}{5} = \frac{4}{2}$ tenemos:

1) $\frac{10+5}{5} = \frac{4+2}{2}$ o sea $\frac{15}{5} = \frac{6}{2}$ legítima porque $15 \times 2 = 6 \times 5$

2) $\frac{10-5}{5} = \frac{4-2}{2}$ o sea $\frac{5}{5} = \frac{2}{2}$ " " $5 \times 2 = 5 \times 2$

3) $\frac{10+5}{10} = \frac{4+2}{4}$ o sea $\frac{15}{10} = \frac{6}{4}$ " " $15 \times 4 = 10 \times 6$

4) $\frac{10-5}{10} = \frac{4-2}{4}$ o sea $\frac{5}{10} = \frac{2}{4}$ " " $5 \times 4 = 10 \times 2$

666

TEOREMA

En toda proporción geométrica la suma o resta de los antecedentes es a la suma o resta de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$.

En efecto, cambiando los medios en la proporción dada, tendremos: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y según el teorema anterior: $\frac{a \pm c}{a} = \frac{b \pm d}{b}$

y cambiando los medios en esta última proporción, queda:

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$$

que era lo que queríamos demostrar.

En $\frac{10}{5} = \frac{2}{1}$ tenemos:

$$\frac{10+2}{5+1} = \frac{10}{5} \text{ o sea } \frac{12}{6} = \frac{10}{5} \text{ legítima porque } 12 \times 5 = 6 \times 10$$

$$\text{y } \frac{10-2}{5-1} = \frac{2}{1} \text{ o sea } \frac{8}{4} = \frac{2}{1} \quad " \quad " \quad 8 \times 1 = 4 \times 2$$

Ejemplo

TEOREMA

667

En toda proporción geométrica la suma de los dos términos de la primera razón es a su diferencia como la suma de los dos términos de la segunda razón es a su diferencia.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

En efecto, ya sabemos, por el número 665, que: $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$

Cambiando los medios, tendremos: $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$

Desarrollando en sus dos formas la igualdad anterior, tendremos:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} \text{ y } \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

y cambiando los medios en esta última proporción, queda:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

que era lo que queríamos demostrar.

En $\frac{12}{2} = \frac{6}{1}$ tenemos $\frac{12+2}{12-2} = \frac{6+1}{6-1}$ o sea

$$\frac{14}{10} = \frac{7}{5} \text{ legítima porque } 14 \times 5 = 10 \times 7$$

Ejemplo

668 TEOREMA

En toda proporción geométrica, la suma de los antecedentes es a su diferencia como la suma de los consecuentes es a su diferencia.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos a demostrar que $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$

En efecto: ya hemos demostrado que la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, luego

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$$

Desarrollando en sus dos formas la igualdad anterior, tendremos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ y } \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

y cambiando los medios en esta última proporción, queda:

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

En $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ tenemos $\frac{8+6}{8-6} = \frac{4+3}{4-3}$ o sea

$\frac{14}{2} = \frac{7}{1}$ legítima porque $14 \times 1 = 7 \times 2$

669 TEOREMA

En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Sea la serie de razones iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$. Vamos a demostrar que

$$\frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{a}{b}, \frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{c}{d} \text{ y } \frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{m}{n}$$

En efecto: para dos razones ya hemos demostrado (666) que la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, luego

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

y como $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ tendremos: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{m}{n}$

Aplicando a estas dos razones el mismo teorema antes citado, tendremos:

$$\frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{m}{n}$$

y como $\frac{m}{n} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tendremos: $\frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{a}{b}$ y $\frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{c}{d}$

que era lo que queríamos demostrar.

En $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ tenemos:

$$\frac{1+3+4}{2+6+8} = \frac{1}{2} \text{ o sea } \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ legítima porque } 8 \times 2 = 16 \times 1$$

$$\frac{1+3+4}{2+6+8} = \frac{3}{6} \text{ o sea } \frac{8}{16} = \frac{3}{6} \text{ legítima porque } 8 \times 6 = 16 \times 3$$

$$\frac{1+3+4}{2+6+8} = \frac{4}{8} \text{ o sea } \frac{8}{16} = \frac{4}{8} \text{ legítima porque } 8 \times 8 = 16 \times 4$$

300

1. Escribir la proporción $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ de ocho modos distintos.
2. Escribir de todos los modos posibles la proporción $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.
3. De $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ y $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, que tienen una razón común, se deduce que...
4. Formar la proporción que resulte de $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ y $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.
5. De las proporciones $\frac{2}{a} = \frac{3}{b}$ y $\frac{2}{m} = \frac{3}{n}$, que tienen los antecedentes iguales se deduce que...
6. Formar la proporción que resulte de $\frac{8}{a} = \frac{6}{b}$ y $\frac{20}{a} = \frac{15}{b}$.
7. Multiplicar término a término $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ y $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. R. $\frac{1}{6} = \frac{8}{48}$
8. Multiplicar término a término $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$ y $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. R. $\frac{10a}{21b} = \frac{100m}{210n}$
9. Enunciar cuatro teoremas de proporciones y aplicarlos a proporciones numéricas.
10. Enunciar seis teoremas de proporciones y aplicarlos a proporciones geométricas.
11. Formar la proporción que resulte de $3 \times 10 = 6 \times 5$. R. $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$
12. Formar la proporción que resulte en cada caso:
 - a) $3 \times 4 = m \times n$ R. $\frac{3}{m} = \frac{n}{4}$
 - b) $x \times y = a \times b$ R. $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$
 - c) $ax^2 = 5b^3$ R. $\frac{a}{5} = \frac{b^3}{x^2}$
 - d) $a(m-n) = 6(x-y)$ R. $\frac{a}{x-y} = \frac{6}{m-n}$
 - e) $3\sqrt{b} = m^2n$ R. $\frac{3}{m^2} = \frac{n}{\sqrt{b}}$
13. ¿La proporción $\frac{6}{5} = \frac{3}{2.5}$ resulta de $3 \times 5 = 6 \times 2.5$? Decir la razón.

14. ¿De los productos iguales $ax = pq$ resulta la proporción $\frac{a}{p} = \frac{x}{q}$? Decir la razón.
15. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ y $x + y = 10$. Hallar x y y . **R. $x = 4, y = 6$**
16. $\frac{7}{5} = \frac{a}{b}$ y $a - b = 30$. Hallar a y b . **R. $a = 105, b = 75$**
17. $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ Si $a + m = 45, b + n = 40$ y $m = 5$, ¿cuánto vale n ? **R. $\frac{40}{9}$**
18. $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ Siendo $x - m = 20, y - n = 15, n = 6$, ¿cuánto vale m ? **R. 8**
19. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Siendo $a + b = 40, a - b = 30, c + d = 50$, ¿cuánto vale $c - d$? **R. $37\frac{1}{2}$**
20. $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ Siendo $x - m = 10, y + n = 30, y - n = 20$, hallar $x + m$. **R. 15**
21. $\frac{a}{6} = \frac{b}{5}$ Sabiendo que $b + 5 = 15$, hallar a . **R. 12**
22. $\frac{m}{4} = \frac{n}{5}$ Siendo $m + n = 18$, ¿cuánto vale n ? **R. 10**
23. $\frac{a}{12} = \frac{b}{7}$ Siendo $a - b = 15$, ¿cuánto vale a ? **R. 36**
24. $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$ Siendo $a - b = 12$, ¿cuánto vale $a + b$? **R. 132**
25. La relación entre dos números es de 5 a 2. Hallar los números sabiendo que su suma es 49.
R. 35 y 14
26. La razón de dos números es $\frac{8}{3}$ y su diferencia 55. Hallar los números. **R. 88 y 33**
27. $\frac{a}{2} = \frac{m}{3} = \frac{n}{4}$ Hallar a, m y n sabiendo que $a + m + n = 36$. **R. $a = 8, m = 12, n = 16$**
28. $\frac{5}{c} = \frac{4}{d} = \frac{6}{e}$ Sabiendo que $c + d + e = 120$, hallar c, d y e . **R. $c = 40, d = 32, e = 48$**
29. $\frac{1}{m} = \frac{2}{n} = \frac{3}{x} = \frac{4}{y}$ Siendo $m + n + x + y = 14$, hallar m, n, x y y . **R. $m = 1\frac{2}{5}, n = 2\frac{4}{5}, x = 4\frac{1}{5}, y = 5\frac{3}{5}$**
30. Tres números cuya suma es 240 guardan entre sí la relación de los números 2, 3 y 5. Hallar los números. **R. 48, 72 y 120**



En la evolución del concepto de función ejercieron una influencia decisiva **Fourier** (francés, 1758-1830), **Cauchy** (francés, 1789-1857), **Dirichlet** (alemán, 1805-1859). Todos los trabajos de estos matemáticos contribuyeron al desarrollo de la

teoría de las funciones. Sin embargo, fue **Riemann** (alemán, 1826-1866), en su tesis de 1851, quien estableció las bases de la actual teoría de las funciones.

Capítulo **XLIII**

MAGNITUDES PROPORCIONALES

CANTIDAD VARIABLE Y CONSTANTE

670

Las cantidades que intervienen en una cuestión matemática son **variables** cuando varían, es decir, cuando pueden tomar diversos valores, y son **constantes** cuando tienen un valor fijo y determinado. Pondremos dos ejemplos,

- 1) Si un metro de tela cuesta \$2, el **costo** de una pieza de tela dependerá del **número de metros** que tenga la pieza. Si la pieza tiene 5 metros, el costo será \$10; si tiene 8 metros, el costo será \$16. Aquí el costo de un metro, \$2, que no varía, es una **constante**, mientras que el **número de metros** de la pieza y su **costo**, que toman diversos valores, son **variables**.

¿De qué depende en este caso el costo de la pieza? Del número de metros que tenga. Entonces, el **costo** de la pieza es la **variable dependiente** y el **número de metros** la **variable independiente**.

- 2) Si un móvil tiene una velocidad constante de 6 m por s, el **espacio** que recorra dependerá del **tiempo** que esté andando. Si anda durante 2 s, recorrerá un espacio de 12 m; si anda durante 5 s recorrerá un espacio de 30 m. Aquí la velocidad, 6 m, es una constante, mientras que el **tiempo** y el **espacio** recorrido que toman sucesivos valores son **variables**.

¿De qué depende en este caso el espacio recorrido? Del tiempo que ha estado andando el móvil. Entonces, el **tiempo** es la variable **independiente** y el **espacio** recorrido es la variable **dependiente**.

671

CONCEPTO DE FUNCIÓN

En el ejemplo 1) anterior, el costo de la pieza depende del número de metros que tenga; el costo de la pieza es **función** del número de metros.

En el ejemplo 2) anterior el espacio recorrido depende del tiempo que ha estado andando el móvil; el espacio recorrido es **función** del tiempo.

Siempre que una cantidad variable depende de otra se dice que es función de esta última.

La definición moderna de función, debida a Cauchy, es la siguiente: **Se dice que y es función de x cuando a cada valor de la variable x corresponden uno o varios valores de la variable y .**

La notación para expresar que y es función de x es $y = f(x)$.

672

EJEMPLOS ARITMÉTICOS Y GEOMÉTRICOS DE FUNCIONES

Para aclarar el concepto de función exponemos a continuación algunos ejemplos.

FUNCIONES ARITMÉTICAS

- 1) El costo de una pared depende, entre otras cosas, de su superficie; luego, el costo es función de la superficie: **costo** = f (**superficie**).
- 2) El trabajo realizado por cierto número de obreros depende del número de días que trabajen; luego, el trabajo realizado es función del número de días: **trabajo realizado** = f (**tiempo**).
- 3) El tiempo empleado en hacer una obra depende del número de obreros empleados; luego, el tiempo es función del número de obreros: **tiempo** = f (**obreros**).
- 4) El interés mensual que produce un capital de \$5,000, por ejemplo, depende del tanto por ciento a que esté colocado; luego, el interés es función del tanto por ciento: $I = f(r)$.
- 5) El salario de un obrero depende del tiempo que haya trabajado; luego, el salario es función del número de días de trabajo: **salario** = f (**tiempo**).

FUNCIONES GEOMÉTRICAS

- 1) Si la base de un rectángulo es fija, el área del rectángulo depende de la altura, pues cuanto mayor sea la altura, mayor será el área; luego, el área de un rectángulo es función de su altura.

Del propio modo, si la altura es fija, cuanto mayor sea la base, mayor será el área; luego, el área es también función de la base.

De modo que el área de un rectángulo es función de la base y de la altura: $A = f(b, h)$.

- 2) El área de un cuadrado depende de la longitud de su diagonal; luego, el área de un cuadrado es función de su diagonal: $A = f(d)$.
- 3) El área de un círculo depende de la longitud del radio; luego, el área de un círculo es función del radio: $A = f(r)$.
- 4) El volumen de un ortoedro depende de su ancho, su largo y su altura; luego, el volumen es función del ancho, del largo y de la altura: $V = f(a, l, h)$.

MAGNITUDES PROPORCIONALES

673

Dos magnitudes son **proporcionales** cuando multiplicando o dividiendo una de ellas entre un número, la otra queda multiplicada o dividida (o viceversa) entre el mismo número.

Las magnitudes **proporcionales** pueden ser **directamente proporcionales** e **inversamente proporcionales**.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES son dos magnitudes tales que, **multiplicando** una de ellas por un número, la otra queda **multiplicada** por el mismo número y **dividiendo** una de ellas entre un número, la otra queda **dividida** entre el mismo número.

674

Si una cuadrilla de obreros puede hacer en 4 días 20 metros de una obra, en 8 días (doble número de días) hará 40 metros de la misma obra (doble número de metros) y en 2 días (la mitad del número de días) hará 10 metros (la mitad del número de metros). Por lo tanto, el *tiempo* y las *unidades de trabajo realizadas* son magnitudes directamente proporcionales o están en *razón directa*.

Ejemplo

Son magnitudes directamente proporcionales:

El *tiempo* y las *unidades de trabajo* realizadas.

El *número de cosas* y el *precio* cuando se paga a razón del número.

El *peso* y el *precio de una mercancía*, cuando se paga a razón del peso.

El *tiempo de trabajo* y el *salario* de un obrero.

El *espacio* con la *velocidad*, si el tiempo no varía.

El *espacio* con el *tiempo*, si la velocidad no varía.

El *número de obreros* empleado y el *trabajo realizado*.

675 **MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES** son dos magnitudes tales que, **multiplicando** una de ellas por un número, la otra queda **dividida** entre el mismo número, y **dividiendo** una de ellas entre un número, la otra queda **multiplicada** por el mismo número.

Ejemplo

Si 4 hombres pueden hacer una obra en 6 días, 8 hombres (doble número de hombres) harían la misma obra en 3 días (la mitad del número de días) y 2 hombres (la mitad del número de hombres) harían la obra en 12 días (doble número de días). Por lo tanto, el *número de hombres* y el *tiempo necesario* para hacer una obra son magnitudes inversamente proporcionales o están en *razón inversa*.

Son magnitudes inversamente proporcionales:

El *número de obreros empleado* y el *tiempo necesario* para hacer una obra.

Los *días de trabajo* y las *horas diarias* que se trabajan.

La *longitud* con el *ancho* y la *altura* y en general cualquier dimensión de un cuerpo con otra, si la superficie o el volumen del cuerpo permanecen constantes.

La *velocidad* de un móvil con el *tiempo* empleado en recorrer un espacio.

676 RAZÓN DE PROPORCIONALIDAD

Siempre que dos magnitudes sean directamente proporcionales, la relación entre dos de sus cantidades correspondientes es **constante**.

Así, si 5 m de tela cuestan \$10, 10 m costarán \$20, y 20 m costarán \$40, y la relación entre cada dos de estas cantidades correspondientes es constante:

$$\frac{\$10}{5} = 2 \quad \frac{\$20}{10} = 2 \quad \frac{\$40}{20} = 2$$

y esta relación constante es lo que se llama **razón de proporcionalidad** entre la magnitud pesos y la magnitud metros.

En general, siendo A y B directamente proporcionales, la relación constante $\frac{A}{B}$ se llama **razón de proporcionalidad** entre la magnitud A y la magnitud B .

677 RAZONES DIRECTAS E INVERSAS

Si tenemos cuatro cantidades, homogéneas dos a dos y proporcionales; por ejemplo:

1ª		3ª
3 naranjas	cuestan	5 ¢
6 naranjas	"	10 ¢
2ª		4ª

y establecemos con ellas el **orden** que se ha indicado, llamamos **razones directas** a las razones $\frac{3}{6}$ y $\frac{5}{10}$, o sea las razones $\frac{1^{\text{a}} \text{ cantidad}}{2^{\text{a}} \text{ cantidad}}$ y $\frac{3^{\text{a}} \text{ cantidad}}{4^{\text{a}} \text{ cantidad}}$ y **razones inversas** a las razones $\frac{6}{3}$ y $\frac{10}{5}$, o sea a las razones $\frac{2^{\text{a}} \text{ cantidad}}{1^{\text{a}} \text{ cantidad}}$ y $\frac{4^{\text{a}} \text{ cantidad}}{3^{\text{a}} \text{ cantidad}}$.

MODO DE FORMAR PROPORCIÓN CON CANTIDADES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

678

Si tenemos cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, y directamente proporcionales; por ejemplo:

1ª		3ª
5 libros	cuestan	\$15
10 libros	"	\$30
2ª		4ª

tenemos que las **razones directas son iguales**. Así, en este caso, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ y $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$; y si las dos razones directas son iguales, podemos igualarlas y tendremos la proporción:

$$\frac{5}{10} = \frac{15}{30}$$

Por tanto, para formar proporción con cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, **directamente proporcionales** se **igual**a la **razón directa** de las dos primeras con la **razón directa** de las dos últimas.

MODO DE FORMAR PROPORCIÓN CON CANTIDADES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

679

Si tenemos cuatro cantidades, homogéneas dos a dos e inversamente proporcionales, por ejemplo:

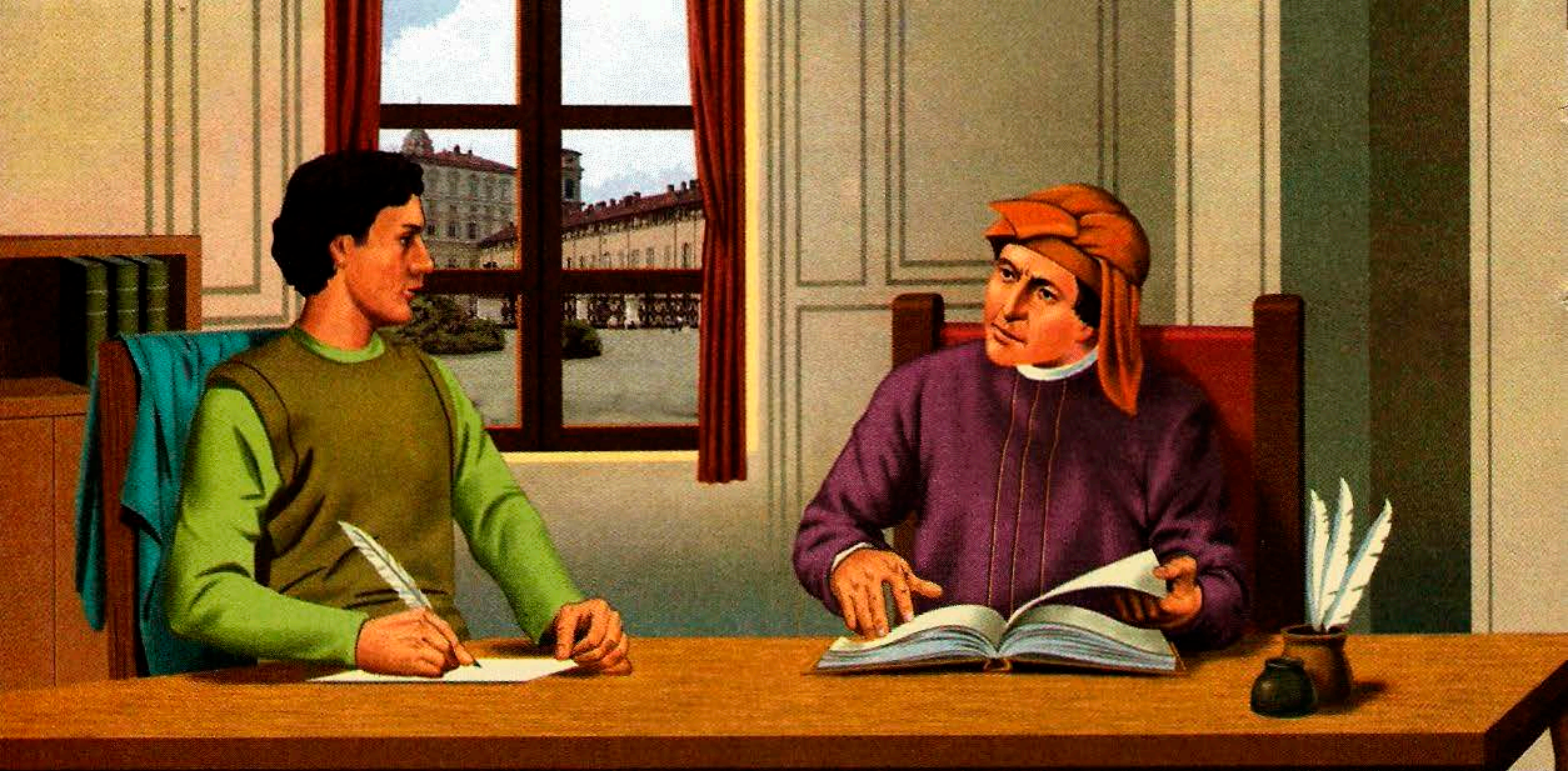
1ª		3ª
3 hombres	hacen una obra en	8 días
6 hombres	harían la misma obra en	4 días
2ª		4ª

tenemos que la **razón directa** de las dos primeras es igual a la **razón inversa** de las dos últimas y viceversa. Así, en este caso $\frac{3}{6}$ (directa) = $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$ (inversa) = $\frac{1}{2}$; $\frac{6}{3}$ (inversa) = 2 y $\frac{8}{4}$

(directa) = 2; y si la razón directa de las dos primeras es igual a la razón inversa de las dos últimas y viceversa, podemos igualar una razón directa con una inversa y tendremos la proporción:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \text{ o } \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$$

Por tanto, para formar proporción con cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, **inversamente proporcionales**, se **igual**a la **razón directa** de las dos primeras con la **razón inversa** de las dos últimas o viceversa.



Aunque griegos y romanos conocían las proporciones no llegaron a aplicarlas a la resolución de los problemas de regla de tres. En la Edad Media los árabes la dieron a conocer. **Leonardo de Pisa** la difundió a principios del siglo XIII, en su *Liber*

Abacís, con el nombre de “regla de los tres números conocidos”; “regla de los mercaderes”; “regla áurea”; y también con el de “regla de los traficantes”.

Capítulo **XLIV**

REGLA DE TRES

APLICACIONES ARITMÉTICAS DE LA PROPORCIONALIDAD

680 La **regla de tres** es una operación que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción, cuando se conocen tres.

La regla de tres puede ser **simple** y **compuesta**.

Es **simple** cuando solamente intervienen en ella dos magnitudes y es **compuesta** cuando intervienen tres o más magnitudes.

681 SUPUESTO Y PREGUNTA

En una regla de tres el **supuesto** está constituido por los datos de la parte del problema que ya se conoce y la **pregunta** por los datos de la parte del problema que contiene la **incógnita**.

Así, en el problema: si 4 libros cuestan \$8, ¿cuánto costarán 15 libros?, el supuesto está constituido por 4 libros y \$8, y la pregunta por 15 libros y x pesos.

682 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

La regla de tres se puede resolver por tres métodos: 1) método de reducción a la unidad, 2) método de las proporciones, y 3) método práctico.

I. MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

683

Si 4 libros cuestan \$8, ¿cuánto costarán 15 libros?

Supuesto 4 libros \$ 8

Pregunta 15 " \$ x

Si 4 libros cuestan \$8, un libro costará 4 veces menos: $\$8 \div 4 = \2 y 15 libros costarán 15 veces más, $\$2 \times 15 = \30 . R.

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

684

4 hombres hacen una obra en 12 días. ¿En cuántos días podrían hacer la misma obra 7 hombres?

Supuesto 4 hombres 12 días

Pregunta 7 " x "

Si 4 hombres hacen la obra en 12 días, 1 hombre tardaría para hacerla 4 veces más: $4 \times 12 = 48$ días y 7 hombres tardarían 7 veces menos:

$$\frac{48}{7} = 6\frac{6}{7} \text{ días R.}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA

685

3 hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 metros de una obra en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 60 metros de la misma obra?

Supuesto 3 hombres 8 h diarias 80 m 10 días

Pregunta 5 hombres 6 h diarias 60 m x días

Si 3 hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 metros de la obra en 10 días, 1 hombre tardará 3 veces más y 5 hombres, 5 veces menos:

$$\frac{10 \times 3}{5} \text{ días, trabajando 8 horas diarias}$$

Si en lugar de trabajar 8 horas diarias, trabajaran 1 hora diaria, tardarían 8 veces más y trabajando 6 horas diarias, tardarían 6 veces menos:

$$\frac{10 \times 3 \times 8}{5 \times 6} \text{ días, para hacer 80 metros}$$

Si en lugar de hacer 80 m hicieran 1 metro, tardarían 80 veces menos y para hacer 60 m tardarían 60 veces más:

$$\frac{10 \times 3 \times 8 \times 60}{5 \times 6 \times 80} \text{ días}$$

$$\text{Luego: } x = \frac{10 \times 3 \times 8 \times 60}{5 \times 6 \times 80} = 6 \text{ días R.}$$

II. MÉTODO DE LAS PROPORCIONES

Aplicaremos este método a los ejemplos anteriores.

686

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Si 4 libros cuestan \$8, ¿cuánto costarán 15 libros?

Supuesto 4 libros \$ 8

Pregunta 15 " \$ x

Como a **más** libros, **más** pesos, estas cantidades son directamente proporcionales y sabemos (678) que la proporción se forma igualando las **razones directas**:

$$\frac{4}{15} = \frac{8}{x} \therefore x = \frac{8 \times 15}{4} = \$30 \quad \text{R.}$$

687

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

4 hombres hacen una obra en 12 días. ¿En cuántos días podrían hacer la obra 7 hombres?

Supuesto 4 hombres, 12 días

Pregunta 7 " " x "

Como a **más** hombres, **menos** días, estas cantidades son inversamente proporcionales y sabemos (679) que la proporción se forma igualando la **razón directa** de las dos primeras con la **razón inversa** de las dos últimas o viceversa:

$$\frac{7}{4} = \frac{12}{x} \therefore x = \frac{4 \times 12}{7} = 6\frac{6}{7} \text{ días} \quad \text{R.}$$

688

REGLA DE TRES COMPUESTA

3 hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 metros de una obra en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 60 metros de la misma obra?

Supuesto 3 hombres 8 h diarias 80 m 10 días

Pregunta 5 " 6 " " 60 " x "

El método de las proporciones consiste en descomponer la regla de tres compuesta en reglas de tres simples y luego multiplicar ordenadamente las proporciones formadas.

Al formar cada regla de tres simple, consideramos que las demás magnitudes no varían.

En este caso, tenemos 3 proporciones:

1ª 3 hombres hacen la obra en 10 días
 5 " la harán en y "

A **más** hombres, **menos** días; luego, son inversamente proporcionales: $\frac{5}{3} = \frac{10}{y}$ (1)

2ª Se emplean y días trabajando 8 horas diarias
 se emplearán y' " " 6 " "

A **más** días, **menos** horas diarias; luego, son inversamente proporcionales: $\frac{6}{8} = \frac{y}{y'}$ (2)

3ª Se emplean y' días para hacer 80 m de la obra
 se emplearán x " " " 60 " " "

A **más** días, **más** metros; luego, son directamente proporcionales: $\frac{80}{60} = \frac{y'}{x}$ (3)

Multiplicando término a término las proporciones (1), (2) y (3), tenemos: $\frac{5 \times 6 \times 80}{3 \times 8 \times 60} = \frac{10 \times y \times y'}{y \times y' \times x}$

Simplificando, queda: $\frac{5}{3} = \frac{10}{x} \therefore x = \frac{10 \times 3}{5} = 6 \text{ días}$ R.

III. MÉTODO PRÁCTICO

REGLA PRÁCTICA PARA RESOLVER CUALQUIER PROBLEMA DE REGLA DE TRES SIMPLE O COMPUESTA

689

Se escriben el supuesto y la pregunta. Hecho esto, se compara cada una de las magnitudes con la incógnita (suponiendo que las demás no varían), para ver si son directa o inversamente proporcionales con la incógnita. A las magnitudes que sean directamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo + y encima un signo -, y a las magnitudes que sean inversamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo - y encima un signo +. El valor de la incógnita x , será igual al valor conocido de su misma especie (al cual siempre se le pone +), multiplicado por todas las cantidades que llevan el signo +, dividiendo este producto entre el producto de las cantidades que llevan el signo -.

Resolveremos primero los ejemplos que hemos resuelto por los métodos anteriores y después otros ejemplos más, ya que este método es el más rápido.

690

REGLA DE TRES SIMPLE

Si 4 libros cuestan \$8, ¿cuánto costarán 15 libros?

Supuesto.....	4	libros.....	\$ 8
Pregunta.....	15	"	\$ x

Comparamos: a **más** libros, **más** pesos; luego, estas magnitudes son directamente proporcionales; ponemos + debajo de los libros y – encima; ponemos + también a \$8.

Ahora, el valor de x será igual al producto de 8 por 15, que son los que tienen el signo +, dividido entre 4 que tiene –, y tendremos:

$$x = \frac{8 \times 15}{4} = \$30 \quad \text{R.}$$

691

4 hombres hacen una obra en 12 días. ¿En cuántos días podrían hacer la obra 7 hombres?

Supuesto.....	4	hombres.....	12	días
Pregunta.....	7	"	x	"

Comparamos: a **más** hombres, **menos** días; luego, son inversamente proporcionales. Ponemos – debajo de hombres y + arriba; ponemos + también a 12 días.

Ahora, el valor de x será igual al producto de 12 por 4, que son los que tienen el signo + dividido entre 7 que tiene –, y tendremos:

$$x = \frac{12 \times 4}{7} = 6\frac{6}{7} \text{ días} \quad \text{R.}$$

692

Una cuadrilla de obreros ha hecho una obra en 20 días trabajando 6 horas diarias. ¿En cuántos días habrían hecho la obra si hubieran trabajado 8 horas diarias?

Supuesto.....	20	días.....	6	horas diarias
Pregunta.....	x	"	8	"

A **más** días, **menos** horas diarias; ponemos – debajo de horas diarias y + encima; ponemos + a 20 días y el valor de x será:

$$x = \frac{20 \times 6}{8} = 15 \text{ días} \quad \text{R.}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA

693

3 hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 metros de una obra en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 hombres trabajando 6 horas diarias para hacer 60 metros de la misma obra?

Supuesto.	⁺ 3	⁺ 8	⁻ 80	⁺ 10
Pregunta	5	6	60	x
	⁻	⁻	⁺	

Comparamos: a **más hombres**, **menos días**; ponemos - debajo de hombres y + encima; a **más horas diarias** de trabajo, **menos días** en hacer la obra: ponemos - debajo de horas diarias y + encima; a **más metros**, **más días**, ponemos + debajo de metros y - encima; ponemos + también a 10 días.

El valor de x será el producto de 10 por 60, por 8 y por 3, que son los que tienen signo + dividido entre el producto de 80 por 6 y por 5, que son los que tienen signo -, y tendremos:

$$x = \frac{10 \times 60 \times 8 \times 3}{80 \times 6 \times 5} = 6 \text{ días} \quad \text{R.}$$

Una guarnición de 1,600 hombres tiene víveres para 10 días a razón de 3 raciones diarias cada hombre. Si se refuerza con 400 hombres, ¿cuántos días durarán los víveres si cada hombre toma 2 raciones diarias?

694

Escribimos el supuesto y la pregunta:

Supuesto.	1,600	hombres	10	días	3	rationes diarias
Pregunta	2,000	"	x	"	2	"

Comparamos: a **más hombres**, suponiendo que las raciones no varían, **menos días** durarán los víveres: ponemos signo - debajo de los hombres y + encima; a **más raciones diarias**, suponiendo que el número de hombres no varía, **menos días** durarán los víveres: ponemos signo - debajo de raciones y signo + encima; además ponemos + en 10 días, y tendremos:

⁺ 1,600	⁺ hombres	⁺ 10	⁺ días	⁺ 3	⁺ rationes diarias
2,000	"	x	"	2	"
⁻				⁻	

Entonces, x será igual al producto de las cantidades que tienen el signo +, que son 3, 1,600 y 10, dividido entre el producto de las que tienen el signo -, que son 2,000 y 2, y tendremos:

$$x = \frac{1,600 \times 10 \times 3}{2,000 \times 2} = 12 \text{ días} \quad \text{R.}$$

695

Se emplean 10 hombres durante 5 días, trabajando 4 horas diarias, para cavar una zanja de 10 m de largo, 6 m de ancho y 4 m de profundidad. ¿Cuántos días necesitarán 6 hombres, trabajando 3 horas diarias, para cavar otra zanja de 15 m de largo, 3 m de ancho y 8 m de profundidad, en un terreno de doble dificultad?

Escribimos el supuesto y la pregunta, teniendo en cuenta que, como en el supuesto no se da dificultad y en la pregunta sí, se considera que la dificultad del supuesto es 1 y tendremos:

+	+	+	-	-	-	-
10 h	5 días	4 h. d.	10 m l.	6 m a.	4 m prof.	1 dif.
6 "	x "	3 "	15 "	3 "	8 "	2 "
-		-	+	+	+	+

Comparamos: a **más hombres** trabajando, **menos días** se tardaría en terminar la obra: ponemos signo - debajo de hombres y + encima; a **más horas diarias** de trabajo, **menos días** se tardaría: ponemos signo - debajo de horas diarias y + encima; a **más metros de largo**, **más días**: ponemos signo + debajo de metros de largo y - encima; a **más metros de ancho**, **más días**: ponemos signo + debajo de metros de ancho y signo - encima; a **más metros de profundidad**, **más días**: ponemos + debajo de metros de profundidad y - encima; a **más dificultad**, **más días**: ponemos signo + debajo de dificultad y - encima; también ponemos + en 5 días.

Entonces, x será igual al producto de las cantidades que tienen el signo +, que son 10, 5, 4, 15, 3, 8 y 2, dividido entre el producto de las que tienen el signo -, que son 6, 3, 10, 6, 4 y 1, o sea:

$$x = \frac{10 \times 5 \times 4 \times 15 \times 3 \times 8 \times 2}{6 \times 3 \times 10 \times 6 \times 4 \times 1} = 33\frac{1}{3} \text{ días} \quad \text{R.}$$

301

Ejercicio

- Si 4 libros cuestan 20 balboas, ¿cuánto costarán 3 docenas de libros? **R. 180 balboas**
- Si una vara de 2.15 m de longitud da una sombra de 6.45 m, ¿cuál será la altura de una torre cuya sombra, a la misma hora, es de 51 m? **R. 17 m**
- Una torre de 25.05 m da una sombra de 33.40 m. ¿Cuál será, a la misma hora, la sombra de una persona cuya estatura es 1.80 m? **R. 2.40 m**
- Si $\frac{1}{2}$ docena de una mercancía cuesta 14.50 dólares, ¿cuánto importarán 5 docenas de la misma? **R: 145 dólares**
- Los $\frac{2}{5}$ de capacidad de un estanque son 500 litros. ¿Cuál será la capacidad de los $\frac{3}{8}$ del mismo estanque? **R. $468\frac{3}{4}$ ℓ**
- Los $\frac{3}{7}$ de la capacidad de un estanque son 8,136 litros. Hallar la capacidad del estanque. **R. 18,984 ℓ**

7. Dos individuos arriendan una finca. El primero ocupa los $\frac{5}{11}$ de la finca y paga 6,000 balboas de alquiler al año. ¿Cuánto paga de alquiler anual el segundo? **R. 7,200 balboas**
8. Una casa es de dos hermanos. La parte del primero, que es los $\frac{5}{13}$ de la casa, está valuada en 15,300 dólares. Hallar el valor de la parte del otro hermano. **R. 24,480 dólares**
9. Una cuadrilla de obreros emplea 14 días, trabajando 8 horas diarias, en realizar cierta obra. Si hubiera trabajado una hora menos al día, ¿en cuántos días habrían terminado la obra?
R. 16 días
10. 9 hombres pueden hacer una obra en 5 días. ¿Cuántos hombres más harían falta para hacer la obra en un día? ¿Cuántos hombres menos para hacerla en 15 días? **R. 36 hombres más; 6 hombres menos.**
11. A la velocidad de 30 km/h un automóvil emplea $8\frac{1}{4}$ horas en ir de una ciudad a otra. ¿Cuánto tiempo menos se hubiera tardado si la velocidad hubiera sido triple? **R. $5\frac{1}{2}$ h menos**
12. Una pieza de tela tiene 32.32 m de largo y 75 cm de ancho. ¿Cuál será la longitud de otra pieza, de la misma superficie, cuyo ancho es de 80 cm? **R. 30.30 m**
13. Una mesa tiene 6 m de largo y 1.50 m de ancho. ¿Cuánto se debe disminuir la longitud, para que sin variar la superficie, el ancho sea de 2 m? **R. 1.50 m**
14. Una fuente da 120 daℓ de agua en 10 minutos. ¿Cuántos litros más dará en $12\frac{1}{12}$ minutos?
R. 250 ℓ más
15. Un móvil recorre 3 cordeles 6 varas en 4 minutos. ¿Qué tiempo empleará en recorrer 198.432 m?
R. 12 min
16. Se compran 3 @ 15 libras de una mercancía por \$450. ¿A cómo sale el kilogramo?
R. \$10.85
17. Un móvil recorre 2 yardas, 1 pie, 6 pulgadas en $\frac{3}{4}$ de minuto. ¿Qué distancia recorrerá en 3 minutos 4 segundos? **R. 10 yardas 8 pulgadas**
18. Una persona que debe Q1,500 conviene con sus acreedores en pagar 0.75 por cada quetzal. ¿Cuánto tiene que pagar? **R. Q1,125**
19. Ganando \$3.15 en cada metro de tela, ¿cuántos metros se han vendido si la ganancia ha sido \$945? **R. 300 m**
20. Dos piezas de paño de la misma calidad cuestan, una \$450 y otra \$300. Si la primera tiene 15 m más que la segunda, ¿cuál es la longitud de cada pieza? **R. 45 m; 30 m**
21. Una guarnición de 1,300 hombres tiene víveres para 4 meses. Si se quiere que los víveres duren 10 días más; ¿cuántos hombres habrá que rebajar de la guarnición? **R. 100 hombres**
22. Un obrero tarda $12\frac{3}{5}$ en hacer $\frac{7}{12}$ de una obra. ¿Cuánto tiempo necesitará para terminar la obra?
R. 9 días
23. Una guarnición de 500 hombres tiene víveres para 20 días a razón de 3 raciones diarias. ¿Cuántas raciones diarias tomará cada hombre si se quiere que los víveres duren 5 días más?
R. $2\frac{2}{5}$ raciones diarias

24. Dos números están en la relación de 5 a 3. Si el mayor es 655, ¿cuál es el menor? **R. 393**
25. Dos números están en relación de 19 a 17. Si el menor es 289, ¿cuál es el mayor? **R. 323**
26. Un ganadero compra 1,140 reses con la condición de recibir 13 por cada 12 que compre. ¿Cuántas reses debe recibir? **R. 1,235**
27. Al vender cierto número de computadoras por \$4,500 gano \$6 en cada \$100. ¿Cuánto me costaron las computadoras? **R. \$4,230**
28. Al vender cierto número de impresoras por \$960 pierdo \$8 en cada \$100. ¿Cuánto me costaron las impresoras? **R. \$1,036.80**
29. Dos números están en la relación de 6 a 1. Si la suma de los dos números es 42, ¿cuáles son los números? **R. 36 y 6**
30. Dos números guardan la relación de 4 a $\frac{1}{2}$. Si la suma de los dos números es 63, ¿cuáles son los números? **R. 56 y 7**
31. Se han empleado 8 días para cavar una zanja. Si la dificultad de otro terreno guarda con la dificultad del anterior la relación de 4 a 3, ¿cuántos días llevaría cavar una zanja igual en el nuevo terreno? **R. $10\frac{2}{3}$ días**
32. 8 hombres han cavado en 20 días una zanja de 50 m de largo, 4 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿En cuánto tiempo hubieran cavado la zanja 6 hombres menos? **R. 80 días**
33. Una calle de 50 m de largo y 8 m de ancho se halla pavimentada con 20,000 adoquines. ¿Cuántos adoquines serán necesarios para pavimentar otra calle de doble largo y cuyo ancho es los $\frac{3}{4}$ del ancho anterior? **R. 30,000 adoquines**
34. 10 hombres, trabajando en la construcción de un puente hacen $\frac{3}{5}$ de la obra en 8 días. Si retiran 8 hombres, ¿cuánto tiempo emplearán los restantes para terminar la obra? **R. $26\frac{2}{3}$ días**
35. Dos hombres han cobrado 350 colones por un trabajo realizado por los dos. El primero trabajó durante 20 días a razón de 9 horas diarias y recibió 150 colones. ¿Cuántos días, a razón de 6 horas diarias, trabajó el segundo? **R. 40 días**
36. Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar en 14 días cierta obra. Al cabo de 9 días sólo han hecho los $\frac{3}{7}$ de la obra. ¿Con cuántos hombres tendrán que ser reforzados para terminar la obra en el tiempo fijado? **R. 21 hombres**
37. Se emplean 12 hombres durante 6 días para cavar una zanja de 30 m de largo, 8 m de ancho y 4 m de alto, trabajando 6 horas diarias. Si se emplea doble número de hombres durante 5 días, para cavar otra zanja de 20 m de largo, 12 m de ancho y 3 m de alto, ¿cuántas horas diarias han trabajado? **R. $2\frac{7}{10}$ horas diarias**
38. Se emplean 14 hombres en hacer 45 m de una obra, trabajando durante 20 días. ¿Cuánto tiempo empleará la mitad de esos hombres en hacer 16 m de la misma obra, habiendo en esta obra triple dificultad que en la anterior? **R. $42\frac{2}{3}$ días**
39. Se emplean 14 días en hacer una obra de 15 m de largo, 8 m de ancho y 4.75 m de alto, a razón de 6 horas de trabajo cada día. Si se emplean 8 días en hacer otra obra del mismo ancho y de doble

largo, trabajando 7 horas diarias, y siendo la dificultad de esta obra los $\frac{3}{4}$ de la anterior, ¿cuál es la altura de la obra? **R. $2\frac{1}{9}$ m**

40. Un obrero emplea 9 días de 6 horas en hacer 270 m de una obra. ¿Cuántas horas deberá trabajar ese obrero para hacer otra obra de 300 m si la dificultad de la primera obra y la de la segunda están en relación de 3 a 4? **R. 80 horas**

41. Una pared de 5 m de largo, 1 m de alto y 0.07 m de espesor ha costado \$250. ¿Cuál será el espesor de otra pared de 14 m de largo y 0.70 m de alto, por la cual se pagan \$4,900? **R. 0.7 m**

42. En 10 días un hombre recorre 112 km a razón de 5 horas diarias de marcha. ¿Cuál será la distancia que recorrerá en 7.5 días a razón de $5\frac{1}{2}$ horas de marcha diaria, si disminuye su marcha de $\frac{1}{8}$? **R. 80.85 km**

43. 6 hombres trabajando durante 9 días, a razón de 8 horas diarias han hecho los $\frac{3}{8}$ de una obra. Si se refuerzan con 4 hombres, y los obreros trabajan ahora 6 horas diarias, ¿en cuántos días terminarán la obra? **R. 12 días**

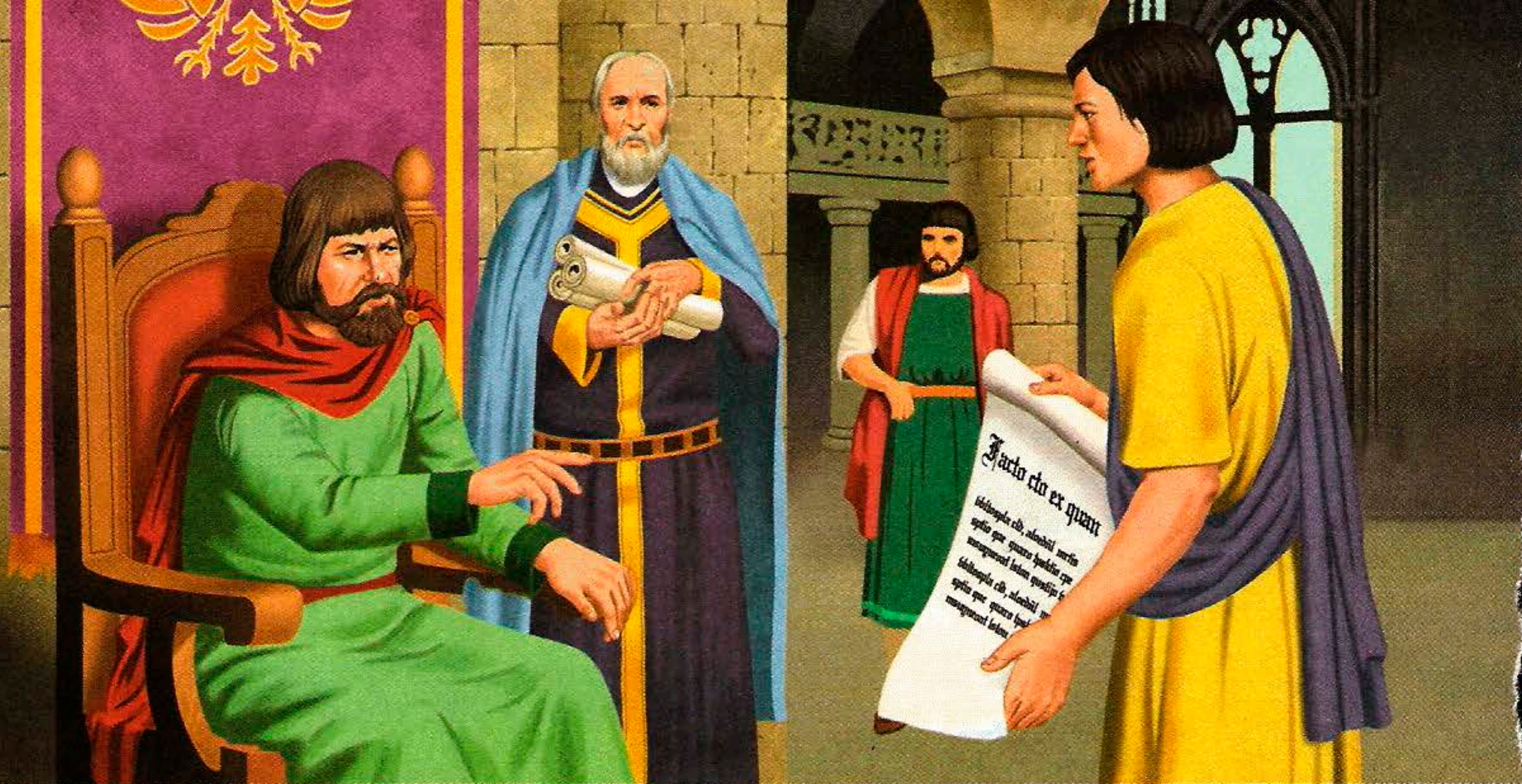
44. 50 hombres tienen provisiones para 20 días a razón de tres raciones diarias. Si las raciones se disminuyen de $\frac{1}{3}$ y se aumentan 10 hombres, ¿cuántos días durarán los víveres? **R. 25 días**

45. Si 20 hombres cavaron un pozo en 10 días trabajando 8 horas diarias y 40 hombres cavaron otro pozo igual en 8 días trabajando 5 horas diarias, ¿era la dificultad de la segunda obra mayor o menor que la de la primera? **R. Igual**

46. 30 hombres se comprometen a hacer una obra en 15 días. Al cabo de 9 días sólo han hecho los $\frac{3}{11}$ de la obra. Si el capataz refuerza la cuadrilla con 42 hombres, ¿podrán terminar la obra en el tiempo fijado o no, y si no es posible, cuántos días más necesitarán? **R. No; 4 días más**

47. 10 hombres se comprometieron a realizar en 24 días cierta obra. Trabajaron 6 días a razón de 8 horas diarias. Entonces se les pidió que acabaran la obra 8 días antes del plazo que se les dio al principio. Se colocaron más obreros, trabajaron todos 12 horas diarias y terminaron la obra en el plazo pedido. ¿Cuántos obreros se aumentaron? **R. 2 obreros**

48. Un capataz contrata una obra que debe comenzarse el día 1 de junio y terminarse el 5 de julio. El día 1 de junio pone a trabajar a 20 hombres, los cuales trabajan hasta el día 14 inclusive a razón de 6 horas diarias. Ese día el propietario le dice que necesita la obra terminada el día 24 de junio. Entonces, a partir del día 15, coloca más obreros, se trabajan 9 horas diarias en vez de 6 y logra complacer al propietario. ¿Cuántos obreros aumentó el capataz a partir del día 15? **R. 8 obreros**



El tanto por ciento aparece en las principales obras de Aritmética de los escritores italianos del siglo xv. El signo del tanto por ciento (%) surgió como una corrupción de la abreviatura de ciento (cto.), que se empleaba en las operaciones mercan-

tiles. El primero que utilizó el signo tal como lo usamos hoy fue **Delaporte**, que en 1685 lo expuso en su libro *Le Guide des Negocien* (Guía del comerciante).

Capítulo XLV

TANTO POR CIENTO

696 Se llama **tanto por ciento** de un número a una o varias de las **cien partes iguales** en que se puede dividir dicho número, es decir, uno o varios centésimos de un número. El signo del tanto por ciento es %.

Así, 4% de 80 o $\frac{4}{100}$ de 80 equivale a **cuatro centésimas partes** de 80, es decir, que 80 se divide en **cien** partes iguales y de ellas se toman **cuatro**.

El $5\frac{3}{4}\%$ de 150 significa que 150 se divide en **cien** partes iguales y de ellas se toman **cinco partes y tres cuartos**.

Es evidente que **100%** de un número es el mismo número. Así, 100% de 8 es 8. En el tanto por ciento se pueden presentar **cinco casos**.

697 HALLAR UN TANTO POR CIENTO DE UN NÚMERO

Ejemplo

1) Hallar 15% de 32.

Diremos: 100% de 32 es 32; 15% de 32, que es lo que busca, será x. Formaremos una regla de tres simple con estas cantidades y despejamos la x:

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \dots\dots & 32 \\ 15\% & \dots\dots & x \end{array} \quad \therefore x = \frac{32 \times 15}{100} = 4.8$$

Luego, el 15% de 32 es 4.8 **R.**

2) Hallar $\frac{1}{8}\%$ de 96.

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \dots\dots & 96 \\ \frac{1}{8}\% & \dots\dots & x \end{array} \therefore x = \frac{96 \times 1/8}{100} = 0.12 \quad \text{R.}$$

Hallar:

- | | | | |
|---------------------------|------------|-------------------------------|-----------|
| 1. 18% de 72 | R. 12.96 | 10. $\frac{1}{4}\%$ de 1,320 | R. 3.3 |
| 2. 35% de 180 | R. 63 | 11. $\frac{5}{12}\%$ de 144 | R. 0.6 |
| 3. 42% de 1,250 | R. 525 | 12. $4\frac{1}{2}\%$ de 150 | R. 6.75 |
| 4. 56% de 3,000 | R. 1,680 | 13. $1\frac{1}{2}\%$ de 1,854 | R. 27.81 |
| 5. 90% de 1,325 | R. 1,183.5 | 14. $6\frac{5}{7}\%$ de 49 | R. 3.29 |
| 6. $\frac{1}{2}\%$ de 18 | R. 0.09 | 15. 0.2% de 84 | R. 0.168 |
| 7. $\frac{2}{3}\%$ de 54 | R. 0.36 | 16. 0.03% de 560 | R. 0.168 |
| 8. $\frac{3}{5}\%$ de 108 | R. 0.648 | 17. 3.75% de 18 | R. 0.675 |
| 9. $\frac{2}{9}\%$ de 360 | R. 0.8 | 18. 5.34% de 23 | R. 1.2282 |

302

Ejercicio

CASOS ESPECIALES

698

Exponemos a continuación el modo rápido de hallar varios tantos por ciento de mucho uso.

1% de un número = $\frac{1}{100}$ del número; luego, **para hallar 1% de un número se divide el número entre 100.**

Así, 1% de 915 = $915 \div 100 = 9.15$ R.

2% de un número = $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ del número; luego, **para hallar 2% de un número se divide el número entre 50.**

Así, 2% de 350 = $350 \div 50 = 7$ R.

4% de un número = $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ del número; luego **para hallar 4% de un número se divide el número entre 25.**

Así, 4% de 750 = $750 \div 25 = 30$ R.

5% de un número = $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ del número; luego, **para hallar 5% de un número se divide el número entre 20.**

Así, 5% de 1,860 = $1,860 \div 20 = 93$ R.

10% de un número = $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ del número; luego, **para hallar 10% de un número se divide el número entre 10.**

Así, 10% de 56.78 = $56.78 \div 10 = 5.678$ R.

$12\frac{1}{2}\%$ de un número = $\frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{8}$ del número; luego, **para hallar $12\frac{1}{2}\%$ de un número se divide el número entre 8.**

Así, $12\frac{1}{2}\%$ de 48 = $48 \div 8 = 6$ R.

$16\frac{2}{3}\%$ de un número = $\frac{16\frac{2}{3}}{100} = \frac{1}{6}$ del número; luego, **para hallar $16\frac{2}{3}\%$ de un número se divide el número entre 6.**

Así, $16\frac{2}{3}\%$ de 78 = $78 \div 6 = 13$ R.

20% de un número = $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ del número; luego, **para hallar 20% de un número se divide el número entre 5.**

Así, 20% de 1,215 = $1,215 \div 5 = 243$ R.

25% de un número = $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ del número; luego, **para hallar 25% de un número se divide el número entre 4.**

Así, 25% de 1,496 = $1,496 \div 4 = 374$ R.

$33\frac{1}{3}\%$ de un número = $\frac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{1}{3}$ del número; luego, **para hallar $33\frac{1}{3}\%$ de un número se divide el número entre 3.**

Así, $33\frac{1}{3}\%$ de 18 = $18 \div 3 = 6$ R.

40% de un número = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ del número; 60% = $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ del número; 80% = $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ del número; luego, **para hallar 40%, 60%, u 80% de un número se divide el número entre 5 y se multiplica por 2, 3 o 4.**

Así, 40% de 105 = $\frac{105 \times 2}{5} = 42$; 60% de 90 = $\frac{90 \times 3}{5} = 54$; 80% de 55 = $\frac{55 \times 4}{5} = 44$ R.

50% de un número = $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ del número; luego, **para hallar 50% de un número se divide el número entre 2.**

Así, 50% de 45 = $45 \div 2 = 22\frac{1}{2}$ R.

75% de un número = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ del número; luego, **para hallar 75% de un número se divide el número entre 4 y se multiplica por 3.**

Así, 75% de 144 = $\frac{144 \times 3}{4} = 108$ R.

303

Ejercicio

Hallar, por simple inspección:

- | | | | |
|----------------------------|---------|------------------------------|-----------|
| 1. 1% de 34 | R. 0.34 | 16. $12\frac{1}{2}\%$ de 16 | R. 2 |
| 2. 2% de 500 | R. 10 | 17. 25% de 104 | R. 26 |
| 3. 4% de 75 | R. 3 | 18. $16\frac{2}{3}\%$ de 54 | R. 9 |
| 4. 5% de 60 | R. 3 | 19. $33\frac{1}{3}\%$ de 108 | R. 36 |
| 5. 10% de 98 | R. 9.8 | 20. 75% de 48 | R. 36 |
| 6. 20% de 155 | R. 31 | 21. 50% de 56 | R. 28 |
| 7. $16\frac{2}{3}\%$ de 12 | R. 2 | 22. 5% de 200 | R. 10 |
| 8. 25% de 84 | R. 21 | 23. 10% de 56.75 | R. 5.675 |
| 9. $33\frac{1}{3}\%$ de 15 | R. 5 | 24. 40% de 35 | R. 14 |
| 10. 40% de 25 | R. 10 | 25. 80% de 45 | R. 36 |
| 11. 60% de 40 | R. 24 | 26. 4% de 50 | R. 2 |
| 12. 80% de 30 | R. 24 | 27. $12\frac{1}{2}\%$ de 56 | R. 7 |
| 13. 75% de 16 | R. 12 | 28. 75% de 8 | R. 6 |
| 14. 50% de 42 | R. 21 | 29. 60% de 10 | R. 6 |
| 15. 20% de 85 | R. 17 | 30. 1% de 187.43 | R. 1.8743 |

304

Ejercicio

Hallar:

- | | | | |
|--|---------------------|---|-------------------|
| 1. 10% de $15\frac{2}{5}$ | R. 1.54 | 16. $33\frac{1}{3}\%$ de $\frac{1}{3}$ | R. $\frac{1}{9}$ |
| 2. 25% de 1,044 | R. 261 | 17. 20% de $108\frac{1}{2}$ | R. 21.7 |
| 3. 20% de 1,612 | R. 322.4 | 18. 40% de 18,745 | R. 7,498 |
| 4. 75% de 18.16 | R. 13.62 | 19. $33\frac{1}{3}\%$ de $3\frac{1}{3}$ | R. $\frac{10}{9}$ |
| 5. 5% de 95.6 | R. 4.78 | 20. $16\frac{2}{3}\%$ de 1,650 | R. 275 |
| 6. 60% de 23,455 | R. 14,073 | 21. 4% de $300\frac{1}{5}$ | R. 12.008 |
| 7. 80% de 134.65 | R. 107.72 | 22. 5% de 108.50 | R. 5.425 |
| 8. $16\frac{2}{3}\%$ de 1,914 | R. 319 | 23. 25% de 56.84 | R. 14.21 |
| 9. $12\frac{1}{2}\%$ de $4\frac{4}{5}$ | R. 0.6 | 24. 50% de 108.88 | R. 54.44 |
| 10. 50% de $56\frac{1}{6}$ | R. $28\frac{1}{12}$ | 25. 75% de $\frac{1}{75}$ | R. 0.01 |
| 11. 2% de $\frac{1}{2}$ | R. 0.01 | 26. 80% de 97 | R. 77.6 |
| 12. 5% de $\frac{3}{4}$ | R. 0.0375 | 27. 10% de $105\frac{3}{8}$ | R. 10.5375 |
| 13. 4% de $\frac{1}{50}$ | R. 0.0008 | 28. $12\frac{1}{2}\%$ de 105,704 | R. 13,213 |
| 14. 75% de 14,324 | R. 10,743 | 29. $16\frac{2}{3}\%$ de $\frac{1}{6}$ | R. $\frac{1}{36}$ |
| 15. 10% de $15\frac{3}{4}$ | R. 1.575 | 30. 1% de 1 | R. 0.01 |

699

HALLAR UN NÚMERO CUANDO SE CONOCE UN TANTO POR CIENTO DE ÉL

Ejemplos

1) ¿De qué número es 46 el 23%?

Diremos: 23% del número que se busca es 46; 100%, o sea el número buscado, será x:

$$\begin{array}{rcl} - & & + \\ 23\% \dots\dots & 46 & \\ 100\% \dots\dots & x & \therefore x = \frac{46 \times 100}{23} = 200 \quad \text{R.} \end{array}$$

Luego 46 es 23% de 200.

2) ¿Cuál es el número cuyos $\frac{3}{4}\%$ son 21?

$$\begin{array}{rcl} - & & + \\ \frac{3}{4}\% \dots\dots & 21 & \\ 100\% \dots\dots & x & \therefore x = \frac{21 \times 100}{3/4} = 2,800 \quad \text{R.} \end{array}$$

305

¿De qué número es

Ejercicio

- | | | | |
|------------------------------|------------------------|---|-----------------------|
| 1. 35 el 5%? | R. 700 | 11. 70 el $3\frac{1}{2}\%$? | R. 2,000 |
| 2. 60 el 90%? | R. $66\frac{2}{3}$ | 12. 84 el $5\frac{1}{4}\%$? | R. 1,600 |
| 3. 115 el 82%? | R. $140\frac{10}{41}$ | 13. 48 el $3\frac{1}{5}\%$? | R. 1,500 |
| 4. 420 el 36%? | R. $1,166\frac{2}{3}$ | 14. 82 el $5\frac{1}{8}\%$? | R. 1,600 |
| 5. 850 el 72%? | R. $1,180\frac{5}{9}$ | 15. 55 el $2\frac{3}{4}\%$? | R. 2,000 |
| 6. 16 el $\frac{1}{4}\%$? | R. 6,400 | 16. 150 el $7\frac{1}{2}\%$? | R. 2,000 |
| 7. 40 el $\frac{1}{8}\%$? | R. 32,000 | 17. $\frac{3}{7}$ los $\frac{5}{7}\%$? | R. 60 |
| 8. 50 el $\frac{2}{5}\%$? | R. 12,500 | 18. 196 el 0.56%? | R. 35,000 |
| 9. 95 el $\frac{3}{5}\%$? | R. $15,833\frac{1}{3}$ | 19. 445 el 5.34%? | R. $8,333\frac{1}{3}$ |
| 10. 24 el $\frac{1}{16}\%$? | R. 38,400 | 20. $150\frac{1}{6}$ el $\frac{1}{3}\%$? | R. 45,050 |

700

CASOS ESPECIALES

Teniendo presente lo expuesto en el número 698, puede hallarse por simple inspección un número cuando el tanto por ciento que se conoce de él es uno de los expuestos allí.

1) ¿De qué número es 76 el 10%?

Como 10% es la décima parte de un número, el número será: $76 \times 10 = 760$ R.

2) ¿De qué número es 7 el 25%?

Como 25% es la cuarta parte de un número, el número será: $7 \times 4 = 28$ R.

3) 9 es $16\frac{2}{3}\%$ ¿de qué número?

Como $16\frac{2}{3}\%$ es la sexta parte de un número, el número será: $9 \times 6 = 54$ R.

4) ¿De qué número es 12 el 75%?

Como 75% es los $\frac{3}{4}$ de un número, el número será: $\frac{12 \times 4}{3} = 16$ R.

306

Decir, por simple inspección, de qué número es

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| 1. 5 el 1%? R. 500 | 11. 10 el 40%? R. 25 | 21. 6 el 25%? R. 24 |
| 2. 16 el 10%? R. 160 | 12. 15 el 60%? R. 25 | 22. 14 el $33\frac{1}{3}\%$? R. 42 |
| 3. 8 el 2%? R. 400 | 13. 20 el 80%? R. 25 | 23. 32 el $16\frac{2}{3}\%$? R. 192 |
| 4. 9 el 4%? R. 225 | 14. 18 el 75%? R. 24 | 24. 9 el $12\frac{1}{2}\%$? R. 72 |
| 5. 12 el 5%? R. 240 | 15. 23 el 50%? R. 46 | 25. 15 el 75%? R. 20 |
| 6. 7.8 el 10%? R. 78 | 16. 18 el 25%? R. 72 | 26. 12 el 40%? R. 30 |
| 7. 3 el 20%? R. 15 | 17. 19 el 20%? R. 95 | 27. 24 el 60%? R. 40 |
| 8. 7 el 25%? R. 28 | 18. 3 el 10%? R. 30 | 28. 2 el 2%? R. 100 |
| 9. 11 el $16\frac{2}{3}\%$? R. 66 | 19. 12 el 2%? R. 600 | 29. 3 el 4%? R. 75 |
| 10. 15 el $33\frac{1}{3}\%$? R. 45 | 20. 1.7 el 1%? R. 170 | 30. 7 el $12\frac{1}{2}\%$? R. 56 |

DADOS DOS NÚMEROS, AVERIGUAR QUÉ TANTO POR CIENTO ES UNO DEL OTRO

701

1) ¿Qué % de 8,400 es 2,940?

Diremos: 8,400 es su 100%; 2,940 será su x %.

$$\begin{array}{rcl}
 - & & + \\
 8,400 & \dots\dots & 100\% \\
 2,940 & \dots\dots & x \\
 + & &
 \end{array}
 \therefore x = \frac{100 \times 2,940}{8,400} = 35\%$$

Luego, 2,940 es 35% de 8,400 R.

2) $6\frac{2}{5}$, ¿qué % es de 16?

$$\begin{array}{rcl} - & & + \\ 16 & \dots\dots & 100\% \\ 6\frac{2}{5} & \dots\dots & x \end{array} \quad \therefore x = \frac{100 \times 6\frac{2}{5}}{16} = 40\% \quad \text{R.}$$

307

¿Qué % de

Ejercicio

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. 860 es 129? R. 15% | 8. 36 es 0.06? R. $\frac{1}{6}\%$ | 15. 85 es 2.7625? R. $3\frac{1}{4}\%$ |
| 2. 95 es 30.4? R. 32% | 9. 512 es 0.64? R. $\frac{1}{8}\%$ | 16. 615 es 33.825? R. 5.5% |
| 3. 1,250 es 75? R. 6% | 10. 40 es 0.30? R. $\frac{3}{4}\%$ | 17. 8,400 es 147? R. 1.75% |
| 4. 1,950 es 156? R. 8% | 11. 1.75 es 3.5? R. 200% | 18. 40,000 es 550? R. $1\frac{3}{8}\%$ |
| 5. 815 es 431.95? R. 53% | 12. 23 es 1.2052? R. 5.24% | 19. 86 es 172? R. 200% |
| 6. 18 es 0.045? R. 0.25% | 13. 1,320 es 3.3? R. $\frac{1}{4}\%$ | 20. 315 es 945? R. 300% |
| 7. 93 es 0.186? R. 0.2% | 14. 5.6 es 0.007? R. $\frac{1}{8}\%$ | |

702

CASOS ESPECIALES

Es posible, en ciertos casos, hallar por simple inspección qué % de un número es otro.

Ejemplos

1) ¿Qué % de 250 es 50?

50 es $\frac{1}{5}$ de 250, luego 50 es 20% de 250 R.

2) ¿Qué % de 870 es 87?

87 es $\frac{1}{10}$ de 870, luego 87 es 10% de 870 R.

3) ¿Qué % de 48 es 36?

36 es $\frac{3}{4}$ de 48, luego 36 es 75% de 48 R.

4) ¿Qué % de 75 es 60?

60 es $\frac{4}{5}$ de 75, luego 60 es 80% de 75 R.

308

Ejercicio

Decir, por simple inspección, ¿qué % de

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------|--|
| 1. 200 es 2? R. 1% | 11. 20 es 12? R. 60% | 21. 314 es 157? R. 50% |
| 2. 9 es 3? R. $33\frac{1}{3}\%$ | 12. 40 es 32? R. 80% | 22. 600 es 100? R. $16\frac{2}{3}\%$ |
| 3. 12 es 3? R. 25% | 13. 18 es 1.8? R. 10% | 23. 800 es 100? R. $12\frac{1}{2}\%$ |
| 4. 15 es 3? R. 20% | 14. 500 es 5? R. 1% | 24. 600 es 200? R. $33\frac{1}{3}\%$ |
| 5. 18 es 6? R. $33\frac{1}{3}\%$ | 15. 80 es 20? R. 25% | 25. $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$? R. 50% |
| 6. 24 es 3? R. $12\frac{1}{2}\%$ | 16. 80 es 16? R. 20% | 26. $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{25}$? R. 20% |
| 7. 30 es 6? R. 20% | 17. 32 es 16? R. 50% | 27. $\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{32}$? R. 25% |
| 8. 18 es 9? R. 50% | 18. 32 es 24? R. 75% | 28. $\frac{1}{6}$ es $\frac{1}{36}$? R. $16\frac{2}{3}\%$ |
| 9. 8 es 6? R. 75% | 19. 1,600 es 400? R. 25% | 29. $\frac{1}{7}$ es $\frac{1}{28}$? R. 25% |
| 10. 10 es 4? R. 40% | 20. 1,600 es 320? R. 20% | 30. $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{15}$? R. $33\frac{1}{3}\%$ |

TANTO POR CIENTO MÁS

703

Se trata de hallar un número sabiendo el % que otro número es más que él.

1) ¿De qué número es 265 el 6% más?

El número que buscamos lo representamos por su 100%. Si 265 es 6% más que ese número, 265 será 100% + 6% igual a 106% del número buscado. Luego diremos: si 106% del número buscado es 265, 100% o sea, el número buscado, será x:

$$\begin{array}{rcl} - & + & \\ 106\% & \dots\dots & 265 \\ 100\% & \dots\dots & x \end{array} \quad \therefore x = \frac{100 \times 265}{106} = 250$$

Luego 265 es 6% más que 250. R.

2) 157.50 es $12\frac{1}{2}\%$ más que, ¿cuál número?

$$\begin{array}{rcl} - & + & \\ 112.50\% & \dots\dots & 157.50 \\ 100\% & \dots\dots & x \end{array} \quad \therefore x = \frac{100 \times 157.50}{112.50} = 140 \quad \text{R.}$$

Ejemplos

309

¿De qué número es

Ejercicio

- | | | | |
|------------------------------------|----------|------------------------------------|--------|
| 1. 208 el 4% más? | R. 200 | 9. 216.54 el $\frac{1}{4}\%$ más? | R. 216 |
| 2. 345 el 15% más? | R. 300 | 10. 920.49 el $\frac{3}{5}\%$ más? | R. 915 |
| 3. 258 el 20% más? | R. 215 | 11. 264 el $5\frac{8}{5}\%$ más? | R. 250 |
| 4. 645 el 25% más? | R. 516 | 12. 731.5 el $4\frac{1}{2}\%$ más? | R. 700 |
| 5. 1,215 el 35% más? | R. 900 | 13. 501.6 el 0.32% más? | R. 500 |
| 6. 918 el $12\frac{1}{2}\%$ más? | R. 816 | 14. 826 el $3\frac{1}{4}\%$ más? | R. 800 |
| 7. 2,152 el $33\frac{1}{3}\%$ más? | R. 1,614 | 15. 946.8 el $5\frac{1}{5}\%$ más? | R. 900 |
| 8. 907.5 el 21% más? | R. 750 | | |

704**TANTO POR CIENTO MENOS**

Se trata de hallar un número conociendo el tanto por ciento que otro número es menos que él.

Ejemplos

1) ¿De qué número es 168 el 4% menos?

El número que buscamos lo representamos por su 100%. Si 168 es 4% menos que ese número buscado, 168 es $100\% - 4\% = 96\%$ del número buscado. Luego diremos: si 96% del número buscado es 168, 100%, o sea el número buscado, será x :

$$\begin{array}{rcl}
 - & & + \\
 96\% & \dots\dots & 168 \\
 100\% & \dots\dots & x \\
 + & &
 \end{array}
 \quad \therefore x = \frac{100 \times 168}{96} = 175$$

Luego 168 es el 4% menos que 175. **R.**

2) 798 es el $\frac{1}{4}\%$ menos que, ¿cuál número?

$$\begin{array}{rcl}
 - & & + \\
 99\frac{3}{4}\% & \dots\dots & 798 \\
 100\% & \dots\dots & x \\
 + & &
 \end{array}
 \quad \therefore x = \frac{798 \times 100}{99.75} = 800 \quad \mathbf{R.}$$

¿De qué número es

310**Ejercicio**

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|---|----------|
| 1. 84 el 7% menos? | R. $90\frac{10}{31}$ | 10. 1,680 el 72% menos? | R. 6,000 |
| 2. 276 el 8% menos? | R. 300 | 11. 514.71 el $\frac{1}{4}\%$ menos? | R. 516 |
| 3. 91 el 35% menos? | R. 140 | 12. 6,091.24 el $1\frac{1}{2}\%$ menos? | R. 6,184 |
| 4. 774.9 el 18% menos? | R. 945 | 13. 7,540 el $5\frac{3}{4}\%$ menos? | R. 8,000 |
| 5. 246 el 60% menos? | R. 615 | 14. 39.95 el $\frac{1}{8}\%$ menos? | R. 40 |
| 6. 850 el $16\frac{2}{3}\%$ menos? | R. 1,020 | 15. 135.73 el $3\frac{1}{20}\%$ menos? | R. 140 |
| 7. 780 el 25% menos? | R. 1,040 | | |
| 8. 513 el 43% menos? | R. 900 | | |
| 9. 920 el 54% menos? | R. 2,000 | | |

MISCELÁNEA**311****Ejercicio**

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------|
| 1. ¿Cuál es el 15% de 580? | R. 87 |
| 2. 8 es 30%, ¿de qué número? | R. $26\frac{2}{3}$ |
| 3. 8 es 30% más, ¿de qué número? | R. $6\frac{2}{13}$ |
| 4. ¿Qué % de 12 es 10? | R. $83\frac{1}{3}\%$ |
| 5. 17.92 es 32%, ¿de qué número? | R. 56 |
| 6. ¿Cuál es $12\frac{1}{2}\%$ de 104? | R. 13 |
| 7. 30, ¿qué % es de 90? | R. $33\frac{1}{3}\%$ |
| 8. 808 es 1% más ¿de qué número? | R. 800 |
| 9. ¿Qué % de 54 es 9? | R. $16\frac{2}{3}\%$ |
| 10. ¿Qué % de 9 es 54? | R. 600 |
| 11. Hallar $3\frac{1}{2}\%$ de 216. | R. 7.56 |
| 12. 34 es 25%, ¿de qué número? | R. 136 |
| 13. ¿Qué % de 34 es 25? | R. $73\frac{9}{17}\%$ |
| 14. 25 es 34% más, ¿de qué número? | R. $18\frac{44}{67}$ |
| 15. 25 es 34% menos, ¿de qué número? | R. $37\frac{29}{33}$ |
| 16. 800 es 4%, ¿de qué número? | R. 20,000 |
| 17. 4, ¿qué % es de 800? | R. $\frac{1}{2}\%$ |
| 18. Hallar 4% de 800. | R. 32 |

- | | |
|---|----------------------|
| 19. 800 es 4% más, ¿de qué número? | R. $769\frac{3}{13}$ |
| 20. 800 es 4%, menos ¿de qué número? | R. $833\frac{1}{3}$ |
| 21. ¿De qué número es 32 el 20%? | R. 160 |
| 22. Hallar $\frac{3}{8}\%$ de 40. | R. 0.15 |
| 23. 833 es 70% más, ¿de qué número? | R. 490 |
| 24. 35 es 70%, ¿de qué número? | R. 50 |
| 25. 321 es 7% más, ¿de qué número? | R. 300 |
| 26. Hallar 7% de 321. | R. 22.47 |
| 27. ¿Qué % de 400 es 80? | R. 20% |
| 28. ¿Qué % de 800 es 40? | R. 5% |
| 29. ¿Cuál es $17\frac{1}{3}\%$ de 24? | R. 4.16 |
| 30. ¿Qué % de 1 es 0.2? | R. 20% |
| 31. Hallar $6\frac{1}{2}\%$ de 850. | R. 55.25 |
| 32. 402 es 34% más, ¿de qué número? | R. 300 |
| 33. 209.3 es 23%, ¿de qué número? | R. 910 |
| 34. ¿Qué % de 600 es 54? | R. 9% |
| 35. Hallar 54% de 600. | R. 324 |
| 36. ¿De qué número es 62 el 24% más? | R. 50 |
| 37. ¿De qué número es 41 el 18% menos? | R. 50 |
| 38. Hallar $40\frac{1}{2}\%$ de 1,860. | R. 753.3 |
| 39. ¿Qué % de $80\frac{1}{3}$ es $20\frac{1}{12}$? | R. 25% |
| 40. 1,120 es 56%, ¿de qué número? | R. 2,000 |

PROBLEMAS DE TANTO POR CIENTO

705 Pedro tenía \$80. Si gastó 20% y dio a su hermano 15% del resto, ¿cuánto le queda?

Gastó 20% de \$80, o sea $\$80 \div 5 = \16 . Si gastó \$16, el resto será $\$80 - \$16 = \$64$.

A su hermano le dio 15% de \$64, o sea $\frac{15 \times 64}{100} = \9.60 . Por tanto, le quedan: $\$64 - \$9.60 = \$54.40$ R.

312

Ejercicio

- Juan tiene que pagar 90,000 bolívares. Si le rebajan 5% de su deuda, ¿cuánto tiene que pagar todavía? R. 85,500 bolívares
- Un metro de tela me cuesta 15 lempiras. ¿A cómo tengo que venderlo para ganar 20% del costo? R. 18 lempiras

3. Por la venta de un libro a 5 dólares el ejemplar, el librero cobra 30% de comisión. ¿Cuánto recibe el autor por cada libro? **R. 3.50 dólares**
4. Un agente tiene 12% de comisión en las ventas que haga. Si vende 14 paquetes de pañuelos desechables a \$6 cada uno, ¿cuál es su comisión? **R. \$10.08**
5. De una finca de 50 hectáreas se vende 16% y se alquila 14%. ¿Cuántas hectáreas quedan? **R. 35 hectáreas**
6. Tenía 30 lápices. Dí a mi hermano Enrique 30%, a mi primo Orlando 20% y a mi amigo Héctor 10%. ¿Cuántos lápices dí a cada uno y cuántos lápices me quedaron? **R. E. 9, O. 6, H. 3; quedan 12**
7. Un hombre al morir dispone que de su fortuna, que asciende a \$200,000, se entregue 35% a su hermano mayor; 40% del resto a su hermano menor y lo restante a un asilo. ¿Cuánto correspondió al asilo? **R. \$78,000**
8. Se vende 20% de una finca de 40 hectáreas, se alquila 50% del resto y se cultiva 25% del nuevo resto. Hallar la porción cultivada **R. 4 hectáreas**
9. Una compañía adquiere una propiedad de 1,800 m² de este modo: 22% de la propiedad lo paga a \$2,000 el m²; 50% a \$800 el m² y el resto a \$500 el m². ¿Cuánto importa la compra? **R. \$1,796,400**
10. De los 80 libros que tenía un librero vendió 45% a \$125 c/u; 75% del resto a \$120 c/u, y el resto a \$100 c/u. ¿Cuál es el importe total de la venta? **R. \$9,560**
11. De los 125 alumnos de un colegio, 36% son extranjeros. ¿Cuántos alumnos nativos hay? **R. 80**
12. De los \$50 que tenía gasté 85%. ¿Cuánto he guardado? **R. \$7.50**
13. Las ventas de un almacén durante un año, han importado 1,867,500 lempiras. De esa cantidad, 64% se destina a gastos. ¿Cuál ha sido la ganancia? **R. 672,300 lempiras**
14. Mi finca tiene 480 ha 35% de la mitad de mi finca lo tengo sembrado de caña y el resto de la finca de frutos menores. ¿Cuántas ha tengo sembradas con frutos menores? **R. 396 ha**

Se incendia una casa que estaba asegurada en 86% de su valor y se cobran \$430,000 por el seguro. ¿Cuál era el valor de la casa?

706

Diremos: si 86% del valor de la casa es \$430,000, 100%, que es el valor de la casa, será x:

$$\begin{array}{rcl}
 - & & + \\
 86\% & \dots\dots & \$430,000 \\
 100\% & \dots\dots & x \\
 + & &
 \end{array}
 \therefore x = \frac{430,000 \times 100}{86} = \$500,000 \quad \text{R.}$$

1. Comprando un traje que me costó 105 balboas, gasté 25% de mi dinero. ¿Cuánto tenía? **420 balboas**
2. Se compra una propiedad pagando 56% del precio, al contado. Si la cantidad pagada es \$481,600, ¿cuál es el valor de la propiedad? **R. \$860,000**
3. Un niño tiene 57 bolas azules que representan $8\frac{1}{7}\%$ del total de sus bolas. ¿Cuántas bolas tiene? **R. 700**

313

Ejercicio

4. La comisión de un agente es 15% de las ventas que haga. Si su comisión en cierta operación ha sido de 69,000 bolívares, ¿cuál fue el importe de la venta? **R. 460,000 bolívares**
5. De una cajetilla de cigarros se rebajan 50 ¢, lo que representa 7.5% de su valor. ¿Cuánto valía la cajetilla? **R. \$6 $\frac{2}{3}$**
6. Al vender una casa ganando $5\frac{3}{5}\%$ del precio de compra, la utilidad obtenida ha sido de 5,600 balboas. ¿Cuánto costó la casa? **R. 100,000 balboas**
7. Un agente recibe \$36,400 de comisión por la venta de 4 automóviles. Si su comisión es de 7%, ¿cuál es el precio de cada automóvil? **R. \$130,000**
8. Al vender una casa perdiendo $12\frac{1}{2}\%$ del costo, la pérdida sufrida es 10,640 quetzales. ¿Cuánto costó la casa? **R. 85,120 quetzales**
9. Habiendo salido 84% de los alumnos de un colegio, permanecen en el mismo 20 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio? **R. 125**
10. Habiendo gastado $16\frac{2}{3}\%$ de mi dinero, me quedé con 150 nuevos soles. ¿Cuánto tenía? **R. 180 nuevos soles**
11. Un campesino vende 63% de sus gallinas y se queda con 74 gallinas. ¿Cuántas gallinas tenía? **R. 200**
12. Gastando 15% y 12% de lo que tenía gasté \$21.60. ¿Cuánto tenía? **R. \$80**
13. Gasté 15% y 12% de mi dinero, me quedaron 365,000 bolívares. ¿Cuánto tenía al principio? **R. 500,000 bolívares**
14. La diferencia entre 60% y 45% de un número es 126. Hallar el número. **R. 840**

707**De los 150 alumnos de un colegio, 27 son niñas. Hallar el % de varones.**El número de varones es $150 - 27 = 123$.

Tenemos que averiguar qué % del total de alumnos, 150, es el número de alumnos varones, 123.

Diremos: 150 alumnos son 100%, 123 alumnos varones serán %:

$$\begin{array}{rcl}
 - & + & \\
 150 & \dots\dots & 100\% \\
 123 & \dots\dots & x \\
 + & &
 \end{array}
 \quad \therefore x = \frac{123 \times 100}{150} = 82\% \quad \text{R.}$$

314**Ejercicio**

1. De las 240 bolas que tiene un niño, 48 son rojas. Hallar el % de las bolas rojas. **R. 20%**
2. Al vender un automóvil en 72,000 córdobas me pagan 3,600 de comisión. ¿Cuál es mi porcentaje de comisión? **R. 5%**
3. De las 90 aves que hay en una granja 60 son gallinas y el resto gallos. Hallar el % de gallos. **R. $33\frac{1}{3}\%$**

4. De los 49 alumnos de una clase, 35 son nativos. Hallar el % de extranjeros. **R. $28\frac{4}{7}\%$**
5. Tenía Q60 y gasté Q55.20. ¿Qué % he ahorrado? **R. 8%**
6. De los 30 alumnos de una clase que se examinaron en física, 8 obtuvieron sobresaliente, 12 aprovechado, 7 aprobado y el resto suspenso. Hallar el % de cada nota.
R. S. $26\frac{2}{3}\%$; A., 40%; a., $23\frac{1}{3}\%$; s., 10%
7. Con las 800 balboas que tenía compré un traje de 400 balboas, zapatos por valor de 300 balboas y camisas con el resto. ¿Qué % de mi dinero empleé en cada cosa?
R. Traje, 50%; zapatos, $37\frac{1}{2}\%$; camisas, $12\frac{1}{2}\%$
8. ¿Qué % de rebaja se hace en una deuda de 4,500 colones que se reduce a 3,600? **R. 20%**
9. Si compré un libro por \$60 y lo vendí en \$50, ¿qué % del costo perdí? **R. $16\frac{2}{3}\%$**
10. ¿Qué porcentaje se pierde cuando se vende en 14 balboas lo que había costado 24?
R. $41\frac{2}{3}\%$
11. Un comerciante compra tres camiones iguales cuyo precio de lista era de \$220,000 cada uno, pero por ser la compra al contado le rebajan \$45,000 entre los tres camiones. ¿Qué % de rebaja le han hecho en cada camión? **R. $6\frac{9}{11}\%$**
12. Me debían 640 nuevos soles y me pagaron 80. ¿Qué % de la deuda me pagaron y qué % me deben todavía? **R. Pagado, $12\frac{1}{2}\%$; me deben, $87\frac{1}{2}\%$**
13. Tenía 350 nuevos soles y me saqué 140 en la lotería. Lo que tengo ahora, ¿qué % es de lo que tenía al principio? **R. 140%**
14. Tenía 350 nuevos soles y pagué 140 que debía. Lo que me queda, ¿qué % es de lo que tenía al principio? **R. 60%**

Pedro tiene \$63, y su dinero excede al de Juan en 5% de éste. ¿Cuánto tiene Juan?

708

El dinero de Juan lo representamos por su 100%.

Si los \$63 de Pedro exceden al dinero de Juan en 5%, los \$63 de Pedro son $100\% + 5\% = 105\%$ del dinero de Juan, luego:

$$\begin{array}{rcl}
 - & + & \\
 105\% & \dots\dots & \$63 \\
 100\% & \dots\dots & x \therefore x = \frac{63 \times 100}{105} = \$60 \quad \text{R.} \\
 + & &
 \end{array}$$

Juan tiene \$60.

Al vender una casa en \$460,000 se pierde 8% del precio de compra. Hallar el costo de la casa.

709

El costo de la casa lo representamos por su 100%.

Si al vender la casa en \$460,000 pierdo 8% del precio de compra, \$460,000 representa $100\% - 8\% = 92\%$ del precio de compra; luego:

$$\begin{array}{rcl} - & & + \\ 92\% & \dots\dots & \$460,000 \\ 100\% & \dots\dots & x \end{array} \quad \therefore x = \frac{460,000 \times 100}{92} = \$500,000 \quad \text{R.}$$

El costo fue \$500,000.

710 ¿A cómo hay que vender lo que ha costado \$680 para ganar 15% de la venta?

En el precio de venta que vamos a hallar estará contenido el costo, \$680, más la ganancia.

Representamos el precio de venta por su $100\% = 15\% + 85\%$. Como la ganancia será 15% del precio de venta, el costo, o sea \$680, será 85% del precio de venta.

Diremos: si \$680 es 85% del precio de venta, el precio de venta o 100% será x :

$$\begin{array}{rcl} + & & - \\ \$680 & \dots\dots & 85\% \\ x & \dots\dots & 100\% \end{array} \quad \therefore x = \frac{680 \times 100}{85} = \$800 \quad \text{R.}$$

Luego hay que venderlo a \$800.

315

Ejercicio

- ¿Qué número aumentado en 15% equivale a 437? **R. 380**
- ¿Qué número disminuido en 35% equivale a 422? **R. 680**
- Pedro tiene 69 años y su edad excede a la de Juan en 15% de ésta. ¿Qué edad tiene Juan?
R. 60 años
- Si se aumenta en 8% el precio de un artículo, el nuevo precio es \$16.2. ¿Cuál era el precio original? **R. \$15**
- Después de rebajarme 18% del precio de una cajetilla de cigarros tuve que pagar por ella \$28.70. ¿Cuál era el precio original? **R. \$35**
- Al vender una casa en 63,000 nuevos soles se ganó 5% del precio de compra. ¿Cuánto costó la casa? **R. 60,000 nuevos soles**
- Al vender una casa en 63,000 nuevos soles se ganó 5% del precio de venta. ¿Cuánto costó la casa? **R. 59,850 nuevos soles**
- Si un hombre tuviera 8% más de la edad que tiene, su edad sería 54 años. Hallar la edad actual **R. 50 años**
- Una mesa y una silla costaron \$210. Sabiendo que el precio de la silla fue 40% del precio de la mesa, hallar el valor de la mesa y de la silla. **R. Mesa, \$150; silla, \$60**
- Un comerciante compró pelotas a 18 lempiras. ¿A cómo tiene que venderlas para ganar 20% del costo? **R. 21.60 lempiras**

11. Un comerciante compró pelotas a 18 lempiras. ¿A cómo tiene que venderlas para ganar 20% de la venta? **R. 22.50 lempiras**
12. Al vender una casa en 75,000 nuevos soles se perdió 25% del costo. ¿Cuánto costó la casa? **R. 100,000 nuevos soles**
13. Al vender una casa en 75,000 nuevos soles se perdió 25% de la venta. ¿Cuánto costó la casa? **R. 93,750 nuevos soles**
14. Se compró un anillo en \$220 y se quiere vender ganando 12% del precio de venta. ¿En cuánto se venderá? **R. \$250**
15. Si Pedro tuviera 15% menos de la edad que tiene, tendría 34 años. Hallar su edad actual. **R. 40 años**

MISCELÁNEA**316****Ejercicio**

1. Compré 90 libros y vendí 60%. ¿Cuántos me quedan? **R. 36**
2. Un campesino que tenía 120 gallinas vendió 40. ¿Qué % de sus gallinas vendió y qué % le queda?
R. Vendió $33\frac{1}{3}\%$, queda $66\frac{2}{3}\%$
3. Una deuda de 850 nuevos soles se reduce a 816. ¿Qué % de rebaja se ha hecho? **R. 4%**
4. Un hombre ahorró el año pasado \$16,900, que era 13% de sus ganancias en el año. ¿Cuánto ganó en el año? **R. \$130,000**
5. Si me aumentaran el sueldo en 10% ganaría 1,375 dólares. ¿Cuánto gano ahora? **R. 1,250 dólares**
6. Si me rebajan el sueldo en 20% quedo ganando 1,040 dólares mensuales. ¿Cuánto gano ahora? **R. 1,300 dólares**
7. Si gastara 51,000 bolívares me quedaría con 85% de lo que tengo. ¿Cuánto tengo?
R. 340,000 bolívares
8. Un ganadero vendió 36% de sus reses y se quedó con 160. ¿Cuántas tenía? **R. 250**
9. Si recibiera una cantidad igual a 30% de lo que tengo, tendría 65 lempiras. ¿Cuánto tengo?
R. 50 lempiras
10. Si gastara una cantidad igual a 30% de lo que tengo me quedaría con 63 bolivianos. ¿Cuánto tengo? **R. 90 bolivianos**
11. ¿Qué número aumentado en 32% equivale a 792? **R. 600**
12. ¿Qué número disminuido en 38% equivale a 372? **R. 600**
13. Si gastara 30% de lo que tengo y recibiera una cantidad igual a 28% de lo que tengo, me quedaría con \$600 menos que ahora. ¿Cuánto tengo? **R. \$30,000**
14. Vendiendo un libro por \$144 se gana 20% del costo. ¿Cuánto costó el libro? **R. \$120**
15. Vendiendo un libro por \$112 se pierde 30% del costo. ¿Cuánto costó el libro? **R. \$160**
16. ¿A cómo hay que vender lo que ha costado \$210 para ganar 30% del costo? **R. \$273**
17. ¿A cómo hay que vender lo que ha costado \$238 para ganar 15% de la venta? **R. \$280**
18. Se vende un reloj en 150 balboas. Si se hubiera vendido en 15 más se hubiera ganado 20. ¿Cuál ha sido el % de ganancia sobre el precio de venta? **R. $3\frac{1}{3}\%$**
19. Un hombre gasta al año 45% de su sueldo anual y ahorra 6,600 balboas. ¿Cuál es su sueldo anual? **R. 12,000 balboas**

20. Un muchacho que tenía \$12 compró una pelota y le quedaron \$1.5. ¿Qué % de su dinero gastó? **R. 87.5%**
21. Un hombre dispuso de \$6,000 invirtiendo 30% en libros, 12% en paseos, 18% en ropa, 15% en limosnas y el resto lo dividió en partes iguales entre tres parientes. ¿Cuánto recibió cada uno de éstos? **R. \$500**
22. La edad de García es 32% menos que la de Suárez. Si García tiene 34 años. ¿Qué edad tiene Suárez? **R. 50 años**
23. Una persona que tenía 95,000 colones gastó 14% y prestó 15% del resto. ¿Cuánto le queda?
R. 69,445 colones
24. ¿Qué % del costo se gana cuando se vende en 800 colones lo que ha costado 600? **R. $33\frac{1}{3}\%$**
25. ¿Qué % de la venta se gana cuando se vende en 8 quetzales lo que ha costado 6? **R. $25\frac{1}{3}\%$**
26. Al vender cinta ganando 80 ¢ en un metro, la ganancia es 25% del costo. ¿Cuánto cuesta el metro de cinta? **R. \$3.20**
27. Al vender un libro perdiendo \$80, la pérdida sufrida es 40% del costo. ¿Cuánto costó el libro?
R. \$200
28. ¿Cuál es el % de pérdida sobre el costo si se vende por \$171,000 un auto que costó \$180,000?
R. 5%
29. ¿Cuál es el % de ganancia sobre el costo cuando se vende en \$90 lo que ha costado \$80?
R. $12\frac{1}{2}\%$
30. Un comerciante compra artículos con un descuento de 25% del precio de lista y los vende a 25% más que el precio de lista. ¿Cuál es su % de ganancia sobre el costo? **R. $66\frac{2}{3}\%$**
31. Se compran artículos a 10% menos que el precio de catálogo y se venden a 10% más que el precio de catálogo. ¿Qué % del costo se gana? **R. $22\frac{2}{9}\%$**
32. No quise vender una computadora cuando me ofrecían por ella \$3,840, con lo cual hubiera ganado 28% del costo y algún tiempo después tuve que venderla por \$3,750. ¿Qué % del costo gané al hacer la venta? **R. 25%**
33. Vendí una impresora por \$792, perdiendo 12% del costo. ¿A cómo habría tenido que venderla para ganar 8% del costo? **R. A \$972**
34. Un hombre vendió dos computadoras cobrando 5,400 bolivianos por cada una. En una de las computadoras ganó 20% de lo que le había costado y en la otra perdió 20% de lo que le había costado. ¿Ganó o perdió en total y cuánto? **R. Perdió 450 bolivianos**
35. Se vendieron dos casas a \$129,600 cada una. En una se ganó 8% del costo y en la otra se perdió 8%. ¿Se ganó o perdió en total y cuánto? **R. Se perdieron \$1,669.57**
36. Vendí dos computadoras a \$7,200 cada una. En una perdí 25% del precio de venta y en la otra gané 25% del costo. ¿Gané o perdí en total y cuánto? **R. Perdí \$360**



El origen del préstamo con interés (usura) es remoto. Los prestamistas de la Edad Media cobraban a los particulares hasta 43% anual; en las operaciones comerciales el tipo de interés fluctuaba entre 12% y 24% anual. Al fundarse lo que

puede ser llamado el primer banco en el sentido moderno, en 1407, la Casa de San Giorgio, en Génova, el interés bajó a 10% y menos.

Capítulo **XLVI**

INTERÉS

La regla de interés es una operación por medio de la cual se halla la **ganancia** o **interés** que produce una suma de dinero o capital prestado a un **tanto por ciento** dado y durante un **tiempo** determinado.

El capital se representa por c , el tiempo por t , el % por r y el interés a **rédito** por i .

El dinero no está nunca inactivo. Toda cantidad que se presta debe producir una ganancia. Esta ganancia es un % dado de la cantidad que se presta, y es convenido por las partes que hacen el contrato. Así, prestar dinero a 5% anual significa que por cada \$100 que se prestan la persona que recibe el dinero tiene que pagar \$5 al año; prestar dinero a $1\frac{1}{2}\%$ mensual significa que hay que pagar \$1.50 al mes por cada \$100 que se reciben.

INTERÉS LEGAL

Cuando en una operación financiera deba existir un tipo de interés y éste no se estipule por las partes contratantes, se debe pagar el **interés legal**. Aunque depende del país, en la mayoría es de entre 5 y 6%.

USURA

Exigir un interés elevado por el dinero que se presta constituye la usura, que es penada por las leyes de algunos países.

711

712

713

En la mayoría de los países, hay leyes contra la usura. En general estas leyes establecen que el interés máximo en cualquier operación financiera es el doble del interés legal. Si se cobra uno mayor que éste, el exceso pagado como interés se imputa al capital prestado, es decir, el exceso de interés pagado se considera como devolución de parte del capital prestado.

714 INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

El interés puede ser **simple** y **compuesto**.

Es **simple** cuando el **interés** o **rédito**, es decir, la ganancia que produce el capital prestado, se percibe al final de periodos iguales **sin que el capital varíe**.

Es **compuesto** cuando los **intereses** que produce el capital se suman al capital, al final de cada periodo, formando de este modo **un nuevo capital**.

I. INTERÉS SIMPLE

715 DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DEL INTERÉS SIMPLE

En las fórmulas que deducimos a continuación, r representa el **tanto por ciento anual**, es decir, lo que ganan \$100 al año.

Consideremos cuatro casos:

1) Siendo el tiempo 1 año.

Diremos: \$100 producen r al año
 \$ c producirán l

y como el capital y el interés son directamente proporcionales porque a doble capital, doble interés, formaremos la proporción igualando las razones directas (678):

$$\frac{100}{c} = \frac{r}{l}$$

y despejando en esta proporción l , c y r como medios o extremos desconocidos, tendremos:

$$l = \frac{cr}{100} \quad c = \frac{100l}{r} \quad r = \frac{100l}{c}$$

2) Siendo el tiempo varios años.

Es evidente que el interés que produce un capital c durante t años, es igual al interés que produce un capital t **veces mayor** durante un año, o sea el interés durante un año del capital ct .

Por lo tanto, diremos: \$100 producen r al año
 \$ ct producirán l al año

Formando la proporción, tendremos: $\frac{100}{ct} = \frac{r}{I}$

y despejando: $I = \frac{ctr}{100}$ $c = \frac{100I}{tr}$ $t = \frac{100I}{cr}$ $r = \frac{100I}{ct}$

3) Siendo el tiempo meses.

Cuando el tiempo t represente **meses**, $\frac{t}{12}$ representará años; luego estaremos en el caso anterior y diremos:

\$100 producen r al año.

$\$ \frac{c \times t}{12}$ producirán I

Formando la proporción, tendremos: $\frac{100}{ct/12} = \frac{r}{I}$

Simplificando, queda: $\frac{1,200}{ct} = \frac{r}{I}$

despejando: $I = \frac{ctr}{1,200}$ $c = \frac{1,200I}{tr}$ $t = \frac{1,200I}{cr}$ $r = \frac{1,200I}{ct}$

4) Siendo el tiempo días.

El año **comercial** se considera de 360 días.

Cuando el tiempo t represente **días**, $\frac{t}{360}$ representará años, luego diremos:

\$ 100 producen r al año

$\$ \frac{ct}{360}$ producirán I

Formando la proporción $\frac{100}{ct/360} = \frac{r}{I}$

Simplificando, queda: $\frac{36,000}{ct} = \frac{r}{I}$

y despejando: $I = \frac{ctr}{36,000}$ $c = \frac{36,000I}{tr}$ $t = \frac{36,000I}{rc}$ $r = \frac{36,000I}{ct}$

Problemas

Para la aplicación de las fórmulas anteriores hay que tener presente que, siendo el % **anual**, cuando el tiempo sea **años** se emplean las fórmulas con **100**; cuando sea **meses**, con **1,200**, y cuando sea **días**, con **36,000**.

Además, las fórmulas anteriores están deducidas en la **suposición de que el % es anual**. Por tanto, si el % que se da es **mensual** o **diario** hay que **hacerlo anual**, multiplicándolo, si es mensual, por 12, y si es diario, por 360, y entonces se pueden aplicar las fórmulas anteriores.

716 CÁLCULO DEL INTERÉS

Hallar el interés de \$450 a 5% anual en 4 años.

Aplicamos la fórmula I con 100, porque el tiempo viene dado en años:

$$I = \frac{ctr}{100} = \frac{450 \times 5 \times 4}{100} = \$90 \quad R.$$

717 Un propietario ha tomado \$3,600 en hipoteca sobre una casa a $5\frac{3}{4}\%$ anual. ¿Cuánto pagará de interés al mes?

Hay que hallar el interés de 1 mes. Aplicamos la fórmula de I con 1,200, porque el tiempo viene en meses:

$$I = \frac{ctr}{1,200} = \frac{3,600 \times 1 \times 5.75}{1,200} = \$17.25 \quad R.$$

718 Hallar el interés que han producido \$6,000 que han estado impuestos durante 2 años, 8 meses y 6 días a $\frac{1}{2}\%$ mensual.

Hay que reducir 2 años, 8 meses y 6 días a días = 966 días. Entonces, hay que aplicar la fórmula I con 36,000, porque el tiempo viene en días, pero para poderla aplicar primero hay que hacer el % anual. Como es $\frac{1}{2}\%$ mensual lo multiplico por 12 y tengo $\frac{1}{2} \times 12 = 6\%$ anual.

$$I = \frac{ctr}{36,000} = \frac{6,000 \times 966 \times 6}{36,000} = \$966 \quad R.$$

719 Pedro Suárez toma un préstamo de \$480 a 5% anual el 12 de marzo y devuelve el dinero recibido el 15 de mayo. ¿Cuánto pagará de interés?

Cuando se calcula el interés entre dos fechas próximas, se calcula el número exacto de días que hay de una fecha a la otra. Así, en este problema, diremos: del 12 de marzo al 15 de mayo hay: 19 días en marzo, 30 en abril y 15 en mayo = 64 días.

$$I = \frac{ctr}{36,000} = \frac{480 \times 64 \times 5}{36,000} = \$4.27 \quad R.$$

317

Ejercicio

(En este ejercicio y en los siguientes de este capítulo, si no se dice lo contrario, el % se entiende anual.)

1. Hallar el interés de \$600 a $3\frac{1}{2}\%$ en 4 años. **R. \$84**

2. Hallar el interés de \$4,500 a $5\frac{1}{2}\%$ en 8 meses. **R. \$165**
3. Hallar el interés de \$9,000 a 12% en 20 días. **R. \$60**
4. Hallar el interés de \$2,100 a $6\frac{3}{4}\%$ en 3 años y 4 meses. **R. \$472.50**
5. Hallar el interés de \$1,800 a 5% en 3 años, 8 meses y 10 días. **R. \$332.50**
6. Se toman \$480,000 en hipoteca a 1%. ¿Cuánto hay que pagar de intereses al mes? **R. \$2,800**
7. Si presto \$120 a 1% mensual, ¿cuánto tienen que pagarme de interés al mes? **R. \$1.20**
8. ¿Cuánto producen 8,200 bolivianos que se han prestado a $\frac{1}{4}\%$ mensual durante 90 días?
R. 61.50 bolivianos
9. ¿Cuánto producen 750 bolivianos que se prestan a $\frac{1}{80}\%$ diario en 2 meses?
R. 7.50 bolivianos
10. Hallar el interés de 11,000 córdobas a $\frac{3}{4}\%$ mensual durante 4 meses y 5 días.
R. 343.75 córdobas
11. Hallar la renta diaria de 36,000 quetzales a $\frac{1}{90}\%$ diario. **R. Q4**
12. Hallar la renta mensual de \$60,000 a $\frac{1}{6}\%$ mensual. **R. \$100**
13. Hallar el interés de 500 lempiras a 6% del 6 de febrero al 2 de marzo de 2007.
R. 2 lempiras
14. Se toman 900 bolivianos a $5\frac{1}{2}\%$ el 29 de abril y se devuelve el capital prestado el 8 de junio. ¿Cuánto se pagará de interés? **R. 5.50 bolivianos**
15. Hallar el interés de 400 quetzales a 9% del 1 de febrero al 30 de julio de 2004. (Año bisiesto.)
R. 18 quetzales

CÁLCULO DE CAPITAL

720

¿Cuál es la suma que a $5\frac{1}{5}\%$ ha producido \$104 en 8 meses?

Aplicamos la fórmula de capital con 1,200 porque el tiempo viene dado en meses:

$$c = \frac{1,200/}{rt} = \frac{1,200 \times 104}{5.2 \times 8} = \$3,000 \quad \text{R.}$$

Por un dinero que recibí en préstamo a $\frac{1}{3}\%$ mensual y que devolví a los 80 días, tuve que pagar de interés \$400. ¿Cuál fue la suma prestada?

721

$\frac{1}{3}\%$ mensual = $\frac{1}{3} \times 12 = 4\%$ anual. Aplico la fórmula de capital con 36,000 porque el tiempo es días:

$$c = \frac{36,000/}{rt} = \frac{36,000 \times 400}{4 \times 80} = \$45,000 \quad \text{R.}$$

318

Ejercicio

1. ¿Qué suma a 3% en 2 años produce 60 nuevos soles? **R. 1,000 nuevos soles**
2. ¿Qué suma a $5\frac{1}{2}\%$ en 5 meses produce 110 bolivianos? **R. 4,800 bolivianos**
3. ¿Qué suma a $3\frac{3}{5}\%$ en 60 días produce 72 córdobas? **R. 12,000 córdobas**
4. ¿Qué capital a $7\frac{1}{2}\%$ produce en 5 meses y 10 días \$400? **R. 12,000**
5. ¿Qué capital produce \$2,950 a $4\frac{4}{5}\%$ en 1 año 7 meses y 20 días? **R. 37,500**
6. Si pago Q30 al mes por un dinero que tomé en hipoteca a 6%, ¿a cuánto asciende el capital prestado? **R. Q6,000**
7. Si pago \$4.80 cada mes como interés de un dinero que me prestaron a 8%, ¿cuál es la suma que me prestaron? **R. \$720**
8. Pago 600 colones como interés mensual por un dinero que me prestaron a 1% mensual. ¿Cuál es la suma prestada? **R. 60,000 colones**
9. ¿Qué suma, impuesta a $\frac{1}{2}\%$ mensual ha producido 72 córdobas en 100 días? **R. 4,320 córdobas**
10. ¿Qué suma, impuesta a $1\frac{3}{4}\%$ mensual ha producido 357 lempiras en 5 meses y 20 días? **R. 3,600 lempiras**
11. ¿Qué suma, impuesta a 2% mensual produce una renta mensual de 12 balboas? **R. 600 balboas**
12. ¿Qué suma a $\frac{1}{24}\%$ diario produce una renta diaria de \$0.60? **R. \$1,440**
13. Por una suma tomada a 4% el 8 de noviembre se pagan de intereses el 4 de diciembre del mismo año \$5.20. ¿Cuál es esa suma? **R. \$1,800**
14. Se presta a $2\frac{1}{2}\%$ una suma el 22 de junio y el 20 de septiembre del mismo año se pagan de intereses \$18.75. ¿Cuál fue la suma prestada? **R. \$3,000**

722

CÁLCULO DEL %

¿A qué % anual se han impuesto \$75,000 que en 24 días han producido \$250?

Aplicamos la fórmula r con 36,000 porque el tiempo viene en días:

$$r = \frac{36,000i}{ct} = \frac{36,000 \times 250}{75,000 \times 24} = 5\% \text{ anual} \quad \mathbf{R.}$$

319

Ejercicio

1. ¿A qué % se imponen \$800 que en 5 años producen \$40? **R. 1%**
2. ¿A qué % se imponen \$1,254 que en 6 meses producen \$62.70? **R. 10%**
3. ¿A qué % se imponen \$8,200 que en 90 días producen \$410? **R. 20%**

4. ¿A qué % se imponen 12,000 bolivianos que en 2 años 9 meses y 18 días producen 2,016 bolivianos? **R. 6%**
5. Si 7,200 córdobas en 1 año y 50 días han producido 820, ¿a qué % se impusieron? **R. 10%**
6. Si pago 350 quetzales al mes por una hipoteca de 84,000, ¿a qué % se ha dado el dinero? **R. 5%**
7. Tengo que pagar 70 nuevos soles cada 3 meses por un préstamo que recibí de 4,000 nuevos soles. ¿A qué % me prestaron el dinero? **R. 7%**
8. Pagaba \$500 al mes como intereses de una hipoteca de \$50,000, pero el acreedor me redujo los intereses a \$375 mensuales. ¿Qué % me ha rebajado? **R. 3%**
9. Juan García paga \$4,000 al mes por \$480,000 que tomó en hipoteca sobre una casa y Pedro González paga \$3,000 al mes por \$900,000 que tomó en hipoteca sobre un solar. ¿Cuál de los dos préstamos se hizo a mayor % y cuánto es el exceso de un % sobre el otro? **R. El 1º; 6%**
10. Por \$55,000 que se prestaron durante 120 días se han recibido de interés \$550. ¿A qué % mensual se hizo el préstamo? **R. $\frac{1}{4}\%$ mensual**
11. ¿A qué % se impusieron 12,000 lempiras el 23 de abril si el 9 de agosto del mismo año se pagaron 144 de intereses? **R. 4%**
12. Se toman 9,000 bolivianos a préstamo el 9 de junio y el capital prestado se devuelve el 20 de diciembre del mismo año, pagando 169.75 de intereses. ¿Cuál fue el % de interés? **R. $3\frac{1}{2}\%$**

CÁLCULO DEL TIEMPO

723

6,000 balboas impuestos a 2% han producido 600. ¿Qué tiempo estuvieron impuestos?

Si queremos el tiempo en años aplicamos la fórmula de t con 100; si en meses, con 1,200 y si en días con 36,000. Aquí se halla en años:

$$t = \frac{100/}{cr} = \frac{100 \times 600}{6,000 \times 2} = 5 \text{ años} \quad \text{R.}$$

1. ¿Qué tiempo han estado impuestos Q960 que a 5% han producido Q48? **R. 1 año**
2. ¿Qué tiempo han estado impuestos 5,600 lempiras que a 12% han producido 392? **R. 7 meses**
3. ¿Qué tiempo han estado impuestos 8,000 córdobas que a 6% han producido 56? **R. 42 días**
4. Presté 7,200 nuevos soles a $\frac{1}{6}\%$ mensual y me pagaron de intereses 14.40. ¿Cuánto tiempo tuve invertido el dinero? **R. 36 días**
5. Por 5,300 nuevos soles que se prestaron a $1\frac{1}{2}\%$ mensual se han recibido intereses por 795. ¿Cuánto tiempo duró la imposición? **R. 10 meses**
6. Con los intereses de 60,000 nuevos soles a 1% mensual se ha adquirido un solar de 9,000. ¿Cuánto tiempo estuvo impuesto el dinero? **R. 1 año 3 meses**

320

Ejercicio

7. Mario Rodríguez hizo un préstamo de 8,000 colones a 6% y pagó de intereses 360, y Sebastián Roldán hizo otro préstamo de 7,000 colones a 5% y pagó de intereses 350. ¿Cuál de los dos tardó más tiempo en devolver el dinero y cuánto tiempo más? **R. El 2º, 3 meses**
8. Por un capital de 8,000 lempiras prestado a 8% he pagado 80 de intereses. Si hubiera pagado de intereses $85\frac{1}{3}$, ¿cuánto tiempo más hubiera tenido yo el dinero? **R. 3 días más**
9. Una suma de 1,200 lempiras tomada a préstamo a 7% se devuelve el 8 de abril pagando de intereses 8.40. ¿Qué día se hizo el préstamo? **R. 3 de marzo**
10. Se toma a 4% una suma de 9,000 balboas el 13 de septiembre y al devolver el capital se pagan 74 de intereses. ¿Qué día se hizo la devolución? **R. 26 de noviembre**

321

MISCELÁNEA

Ejercicio

(Si no se dice lo contrario, el % se entiende anual.)

1. Hallar el interés anual de \$450 a 5%. **R. \$22.50**
2. ¿Qué renta mensual producen \$1,500 a 6%? **R. \$7.50**
3. ¿A qué % se imponen \$515 que producen $4\frac{7}{24}$ mensuales? **R. 10%**
4. Hallar la suma que a $5\frac{1}{2}\%$ produce \$22 al año. **R. \$400**
5. ¿Cuánto producirán 7,200 balboas a $3\frac{3}{4}\%$ en 5 meses? **R. 112.50 balboas**
6. Hallar la renta diaria de \$40,000 a $3\frac{2}{5}\%$. **R. $3\frac{7}{9}$**
7. ¿Qué capital a $2\frac{1}{2}\%$ produce en 7 años 1,750 bolivianos? **R. 10,000 bolivianos**
8. ¿A qué % se impusieron \$7,100 que en 3 años han producido un rédito de \$71 mensuales? **R. 12%**
9. Si se quiere que una suma de \$1,926 a $\frac{2}{3}\%$ mensual produzca \$321, ¿cuántos meses debe durar la imposición? **R. 25 meses**
10. ¿Qué suma hay que imponer a $1\frac{3}{4}\%$ mensual para que en 3 años y medio produzca \$147? **R. \$200**
11. Hallar el interés anual de \$800 a $8\frac{3}{4}\%$. **R. \$70**
12. ¿Cuánto producirán 8,400 lempiras a $3\frac{1}{2}\%$ en 2 años? **R. 588 lempiras**
13. ¿Qué suma se impone a $4\frac{1}{2}\%$ si en 2 años y 5 meses produce 2,610 quetzales? **R. Q24,000**
14. Hallar el interés de \$18,000 a 7% en 7 meses y 10 días. **R. \$770**
15. ¿Qué suma a $\frac{1}{30}\%$ diario produce \$20.25 mensuales? **R. \$2,025**
16. ¿A qué % mensual hay que imponer \$243 para que en 5 años produzcan \$81? **R. $\frac{5}{9}\%$ mensual**
17. ¿Cuántos días han estado impuestos 4,000 córdobas que a 9% han producido 23? **R. 23 días**

18. Cierta suma impuesta a 14% ha producido \$49 en 2 meses y 10 días. ¿Cuál fue el capital impuesto? **R. \$1,800**
19. Hallar la renta mensual de 15,000 nuevos soles a $1\frac{1}{2}\%$ mensual. **R. 225 nuevos soles**
20. ¿A qué % diario se imponen \$350 que producen \$7 al mes? **R. $\frac{1}{15}\%$ diario**
21. Por un préstamo que hice a 1% mensual durante 5 meses y 4 días he cobrado \$154 de intereses. ¿Cuál fue la cantidad prestada? **R. \$3,000**
22. ¿A qué % hay que imponer una suma de 72,000 nuevos soles para obtener en 5 años y 8 días un rédito de 10,848? **R. 3% anual**
23. ¿Qué suma a 4% produce \$8 al año? **R. \$200**
24. ¿Cuánto producirán \$4,500 a 12% en 3 años, 5 meses y 8 días? **R. \$1,857**
25. ¿Qué tiempo estuvieron impuestos \$500 si a 7% produjeron \$70? **R. 2 años**
26. ¿Qué suma a $\frac{3}{4}\%$ mensual produce \$12 al año? **R. $\$133\frac{1}{3}$**
27. Hallar la renta mensual que producen \$15,000 impuestos a 18%. **R. 225**
28. 7,800 colones a $3\frac{1}{2}\%$ han producido 928.20. ¿Qué tiempo estuvo colocado el dinero?
R. 3 años 4 meses 24 días
29. ¿A qué % hay que imponer \$325 para que produzcan \$26 al año? **R. 8% anual**
30. ¿Qué suma a 1% mensual producen \$240 en 10 años? **R. \$200**
31. ¿A qué % se han impuesto \$2,400 que en 7 meses han producido \$28? **R. 2% anual**
32. Hallar el interés de 2,300 lempiras a 7% en 5 años. **R. 805 lempiras**
33. ¿A qué % mensual se imponen \$200 que producen \$16 al año? **R. $\frac{2}{3}\%$ mensual**
34. ¿Cuánto producen en 40 días 9,000 nuevos soles a $5\frac{1}{8}\%$? **R. 51.25 nuevos soles**
35. ¿A qué % se imponen \$6,300 que en 2 años producen \$252? **R. 2%**
36. ¿Qué tiempo han de estar impuestos 15,000 quetzales para que a $1\frac{1}{45}\%$ diario produzcan 270?
R. 2 meses 21 días
37. ¿Cuánto producen 12,000 colones a 3% en 2 años y 18 días? **R. 738 colones**
38. ¿Qué suma a 4% producen 3,200 bolivianos en 2 años? **R. 40,000 bolivianos**

CASO PARTICULAR DEL INTERÉS SIMPLE

724

Se incluyen en el **caso particular** del interés simple los problemas que corresponden a los **cuatro casos** siguientes: **1)** conociendo c , t y r , hallar la suma del capital con el interés, que se llama **monto** y se representa con la letra C ; **2)** conociendo el monto C , c y t , hallar r ; **3)** conociéndose C , c y r , hallar t ; y **4)** conociendo C , t y r , hallar c .

1) Conociendo c , t y r , hallar el monto, C .

725

¿En cuánto se convertirán 7,200 quetzales a $3\frac{3}{4}\%$ anual en 5 meses?

Nos piden el monto C , que es la suma del capital con el interés, o sea, $C = c + I$. Como conocemos el capital, 7,200 quetzales, sólo tenemos que hallar el interés y sumarlo con c .

$$I = \frac{ctr}{1,200} = \frac{7,200 \times 5 \times 3.75}{1,200} = \text{Q112.50} \quad \text{R.}$$

Como $C = c + I$, sabiendo que $c = \text{Q7,200}$ y que $I = \text{Q112.50}$ tendremos:

$$C = \text{Q7,200} + \text{Q112.50} = \text{Q7,312.50} \quad \text{R.}$$

2) Conociendo C , c y t , hallar r .

726

¿A qué % anual se impusieron \$9,000 que en 40 días se convirtieron en \$9,051.25?

Aplicaremos la fórmula de r con 36,000 y para hallar el interés no tenemos más que restar de C , el capital con sus intereses acumulados, \$9,051.25, el valor de c que es \$9,000 y el interés será:

$$I = C - c = \$9,051.25 - \$9,000 = \$51.25, \text{ y tendremos:}$$

$$r = \frac{36,000I}{ct} = \frac{36,000 \times 51.25}{9,000 \times 40} = 5\frac{1}{8}\% \quad \text{R.}$$

3) Conociendo C , c y r , hallar t .

727

¿Qué tiempo han de estar impuestos \$500 para que a 7% anual se conviertan en \$570?

Aplicamos la fórmula de t , y para hallar el interés I no tenemos más que restar el capital c que es \$500, del monto C que es \$570 y el interés $I = C - c$ será $\$570 - \$500 = \$70$ y tendremos:

$$t = \frac{100I}{cr} = \frac{100 \times 70}{500 \times 7} = 2 \text{ años} \quad \text{R.}$$

4) Conociendo C , t y r , hallar c .

Para resolver este caso tenemos que aplicar la fórmula que deducimos a continuación.

728

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL CAPITAL PRIMITIVO

Sabemos que $C = c + I$ y como $I = \frac{ctr}{100}$ tendremos: $C = c + \frac{ctr}{100}$

Incorporando el entero c en el segundo miembro: $C = \frac{100c + ctr}{100}$

Pasando el divisor 100 del segundo miembro al primero: $100C = 100c + ctr$

Sacando el factor común c en el segundo miembro: $100 \times C = c(100 + tr)$ y despejando

$$c, \text{ queda: } c = \frac{100C}{100 + tr}$$

Ésta es la fórmula que se aplica siendo t años; si es *meses* deben sustituirse los dos 100 por 1,200 y si es *días* por 36,000.

- 1) ¿Cuál es el capital que impuesto a 7% anual en 5 años se ha convertido en \$3,105?
Aplicamos la fórmula del capital primitivo con 100 porque el tiempo viene dado en años:

$$C = \frac{100 C}{100 + tr} = \frac{100 \times 3,105}{100 + (7 \times 5)} = \frac{100 \times 3,105}{135} = \$2,300 \quad \text{R.}$$

- 2) Se impone cierta suma a 3% y al cabo de 2 años y 18 días se ha convertido en \$12,738
¿Cuál fue la suma impuesta?
Aplicamos la fórmula del capital primitivo con 36,000 porque el tiempo lo reduciremos a días:

$$C = \frac{36,000 C}{36,000 + tr} = \frac{36,000 \times 12,738}{36,000 + (3 \times 738)} = \frac{36,000 \times 12,738}{38,214} = \$12,000 \quad \text{R.}$$

- ¿En cuánto se convertirán \$250 a 6% en 4 años? **R. \$310**
- ¿En cuánto se convertirán 300 quetzales impuestos a $3\frac{2}{5}\%$ durante 8 meses? **R. Q306.80**
- ¿En cuánto se convertirán 720 balboas impuestos a $5\frac{3}{4}\%$ anual durante 4 años y 8 días?
R. 886.52 balboas
- Una persona impone 4,500 dólares a 12% anual y al cabo de 3 años 5 meses y 8 días le entregan el capital prestado y sus intereses acumulados durante ese tiempo. ¿Cuánto recibirá?
R. 6,357 dólares
- ¿A qué tanto por ciento anual se han impuesto 8,000 balboas que en 8 años se convirtieron en 10,000? **R. $3\frac{1}{8}\%$ anual**
- ¿A qué tanto por ciento anual se impusieron 4,800 lempiras que en 2 años y un mes se convirtieron en 5,000? **R. 2% anual**
- Una persona presta a un amigo \$4,500 durante un año y 40 días y al cabo de este tiempo el amigo le entrega \$4,700, importe del capital prestado y sus intereses acumulados. ¿A qué tanto por ciento anual hizo la operación? **R. 4% anual**
- ¿A qué tanto por ciento anual se impusieron \$324 si al cabo de 8 años y 4 meses el capital se ha doblado. **R. 12% anual**
- ¿A qué tanto por ciento anual hay que imponer \$50 para que en 20 años el capital se triplique?
R. 10% anual
- ¿Qué tiempo han estado impuestos \$500 que a 2% anual se han convertido en \$600? **R. 10 años**
- Una suma de 2,700 quetzales se presta a 4% anual y se convierte en 2,730. ¿Cuánto tiempo duró la imposición? **R. 3 meses 10 días**
- Se impusieron 3,600 córdobas a $8\frac{1}{5}\%$ anual y se convirtieron en 3,673.80. ¿Cuántos meses duró la imposición? **R. 3 meses**
- ¿Cuánto tiempo han estado impuestos \$815 a 10% anual si el capital se ha doblado? **R. 10 años**
- ¿Cuánto tiempo han estado impuestos 4,567 nuevos soles a 8% anual si el capital se ha triplicado? **R. 25 años**
- ¿Cuál es la suma que impuesta a 4% en 2 años se ha convertido en 43,200 nuevos soles?
R. 40,000 nuevos soles

16. Cierta suma impuesta a $2\frac{1}{2}\%$ anual durante 7 años se ha convertido en 11,750 lempiras. ¿Cuál es esa suma? **R. 10,000 lempiras**
17. Juan presta a un amigo cierta suma a $1\frac{1}{2}\%$ anual y al cabo de 2 años y 5 meses el amigo le entrega \$26,610, importe del capital prestado y sus intereses acumulados. ¿Qué suma prestó Juan a su amigo? **R. \$24,000**
18. Se imponen cierta suma a 14% anual y al cabo de 2 meses y 10 días se retiran \$1,849, importe del capital prestado y sus intereses acumulados durante ese tiempo. ¿Cuál fue la suma impuesta? **R. \$1,800**
19. Una persona impone cierto capital a $1\frac{1}{2}\%$ anual y al cabo de 1 año, 7 meses y 12 días recibe \$40,970, importe del capital prestado y sus intereses acumulados. ¿Cuál fue la suma impuesta? **R. \$40,000**
20. Me pagan 1,577 bolivianos como importe del principal e intereses de cierta suma que presté a 1% mensual durante 5 meses y 4 días. ¿Qué suma presté? **R. 1,500 bolivianos**
21. ¿En cuánto se convertirán 60,000 colones a 9% del 14 de mayo al 23 de junio del mismo año? **R. 60,600 colones**
22. ¿A qué % se impuso una suma de \$300 el 19 de agosto si el 7 de noviembre del mismo año se ha convertido en \$308? **R. 12%**
23. Se toman 6,000 quetzales a 6% y el 9 de diciembre del mismo año se devuelven 6,053, importe del capital prestado y sus intereses acumulados. ¿Qué día se hizo el préstamo? **R. 17 de octubre**
24. Se toma a 4% una suma el 3 de abril y el 2 de julio del mismo año se devuelven 808 bolívares, importe del capital recibido y sus intereses acumulados en ese tiempo. ¿Cuál fue el capital prestado? **R. 800 bolívares**

II. INTERÉS COMPUESTO

729

SU RESOLUCIÓN POR ARITMÉTICA

Los problemas de interés compuesto se resuelven en Aritmética de dos modos:

- 1) Por aplicaciones sucesivas del interés simple.
- 2) Por medio de las tablas de interés compuesto.

730

MÉTODO DE APLICACIONES SUCESIVAS DEL INTERÉS SIMPLE

Se produce así: se halla el interés del capital en la primera unidad de tiempo y este interés se suma al capital; esta suma se considera como capital de la segunda unidad de tiempo y se halla el interés de este nuevo capital en dicha segunda unidad de tiempo; al interés que se obtenga se le suma al capital y esta suma es el capital para la tercera unidad de tiempo; se halla el interés de este nuevo capital en la tercera unidad de tiempo y se le suma al capital, y así sucesivamente hasta terminar con todas las unidades de tiempo.

- 1) Hallar los intereses compuestos de \$200 a 3% anual en 2 años.

Hallamos el interés de \$200 en el primer año:

$$I = \frac{ctr}{100} = \frac{200 \times 1 \times 3}{100} = \$6$$

Este interés del primer año se suma al capital:

$$\$200 + \$6 = \$206$$

Ahora hallamos el interés de \$206 en el segundo año:

$$I = \frac{ctr}{100} = \frac{206 \times 1 \times 3}{100} = \$6.18$$

Este interés del segundo año lo sumamos con el capital anterior:

$$\$206 + \$6.18 = \$212.18$$

Por lo tanto, si los \$200 se han convertido en \$212.18, los intereses compuestos son:

$$\$212.18 - \$200 = \$12.18 \quad \text{R.}$$

- 2) ¿En cuánto se convertirán \$300 a 4% anual de interés compuesto en 2 años 5 meses?

Hallamos el interés de \$300 en el primer año:

$$I = \frac{300 \times 4 \times 1}{100} = 12 \quad \$300 + \$12 = \$312$$

Hallamos el interés de \$312 en el segundo año:

$$I = \frac{312 \times 4 \times 1}{100} = \$12.48 \quad \$312 + \$12.48 = \$324.48$$

Hallamos el interés de \$324.48 en los 5 meses:

$$I = \frac{324.48 \times 5 \times 4}{1,200} = \$5.41 \quad \$324.48 + \$5.41 = \$329.89 \quad \text{R.}$$

- 3) ¿En cuánto se convertirán \$400 a 3% anual de interés compuesto en 1 año, capitalizando los intereses por trimestres?

Como los intereses se capitalizan, es decir, se suman al capital por trimestres, tenemos que hallar el interés de trimestre en trimestre, durante los 4 trimestres que tiene un año.

Halleemos el interés de \$400 en el primer trimestre:

$$I = \frac{400 \times 3 \times 3}{1,200} = \$3 \quad \$400 + \$3 = \$403$$

Halleemos el interés de \$403 en el segundo trimestre:

$$I = \frac{403 \times 3 \times 3}{1,200} = \$3.02 \quad \$403 + \$3.02 = \$406.02$$

Halleemos el interés de \$406.02 en el tercer trimestre:

$$I = \frac{406.02 \times 3 \times 3}{1,200} = \$3.05 \quad \$406.02 + \$3.05 = \$409.07$$

Halleemos el interés de \$409.07 en el cuarto trimestre:

$$I = \frac{409.07 \times 3 \times 3}{1,200} = \$3.07 \quad \$409.07 + \$3.07 = \$412.14 \quad \text{R.}$$

Los \$400 se convertirán en \$412.14.

323

Ejercicio

1. Hallar los intereses compuestos de \$120 a 5% anual en 2 años. **R. \$12.30**
2. ¿En cuánto se convertirán \$400 a 6% anual de interés compuesto en 3 años? **R. \$476.41**
3. ¿En cuánto se convertirán \$500 a 7% anual de interés compuesto en 5 años? **R. \$701.28**
4. Hallar los intereses compuestos de \$200 a 2% anual en 2 años y 7 meses. **R. \$10.51**
5. ¿En cuánto se convertirán 600 nuevos soles a 3% anual de interés compuesto en 1 año, capitalizando los intereses por trimestres? **R. 618.20 nuevos soles**
6. Hallar los intereses compuestos de \$800 a 6% anual en año y medio, capitalizando los intereses por semestres. **R. \$74.18**
7. ¿En cuánto se convertirán 700 bolivianos a $4\frac{1}{2}\%$ anual en 1 año y 4 meses, capitalizando los intereses cada 4 meses? **R. 742.95 bolivianos**

731

MÉTODO DE LAS TABLAS DE INTERÉS COMPUESTO

El procedimiento explicado antes es muy laborioso. Mucho más rápido es usar la tabla de interés compuesto que aparece en la página 564.

El monto o importe C de un capital c colocado a interés compuesto durante t años o unidades de tiempo a un tanto por ciento dado puede calcularse por la fórmula $C = c(1 + r)^t$ en la cual r no es el tanto por ciento anual, sino el tanto por uno, es decir, lo que gana \$1 en cada año o unidad de tiempo ⁽¹⁾

El valor de $(1 + r)^t$ nos lo da la tabla de la página 564, con lo cual para hallar el monto no hay más que multiplicar el capital por el valor de este binomio. Hallado el monto, el interés compuesto es la diferencia entre éste y el capital.

Ejemplos

- 1) ¿En cuánto se convertirán \$6,000 a 3% de interés compuesto en 5 años?

Aquí $c = \$6,000$, $t = 5$, $r = 0.03$ porque el tanto por ciento 3 significa que \$100 ganan \$3 al año, luego \$1 ganará $3 \div 100 = \$0.03$ y éste es el tanto por uno.

Aplicando la fórmula $C = c(1 + r)^t$ tenemos:
 $C = 6,000 \times (1 + 0.03)^5$
 $C = 6,000 \times (1.03)^5$

El valor de 1.03^5 o sea el valor adquirido por \$1 a 3% en 5 años nos lo da la tabla y es 1.159274, luego:

$$C = 6,000 \times 1.159274$$

$$C = \$6,955.64$$

Los intereses compuestos serán:

$$\$6,955.64 - \$6,000 = \$955.64 \quad \text{R.}$$

⁽¹⁾ La deducción de esta fórmula se estudia en Álgebra.

- 2) Hallar los intereses compuestos de \$16,800 a $5\frac{1}{2}\%$ en 8 años.

El valor adquirido por \$1 a $5\frac{1}{2}\%$ en 8 años según la tabla es 1.534687, luego:

$$C = 16,800 \times 1.534687$$

$$C = \$25,782.74$$

Los intereses compuestos son: $\$25,782.74 - \$16,800 = \$8,982.74$ R.

- 3) Hallar los intereses compuestos de \$5,820 a 9% en 17 años.

El valor adquirido por \$1 a 9% en 17 años es 4.327633 luego:

$$C = 5,820 \times 4.327633$$

$$C = \$25,186.82$$

El interés compuesto es: $\$25,186.82 - \$5,820 = \$19,366.82$ R.

- 4) ¿En cuánto se convertirán \$500 a 6% de interés compuesto en 1 año capitalizando los intereses por trimestres?

Como la unidad de tiempo es el trimestre y en 1 año hay 4 trimestres, $t = 4$.

Como el % anual es 6% el % trimestral será $6 \div 4 = 1\frac{1}{2}\%$. El valor de \$1 a $1\frac{1}{2}\%$ anual en 4 trimestres (igual que si fuera en 4 años) es 1.061364, según la tabla, luego:

$$C = 500 \times 1.061364$$

$$C = \$530.68$$

Los intereses compuestos serán: $\$530.68 - \$500 = \$30.68$ R.

Usando la tabla de interés compuesto de la página 564, hallar en cuánto se convertirán:

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. 300 balboas a 2% en 5 años. | R. 331.22 balboas |
| 2. \$785 a 4% en 6 años. | R. \$993.28 |
| 3. 987.50 quetzales a $3\frac{1}{2}\%$ en 8 años. | R. Q1,300.35 |
| 4. 15,600 bolivianos a $4\frac{1}{2}\%$ en 7 años. | R. 20,387.05 bolivianos |
| 5. 23,456 nuevos soles a 6% en 12 años. | R. 47,198.09 nuevos soles |
| 6. \$325.86 a 11% en 15 años. | R. \$1,559.11 |

Hallar los intereses compuestos de:

- | | |
|---|--------------------------|
| 7. \$840 a 7% en 9 años. | R. \$704.31 |
| 8. 13,456 nuevos soles a 8% en 3 años. | R. 3,494.68 nuevos soles |
| 9. \$876.45 a $4\frac{1}{2}\%$ en 6 años. | R. \$264.92 |
| 10. 35,000 bolivianos a 10% en 7 años. | R. 33,205.10 bolivianos |
| 11. \$600 a 4% en un año capitalizando los intereses por trimestres. | R. \$24.36 |
| 12. \$800 a 9% en año y medio capitalizando los intereses por semestres. | R. \$112.93 |
| 13. 1,200 dólares a 12% en 2 años capitalizando los intereses por trimestres. | R. 320.12 dólares |

TABLA DE INTERÉS COMPUESTO

**VALOR ADQUIRIDO POR \$1 A INTERÉS COMPUESTO DE 1 A 20 AÑOS
O SEA VALOR DE $(1 + r)^t$**

AÑOS	1%	$1\frac{1}{2}\%$	2%	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$
1	1.010000	1.015000	1.020000	1.025000	1.030000	1.035000	1.040000	1.045000
2	1.020100	1.030225	1.040400	1.050625	1.060900	1.071225	1.081600	1.092025
3	1.030301	1.045678	1.061208	1.076891	1.092727	1.108718	1.124864	1.141166
4	1.040604	1.061364	1.082432	1.103813	1.125509	1.147523	1.169859	1.192519
5	1.051010	1.077284	1.104081	1.131408	1.159274	1.187686	1.216653	1.246182
6	1.061520	1.093443	1.126162	1.159693	1.194052	1.229255	1.265319	1.302260
7	1.072135	1.109845	1.148686	1.188686	1.229874	1.272279	1.315932	1.360862
8	1.082857	1.126493	1.171659	1.218403	1.266770	1.316809	1.368569	1.422101
9	1.093685	1.143390	1.195093	1.248863	1.304773	1.362897	1.423312	1.486095
10	1.104622	1.160541	1.218994	1.280085	1.343916	1.410599	1.480244	1.552969
11	1.115668	1.177949	1.243374	1.312087	1.384234	1.459970	1.539454	1.622853
12	1.126825	1.195618	1.268242	1.344889	1.425761	1.511069	1.601032	1.695881
13	1.138093	1.213552	1.293607	1.378511	1.468534	1.563956	1.665074	1.772196
14	1.149474	1.231756	1.319479	1.412974	1.512590	1.618695	1.731676	1.851945
15	1.160969	1.250232	1.345868	1.448298	1.557967	1.675349	1.800944	1.935282
16	1.172579	1.268986	1.372786	1.484506	1.604706	1.733986	1.872981	2.022370
17	1.184304	1.288020	1.400241	1.521618	1.652848	1.794676	1.947901	2.118377
18	1.196148	1.307341	1.428246	1.559659	1.702433	1.857489	2.025817	2.208479
19	1.208109	1.326951	1.456811	1.598650	1.753506	1.922501	2.106849	2.307860
20	1.220190	1.346855	1.485947	1.638616	1.806111	1.989789	2.191123	2.411714
AÑOS	5%	$5\frac{1}{2}\%$	6%	7%	8%	9%	10%	11%
1	1.050000	1.055000	1.060000	1.070000	1.080000	1.090000	1.100000	1.110000
2	1.102500	1.113025	1.123600	1.144900	1.166400	1.188100	1.210000	1.232100
3	1.157625	1.174241	1.191016	1.225043	1.259712	1.295029	1.331000	1.367631
4	1.215506	1.238825	1.262477	1.310796	1.360489	1.411582	1.464100	1.518070
5	1.276282	1.306960	1.338226	1.402552	1.469328	1.538624	1.610510	1.685058
6	1.340096	1.378843	1.418519	1.500730	1.586874	1.677100	1.771561	1.870414
7	1.407100	1.454679	1.503630	1.605782	1.713824	1.828039	1.948717	2.076160
8	1.477455	1.534687	1.593848	1.718186	1.850930	1.992563	2.143589	2.304537
9	1.551328	1.619094	1.689479	1.838459	1.999005	2.171893	2.357948	2.558036
10	1.628895	1.708145	1.790848	1.967151	2.158925	2.367364	2.593742	2.839420
11	1.710339	1.802092	1.898299	2.104852	2.331639	2.580426	2.853117	3.151757
12	1.795856	1.901208	2.012197	2.252192	2.518170	2.812665	3.138428	3.498450
13	1.885649	2.005774	2.132928	2.409845	2.719624	3.065805	3.452271	3.883279
14	1.979932	2.116092	2.260904	2.578534	2.937194	3.341727	3.797498	4.310440
15	2.078928	2.232477	2.396558	2.759032	3.172169	3.642482	4.177248	4.784588
16	2.182875	2.355263	2.540352	2.952164	3.425943	3.970306	4.594973	5.310893
17	2.292018	2.484802	2.692773	3.158815	3.700018	4.327633	5.054470	5.895091
18	2.406619	2.621466	2.854339	3.379932	3.996019	4.717120	5.559917	6.543551
19	2.526950	2.765647	3.025599	3.616528	4.315701	5.141661	6.115909	7.263342
20	2.653298	2.917758	3.207136	3.869685	4.660957	5.604411	6.727500	8.062309

TABLA DE INTERÉS COMPUESTO DECRECIENTE

VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD POR \$1 A INTERÉS COMPUESTO DE 1 A 20 AÑOS

CÓMO USAR ESTA TABLA

En muchas operaciones mercantiles se emplea el interés compuesto decreciente, en el que se van amortizando cantidades anuales, que incluyen principal e intereses. Así, si se presta una suma con un interés compuesto decreciente en un tiempo cualquiera, tenemos que determinar las amortizaciones anuales. Para hallar dichas amortizaciones buscamos en la tabla los años y el tipo de interés, en el punto coincidente de ambos encontraremos el factor. Este factor se multiplica por el capital prestado y nos da la anualidad de amortización.

AÑOS	1%	$1\frac{1}{2}\%$	2%	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$
1	1.010000	0.015000	1.020000	1.025000	1.030000	1.035000
2	0.507512	0.511278	0.515050	0.518827	0.522611	0.526400
3	0.340022	0.343383	0.346755	0.350137	0.353530	0.356934
4	0.256281	0.259445	0.262624	0.265818	0.269027	0.272251
5	0.206040	0.209089	0.212158	0.215247	0.218355	0.221481
6	0.172548	0.175525	0.178526	0.181550	0.184598	0.187668
7	0.148628	0.151556	0.154512	0.157495	0.160506	0.163544
8	0.130690	0.133584	0.136510	0.139467	0.142456	0.145477
9	0.116740	0.119610	0.122515	0.125457	0.128434	0.131446
10	0.105582	0.108434	0.111327	0.114259	0.117231	0.120241
11	0.096454	0.099294	0.102178	0.105106	0.108077	0.111092
12	0.088849	0.091680	0.094560	0.097487	0.100462	0.103484
13	0.082415	0.085240	0.088118	0.091048	0.094030	0.097062
14	0.076901	0.079723	0.082602	0.085537	0.088526	0.091571
15	0.072124	0.074944	0.077825	0.080766	0.083767	0.086825
16	0.067945	0.070765	0.073650	0.076599	0.079611	0.082685
17	0.064258	0.067080	0.069970	0.072928	0.075953	0.079043
18	0.060982	0.063806	0.066702	0.069670	0.072709	0.075817
19	0.058052	0.060878	0.063782	0.066761	0.069814	0.072940
20	0.055415	0.058246	0.061157	0.064147	0.067216	0.070361
AÑOS	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	$5\frac{1}{2}\%$	6%	7%
1	1.040000	1.045000	1.050000	1.055000	1.060000	1.070000
2	0.530196	0.533998	0.537805	0.541618	0.545437	0.553092
3	0.360349	0.363773	0.367209	0.370654	0.374110	0.381052
4	0.275490	0.278744	0.282012	0.285294	0.288591	0.295228
5	0.224627	0.227792	0.230975	0.234176	0.237396	0.243891
6	0.190762	0.193878	0.197017	0.200179	0.203363	0.209796
7	0.166610	0.169701	0.172820	0.175964	0.179135	0.185553
8	0.148528	0.151610	0.154722	0.157864	0.161036	0.167468
9	0.134493	0.137574	0.140690	0.143839	0.147022	0.153486
10	0.123291	0.126379	0.129505	0.132668	0.135868	0.142378
11	0.114149	0.117248	0.120389	0.123571	0.126793	0.133357
12	0.106552	0.109666	0.112825	0.116029	0.119277	0.125902
13	0.100144	0.103275	0.106456	0.109684	0.112960	0.119651
14	0.094669	0.097820	0.101024	0.104279	0.107585	0.114345
15	0.089941	0.093114	0.096342	0.099626	0.102963	0.109795
16	0.085820	0.089015	0.092270	0.095583	0.098952	0.105858
17	0.082199	0.085418	0.088699	0.092042	0.095445	0.102425
18	0.078993	0.082237	0.085546	0.088920	0.092357	0.099413
19	0.076139	0.079407	0.082745	0.086150	0.089621	0.096753
20	0.073582	0.076876	0.080243	0.083679	0.087185	0.094393

Tomamos un préstamo de \$4,500 a 6% de interés compuesto decreciente pagadero en 5 años. Buscamos en la tabla y encontramos el factor 0.237396; multiplicamos este factor por el capital \$4,500 y nos dará una anualidad de \$1,068.28.

AÑOS	INTERÉS	PAGOS ANUALES PRINCIPAL E INTERESES		PRÉSTAMO TOTAL
5	6%	\$1,068.28		\$4,500.00
	PAGOS DEL INTERÉS	PAGOS DEL PRINCIPAL	PAGOS TOTALES	SALDO DEUDOR
primer año	\$270.00	\$798.28	\$1,068.28	\$3,701.72
segundo año	222.10	846.18	1,068.28	2,855.54
tercer año	171.33	896.95	1,068.28	1,958.59
cuarto año	117.52	950.76	1,068.28	1,007.83
quinto año	60.47	1,007.83	1,068.30	0

Ejemplo



El origen de la letra de cambio puede ubicarse en las ferias de Flandes y Champaña. Surge al hacerse más complejas las operaciones mercantiles. Hacia el siglo XII se establece la práctica de pagar, mediante promesa escrita, una cantidad

en un lugar distinto de aquel en que se contrae la deuda. El pago se podía hacer al *nuntius* (representante) del acreedor, o hacerlo mediante un representante del deudor.

Capítulo **XLVII**

DESCUENTO

732

LETRA DE CAMBIO

La **letra de cambio** es un documento expedido en forma legal, por el cual una persona manda a otra que pague, a la orden de ella misma o de un tercero, una cantidad de dinero, en el lugar y tiempo que determina el documento.

La persona que ordena pagar es el **librador**; la persona a quien va dirigida la letra y que paga es el **librado**; la persona que cobra la letra es el **tomador** o **tenedor**.

Todo lo relacionado con la letra de cambio está regulado por el Código de Comercio.

733

REQUISITOS DE UNA LETRA DE CAMBIO

Para que la letra de cambio surta efecto en juicio, deberá contener: 1) el lugar, día, mes y año en que se expide o libra la letra; 2) el tiempo en que se pagará (**vencimiento**); 3) el nombre y apellido, razón social o título de la persona o entidad a cuya orden se manda hacer el pago (**tenedor**); 4) la cantidad que se manda pagar expresada en moneda efectiva (**valor nominal**); 5) las palabras "valor recibido" o "valor en cuenta"; 6) el nombre y apellido, razón social o título de aquel de quien se recibe el importe de la letra o a cuya cuenta se carga; 7) el nombre y apellido, razón social o título del librado; 8) la firma del librador, y 9) el sello del timbre que determina la ley.

Si la letra de cambio no reúne los requisitos legales, se considerará pagará si reúne las condiciones de éste a la orden del tenedor y a cargo del librado.

MODELO DE UNA LETRA DE CAMBIO

\$500

México, D. F., a 6 de marzo de 1998.

A quince días vista se servirá usted pagar por esta PRIMERA DE CAMBIO (no habiéndolo hecho por la segunda o tercera) a la orden del señor Pedro Hernández, la cantidad de quinientos pesos, valor recibido en mercancías, que anotará usted en cuenta de

a Ricardo González
Nápoles 77, México, D. F.

JUAN SOLÍS Y CA.

En este ejemplo, el *librador* es Juan Solís y Ca., el *librado* Ricardo González y el *tenedor* Pedro Hernández

PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA DE CAMBIO

734

Cuando se envían letras, sobre todo al extranjero, se envían por duplicado o triplicado y se llaman **primera**, **segunda** y **tercera de cambio**. Se envían por separado para evitar pérdidas o demora. Si una cualquiera de ellas es aceptada o pagada, las demás quedan anuladas.

TÉRMINO O PLAZOS DE LAS LETRAS

735

Las letras de cambio pueden girarse al contado o a plazos por uno de estos términos: **1)** a la vista, **2)** a uno o más días, a uno o más meses vista, **3)** a uno o más días, a uno o más meses fecha, y **4)** a día fijo o determinado.

VENCIMIENTO

736

Los términos anteriores obligan al **librado** a pagar la letra, o sea que la letra **vence** de este modo:

A la vista: el librado tiene que pagar la letra el día que se la presenten.

A días o meses vista: el día en que se cumplen los días o meses señalados a contar desde el día siguiente al de la **aceptación** de la letra por el librado o del **protesto**.

A días o meses fecha: el día en que se cumplen los días o meses señalados a contar desde el día siguiente al de la fecha de la letra.

A día fijo: el día señalado.

Así, una letra girada el 8 de enero a 15 días **vista** vence a los 15 días de la **aceptación** de la letra por el librado. El tenedor presenta la letra al librado para su aceptación; si éste la acepta escribe **aceptada** y firma; si no la acepta, el tenedor **protesta** la letra ante notario, y a partir del día siguiente a éste se empiezan a contar los 15 días que han de transcurrir para que la letra **venza** y se le pueda cobrar al librado.

Una letra girada el 8 de enero a 15 días **fecha** vence el 23 de enero.

Los **meses** se computan de fecha a fecha. Así, una letra girada el 22 de marzo a tres meses **vista**, que es aceptada el 3 de abril, vence el 3 de julio.

El ejemplo siguiente aclarará la diferencia entre **días fecha** y **meses fecha**.

Una letra girada el 26 de mayo a 30 **días fecha** vence el 25 de junio y girada a un **mes fecha** vence el 26 de junio.

Cuando en el mes del vencimiento no hubiere día correspondiente al de la emisión o aceptación, la letra girada a uno o varios meses fecha o vista, vence el último día del mes. Así, una letra girada el 31 de mayo a un mes fecha vence el 30 de junio.

737

CUÁNDO DEBEN PAGARSE LAS LETRAS

Las letras deberán pagarse el día de su vencimiento, antes de la puesta del Sol, sin término de gracia.

Si el día del vencimiento es festivo, se pagará la letra en el precedente.

Si la letra no es pagada el día del vencimiento, el tenedor tiene que hacer el **protesto** ante notario antes de la puesta del Sol del día siguiente a aquel en que fue negado el pago. Si no hace el protesto en su oportunidad, la letra queda **perjudicada**, es decir, el tenedor pierde las **acciones cambiarias** que establece la ley y tiene que acudir, para exigir su pago, a otros procedimientos.

738

ENDOSOS

El endoso consiste en que el tenedor traspasa la propiedad de la letra a otra persona. Se llama **endoso** porque se realiza escribiendo **al dorso** de la letra el nombre o razón social de la persona o entidad a quien se traspasa la propiedad de la letra, el concepto (valor recibido) porque se traspasa la propiedad, la fecha y la firma del endosante.

Como se ve, los requisitos del endoso son casi los mismos que los de la letra de cambio. El endoso que cumple estos requisitos se llama endoso **regular**; si no los cumple todos es un endoso **irregular** que tiene distintos efectos, según la ley.

El **endoso en blanco** es un endoso irregular. Consiste en que el tenedor simplemente firma la letra por detrás; entonces el portador de la letra tiene derecho a exigir su pago al librado, el día del vencimiento.

No pueden endosarse las letras no expedidas a la orden.

739

PAGARÉS

Un **pagaré** es una promesa escrita de pagar una cantidad de dinero, a una persona nombrada en el documento o a su orden o al tenedor del documento, en una fecha determinada.

740

REQUISITOS

Los pagarés deberán contener: 1) el nombre específico de **pagaré**, 2) la fecha en que se expide, 3) la cantidad (**valor nominal**), 4) la fecha de pago, 5) el nombre y apellido de la persona a cuya orden se habrá de hacer el pago, 6) el origen del valor que representa (valor recibido), y 7) la firma del que contrae la obligación de pagar.

La persona que contrae la obligación de pagar es el **otorgante**; la persona que tiene derecho a cobrar el pagaré, esté o no mencionada en el documento, es el **tenedor**.

PLAZO Y VENCIMIENTO

741

Los pagarés pueden otorgarse **a su presentación, a días fecha, a meses fecha y a fecha fija**. Los primeros vencen en cualquier tiempo; los demás el día señalado.

ENDOSO

742

Los pagarés expedidos "a la orden" son **endosables**; si son expedidos a una persona determinada no son endosables.

INTERÉS

743

Cuando en el pagaré se estipula que ganará un % de interés, éste es sobre el valor nominal y el pagaré gana interés desde la fecha en que se expide hasta el día del vencimiento. Entonces el **valor nominal** del pagaré es la cantidad escrita en el mismo **más** el interés que debe ganar hasta el vencimiento.

MODELOS DE PAGARÉS

bs. 800,000.00

Caracas, marzo 10 de 1998.

Pagaré a veinte días fecha, al señor Enrique Rodríguez, la cantidad de ochocientos mil bolívares, valor recibido de dicho señor.

Carlos González

En este pagaré el otorgante es Carlos González; el tenedor Enrique Rodríguez. El pagaré vence el día 30 de marzo y no es endosable o negociable.

8,320.75 nuevos soles

Lima, mayo 15 de 1998.

A tres meses fecha, pagaré al señor Leocadio Gómez o a su orden, la cantidad de ocho mil trescientos veinte nuevos soles, 75 centavos, a 6% anual, valor recibido de dicho señor.

Pedro González

Este pagaré vence el 15 de agosto; gana interés de 6% anual desde el 15 de mayo al 15 de agosto y es negociable. Si Leocadio Gómez quiere venderlo o endosarlo a Juan García escribe al dorso: *Páguese a Juan García*, firma y pone la fecha. Si solamente firma es un endoso en blanco y puede cobrarlo Juan García o cualquier otra persona.

744 CHEQUES

El **cheque** es un documento por el cual una persona que tiene depositado dinero en poder de un banco, manda a éste que pague todo o parte de sus fondos al portador del documento, o a la orden de una persona.

Un cheque tiene que contener la fecha en que se expide, el nombre y apellido de la persona a cuyo favor se expide, la cantidad escrita con letra y la firma del que expide el cheque.

Si el cheque es al portador, el banco lo pagará a la persona que lo presente; si es a la orden de una persona, el banco lo pagará a esta persona o a quien ésta lo endose. Un cheque se endosa lo mismo que un pagaré.

El **plazo** del cheque es **a la vista** o sea que se puede cobrar en cualquier momento después de su expedición, desde luego, siempre que el cheque no tenga fecha adelantada.

745 UTILIDAD DE LAS LETRAS Y PAGARÉS

Es muy grande. En las ventas del comercio, el comerciante que recibe las mercancías no suele pagar al contado; el vendedor siempre le da un plazo (generalmente 30, 60, 90 o 180 días) para pagar, con objeto de que pueda vender la mercancía al público y después pagar al vendedor. Entonces, cuando el comerciante recibe la mercancía, firma un pagaré por el valor de la mercancía recibida o autoriza al vendedor para que gire contra él una letra de cambio por el importe de la venta. Estos documentos son negociables y con ellos en la mano se puede comprar y pagar, es decir, pueden **circular** exactamente igual que si fueran dinero, porque dinero son ya que están respaldados por la solvencia del deudor, pero dinero que no se puede hacer efectivo hasta el día del vencimiento.

Además, con las letras de cambio una persona puede disponer de los fondos o créditos que tenga en lugar distante y saldar sus deudas sin necesidad de mover el dinero.

746 DESCUENTO

El pago de una letra o pagaré no puede exigirse al deudor hasta el día del vencimiento. Pero si una persona posee una letra o pagaré y necesita hacerla efectiva **antes de su vencimiento**, se dirige a otra persona o entidad, generalmente un banco, para que éste le pague el documento. El banco se lo paga, pero como le hace un anticipo porque el banco no puede exigir el pago al deudor hasta el día del vencimiento y como el dinero del banco no es propio, sino de los depositantes, a los cuales paga interés por el dinero depositado, no le paga la cantidad escrita en el documento, sino **algo menos**; le rebaja un % de interés, generalmente sobre el **valor nominal**, por el **tiempo** que media entre el día en que el banco le paga la letra o pagaré y el día del vencimiento, en que el banco puede cobrarla al deudor. Esta **rebaja** es lo que se llama **descuento**.

VALOR NOMINAL es la cantidad escrita en el documento o la cantidad escrita en el documento más el interés desde la fecha hasta el día del vencimiento, si el documento gana interés. Se representa por n .

747

TIPO DE DESCUENTO

748

El % de **interés** que cobra el banco por pagar la letra o pagaré antes del vencimiento se llama **tipo de descuento**. Éste puede calcularse sobre el **valor nominal (descuento comercial)** o sobre el **valor actual (descuento racional)**, por el **término o plazo del descuento**, que es el tiempo que media entre el día que se negocia el documento y el día del vencimiento.

DESCUENTO COMERCIAL O ABUSIVO es el interés del **valor nominal**, al tipo de descuento, durante el plazo del descuento o tiempo que falta para el vencimiento.

749

VALOR EFECTIVO, ACTUAL O REAL es el valor del documento el **día que se negocia**, o sea, **lo que se recibe** por el documento negociándolo antes del vencimiento. Es, desde luego, menor que el valor nominal, pues es igual al valor nominal n , menos el descuento d . Se representa por $e = n - d$.

750

Hallar el descuento comercial y el valor efectivo del siguiente pagaré:

751

Q200

Guatemala, 10 de febrero de 1998.

Pagaré a sesenta días fecha, al señor Rolando Pérez o a su orden, la cantidad de doscientos quetzales, valor recibido de dicho señor.

Rafael Portela

Descontado, febrero 23, 1998, a 6%.

Vencimiento: contando 60 días a partir de febrero 10, tenemos: 18 días de febrero, 31 días de marzo y 11 días de abril; son 60 días.

El pagaré **vence** el 11 de abril.

Plazo de descuento: del 23 de febrero al 11 de abril hay 5 días en febrero, 31 días en marzo y 11 en abril, o sea, 47 días.

Tipo de descuento: 6%

El **descuento comercial**, o sea la rebaja que hace el banco, es el interés del **valor nominal** Q200, a 6% durante el plazo de 47 días, o sea:

$$I = \frac{ctr}{36,000} = \frac{200 \times 47 \times 6}{36,000} = Q1.57$$

El **valor efectivo**, o sea lo que recibe el tenedor del pagaré, es: $Q200 - Q1.57 = Q198.43$ R.

752

OTROS GASTOS EN LA NEGOCIACIÓN DE DOCUMENTOS

Además del descuento propiamente dicho, el banco suele cobrar una **comisión** de $\frac{1}{4}\%$ a $\frac{1}{2}\%$ sobre el valor nominal para cubrir sus gastos y compensar el riesgo, siempre posible, al comprar el documento y cuando el documento tiene que cobrarse en lugar distinto de aquel en que se paga, el banco cobra de $\frac{1}{8}\%$ a $\frac{1}{2}\%$ por el cambio de localidad. Estos gastos hacen aumentar el % de descuento y, por lo tanto, disminuye el valor efectivo.

I. DESCUENTO COMERCIAL

753

DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DEL DESCUENTO COMERCIAL

El descuento comercial es el interés del valor nominal durante el tiempo que falta para el vencimiento, luego llamando n al valor nominal, t al plazo de descuento y r al tipo de descuento o % de interés, formaremos la proporción del mismo modo que en el interés (715), pero poniendo n en lugar de c . Diremos pues:

\$100	pierden	r al año
\$ nt	perderán	d

Formando la proporción, tenemos: $\frac{100}{nt} = \frac{r}{d}$

y despejando d , n , t y r tendremos: $d = \frac{ntr}{100}$ $n = \frac{100d}{tr}$ $r = \frac{100d}{nt}$ $t = \frac{100d}{nr}$

Éstas son las fórmulas siendo el tiempo **años**; si es **meses** (de 30 días) se sustituye el 100 por 1,200, y si es **días**, por 36,000.

754

CÁLCULO DEL DESCUENTO

¿Cuánto se rebajará de una letra de \$850 descontada comercialmente a $6\frac{1}{2}\%$ anual, 2 años antes del vencimiento?

Aplicamos la fórmula de d con 100, porque el tiempo es años:

$$d = \frac{ntr}{100} = \frac{850 \times 2 \times 6.5}{100} = \$110.50 \quad R.$$

El **valor efectivo** sería: $\$850 - \$110.50 = \$739.50$ R.

Hallar el descuento comercial y el valor efectivo de un pagaré de 720 quetzales que vence el 15 de noviembre y se negocia a 5% el 17 de agosto del mismo año.

755

El plazo del descuento es del 17 de agosto al 15 de noviembre, o sea 14 días en agosto, 30 en septiembre, 31 en octubre y 15 en noviembre = 90 días.

Aplicamos la fórmula de d con 36,000 porque el tiempo es días:

$$d = \frac{ntr}{36,000} = \frac{720 \times 90 \times 5}{36,000} = Q9$$

El **valor efectivo** será: $Q720 - Q9 = Q711$ R.

Hallar el descuento comercial y el valor efectivo de los siguientes documentos:

325

Ejercicio

VALOR NOMINAL	TIPO DE DESCUENTO	PLAZO DE DESCUENTO	
1. \$960	7%	3 años	R. \$201.60; \$758.40
2. bs. 1,500	$5\frac{1}{2}\%$	8 meses	R. bs. 55; bs. 1,445
3. \$4,200	$5\frac{2}{5}\%$	18 días	R. \$11.34; \$4,188.66
4. Q360	$8\frac{4}{5}\%$	4 meses y 5 días	R. Q11; Q349
5. bs. 240	5%	3 años	R. bs. 36; bs. 204
6. \$748	1% mens.	5 meses	R. \$37.40; \$710.60
7. \$1,234	9%	40 días	R. \$12.34; \$1,221.66

Hallar el descuento comercial y el valor efectivo de los siguientes documentos.
(Las fechas son del mismo año.)

326

Ejercicio

VALOR NOMINAL	FECHA EN QUE SE NEGOCIA	VENCIMIENTO	TIPO DE DESCUENTO	
1. \$1,200	6 de julio	3 de agosto	10%	R. \$9.33; \$1,190.67
2. \$1,500	2 de enero	4 de febrero	6%	R. \$8.25; \$1,491.75
3. \$3,000	20 de marzo	20 de abril	6%	R. \$15.50; \$2,984.50
4. Q5,000	18 de junio	14 de sept.	$4\frac{1}{2}\%$	R. Q55; Q4,945
5. \$9,000	1 de julio	5 de nov.	5%	R. \$158.75; \$8,841.25
6. \$4,500	10 de agosto	8 de dic.	$2\frac{1}{2}\%$	R. \$37.50; \$4,462.50
7. \$3,600	27 de marzo	4 de julio	8%	R. \$79.20; \$3,520.80

Hallar el descuento comercial y el valor efectivo del pagaré siguiente:

756

600 balboas

Quito, 2 de diciembre de 1998.

Cuatro meses después de la fecha, pagaré al señor Jacinto Suárez o a su orden la cantidad de seiscientos balboas, a 4% anual, valor recibido.

Juan Fernández

Descontado: 1 de febrero, 1999, a 8%.

Vencimiento: abril 2 de 1999.

Valor nominal: A 600 balboas hay que sumarle el interés de 600 a 4% en 4 meses:

$$\frac{600 \times 4 \times 4}{1,200} = 8 \text{ balboas}$$

El **valor nominal** será: $600 + 8 = 608$ balboas

Plazo de descuento: De febrero 1 a abril 2 hay: 27 días en febrero, 31 en marzo y 2 en abril = 60 días.

Tipo de descuento: 8%

El **descuento comercial** será: $d = \frac{ntr}{36,000} = \frac{608 \times 60 \times 8}{36,000} = 8.11 \text{ balboas}$ R.

El **valor efectivo** será: $608 - 8.11 = 599.89 \text{ balboas}$ R.

327

Ejercicio

Hallar el descuento comercial y el valor efectivo de los siguientes pagarés:

1. \$180 Habana, junio 6 de 1997.
Tres meses después de la fecha, pagaré al señor Jacinto Suárez o a su orden, la cantidad de ciento ochenta pesos, valor recibido.
Calixto Pérez
Descontado, agosto 17 de 1997, a 6%. R. \$0.60; \$179.40
2. \$300 Cienfuegos, febrero 26, 1997.
A treinta días fecha, pagaré al señor Constantino Vázquez o a su orden, la cantidad de trescientos pesos, valor recibido.
Mario Rovira
Descontado, marzo 1 de 1997, a 6%. R. \$1.35; \$298.65
3. \$500 México, D. F., marzo 15 de 1997.
A tres meses fecha, pagaré al señor Cándido Oyarzábal o a su orden, la cantidad de quinientos pesos, valor recibido en mercancías de dicho señor.
Gonzalo Robau
Descontado, abril 4 de 1997, a 5%. R. \$5; \$495
4. \$900 Bogotá, mayo 6 de 1997.
A sesenta días fecha, pagaré a la señora Juana Mendizábal o a su orden, la cantidad de novecientos pesos, valor recibido.
Rodolfo Martín
Descontado, 22 de mayo de 1997, a 4%. R. \$4.40; \$895.60
5. \$1,000 México, D. F., abril 4 de 1997.
A cuatro meses fecha, pagaré al señor Leocadio Capdevila o a su orden, la cantidad de mil pesos, valor recibido en víveres de dicho señor.
Eugenio González
Descontado, abril 20 de 1997, a 6%. R. \$17.67; \$982.33
6. \$1,200 Veracruz, Ver., febrero 7 de 1997.
A noventa días fecha, pagaré al señor Fernando López o a su orden, la cantidad de mil doscientos pesos, valor recibido de dicho señor.
Emeterio Robreño
Descontado, febrero 27 de 1997, a 8%. R. \$18.67; \$1,181.33

7. 80,000 colones San Salvador, octubre 31 de 1997.
A treinta días fecha, pagaré al señor Antonio Díaz o a su orden, la cantidad de ochenta mil colones, valor recibido de dicho señor.
Carlos Fernández
Descontado, noviembre 3 de 1997, a 5%.
**R. 300 colones;
79,700 colones**
8. 4,000 balboas Panamá, octubre 30 de 1997.
A tres meses fecha, pagaré al señor Miguel González o a su orden, la cantidad de cuatro mil balboas a 5% anual, valor recibido.
Enrique García
Descontado, diciembre 21 de 1997, a 6%.
**R. 27 balboas;
4,023 balboas**
9. bs. 900,000 Caracas, octubre 22 de 1997.
A seis meses fecha, pagaré al señor José Zayas o a su orden, la cantidad de novecientos mil bolívares, a 4% anual, valor recibido.
Pedro Herrera
Descontado, diciembre 23 de 1997, a 5%.
**R. bs. 15,300;
bs. 902,700**

CÁLCULO DEL VALOR NOMINAL

757

Hallar el valor nominal de una letra que vence el 3 de agosto y descontada a $4\frac{1}{2}\%$ el 24 de junio del mismo año se disminuye en \$14.

Plazo del descuento: del 24 de junio al 3 de agosto, 40 días. Aplico la fórmula de n con 36,000:

$$n = \frac{36,000d}{rt} = \frac{36,000 \times 14}{4.5 \times 40} = \$2,800$$

R.

Hallar el valor nominal, conociendo:

328

PLAZO DEL DESCUENTO	TIPO	DESCUENTO	
1. 5 años	8%	\$20	R. \$50
2. 4 meses	2%	\$76	R. \$11,400
3. 18 días	$\frac{1}{3}\%$ mensual	\$12	R. \$6,000
4. 2 años 5 meses 15 días	$\frac{2}{5}\%$	Q177	R. Q18,000

Ejercicio

Hallar el valor nominal de los siguientes documentos:

329

VENCIMIENTO	FECHA DEL DESCUENTO	TIPO	DESCUENTO	
1. mayo 4, 1997	abril 4, 1997	6%	\$ 8	R. \$1,600
2. febrero 12, 1997	enero 13, 1997	5%	\$10.50	R. \$2,520
3. junio 23, 1997	dic. 2, 1997	8%	\$20.30	R. \$450
4. marzo 12, 2000 (bisiesto)	feb. 15, 2000	6%	\$ 9.10	R. \$2,100

Ejercicio

758

Hallar el valor nominal de un pagaré por el cual se reciben \$2,985, descontado a 6% por 30 días.

Los problemas de esta índole no se resuelven por las fórmulas deducidas, sino de este modo:

$$\text{Descuento de \$1 por 30 días a 6\%: } \frac{1 \times 30 \times 6}{36,000} = \$0.005$$

$$\text{Valor efectivo de \$1 pagadero dentro de 30 días: } \$1 - \$0.005 = \$0.995.$$

Así que, por cada \$0.995 de valor efectivo, el valor nominal es \$1, luego por \$2,985 de valor efectivo, el valor nominal será: $\$2,985 \div 0.995 = \$3,000$ R.

330

Ejercicio

1. Hallar el valor nominal de un pagaré que vence el 8 de agosto y descontado a 6% el 15 de julio del mismo año se reduce a \$498. R. \$500
2. Hallar el valor nominal de un pagaré que vence el 14 de diciembre y descontado a 8% el 8 de noviembre del mismo año se reduce a \$1,190.40. R. \$1,200
3. Hallar el valor nominal de una letra que vence el 14 de octubre y descontada el 4 de septiembre del mismo año a 3% se reduce a \$5,980. R. \$6,000
4. Una letra girada el 2 de marzo a 60 días fecha se negocia el 22 de marzo del mismo año a 8% y se reduce a 4,460 bolivianos. ¿Cuál es su valor nominal? R. 4,500 bolivianos
5. Una letra girada el 10 de noviembre de 2006 a 90 días fecha es descontada el 10 de diciembre del mismo año a 3% y se reduce a 5,970 balboas. ¿Cuál es su valor nominal? R. 6,000 balboas

759

CÁLCULO DEL %

¿A qué % anual se descuenta una letra de \$900, que descontada por 4 meses sufre una rebaja de \$24?

Aplicamos la fórmula de r con 1,200: _____

$$r = \frac{1,200d}{nt} = \frac{1,200 \times 24}{900 \times 4} = 8\% \text{ anual R.}$$

760

Un pagaré de \$600 a tres meses fecha, otorgado el 15 de junio, se descuenta el 1º de agosto y se reciben por él \$595.50 ¿Cuál fue el tipo de descuento?

El plazo del descuento es de agosto 1º al día del vencimiento, septiembre 15 o sea 45 días.

Aplicamos la fórmula de r con 36,000 porque el tiempo es días. No nos dan el descuento directamente, pero lo podemos hallar muy fácilmente, porque si la letra era de \$600 y nos han pagado por ella \$595.50, el descuento será la **diferencia**, o sea: $\$600 - \$595.50 = \$4.50$. Tendremos: _____

$$r = \frac{36,000d}{nt} = \frac{36,000 \times 4.50}{600 \times 45} = 6\% \text{ anual R.}$$

331

Ejercicio

1. ¿A qué % se negoció una letra de \$500 que descontada a 3 años se disminuyó en \$35?
R. $2\frac{1}{3}\%$
2. Se negocia una letra de 400 bolivianos a 2 años y se reciben por ella 360. ¿A qué % se negoció? R. 5%
3. ¿A qué % se negocia un pagaré de 512 balboas por el cual 3 meses antes del vencimiento se reciben 488? R. $18\frac{3}{4}\%$
4. Un pagaré de 2,250 nuevos soles que vencía el 4 de octubre se negoció el 2 de septiembre del mismo año y se disminuyó en 9 nuevos soles. ¿A qué % se descontó? R. $4\frac{1}{2}\%$
5. Un pagaré de 800 lempiras que vence el 10 de julio se negocia el 4 de junio y se reciben por él 793.60 lempiras. ¿A qué % se descontó? R. 8%
6. Un pagaré de 900 quetzales suscrito el 8 de octubre a 3 meses fecha, se negocia el 9 de noviembre y se reduce a 892.50 quetzales ¿A qué % se descontó? R. 5%

CÁLCULO DEL TIEMPO

761

Una letra de Q800 se descuenta a 6% anual y se reduce a Q656. ¿Qué tiempo faltaba para el vencimiento?

Si se quiere hallar el tiempo en años se aplica la fórmula con 100; si en meses, con 1,200; si en días, con 36,000. El **descuento** será la diferencia $Q800 - Q656 = Q144$. Tendremos:

$$t = \frac{100d}{nr} = \frac{100 \times 144}{800 \times 6} = 3 \text{ años} \quad \text{R.}$$

Hallar la fecha del vencimiento de una letra de \$900 por la cual, negociada a 4% el 29 de octubre de 2005, se recibieron \$895.80.

762

El **descuento** será: $\$900 - \$895.80 = \$4.20$

Hallemos los días que faltaban para el vencimiento:

$$t = \frac{36,000d}{nr} = \frac{36,000 \times 4.20}{900 \times 4} = 42 \text{ días}$$

Por tanto, si el 29 de octubre faltaban 42 días para el vencimiento, el vencimiento era el 10 de diciembre de 2005.

332

Ejercicio

1. ¿Cuánto tiempo faltaba para el vencimiento de una letra de \$114 que se negoció a 10% y se disminuyó en \$57? R. 5 años
2. Se negocia una letra de \$1,400 a $\frac{1}{18}\%$ mensual y se disminuye en \$7. ¿Cuántos meses faltaban para el vencimiento? R. 9 meses
3. ¿Cuánto faltaba para el vencimiento de una letra de Q1,000 que negociada a $5\frac{1}{2}\%$ se redujo a Q945? R. 1 año

4. ¿Cuántos días antes del vencimiento se negoció una letra de Q4,000, que a $1\frac{4}{5}\%$ se redujo a Q3,982? **R. 90 días**
5. Hallar cuántos meses antes del vencimiento se negoció un pagaré de Q3,100 a $\frac{1}{6}\%$ mensual si su valor ha sido de Q3,007. **R. 18 meses**
6. Un pagaré de \$600 que vencía el 20 de julio se negoció a 5% y se redujo a \$596.25. ¿En qué fecha se negoció? **R. 5 de junio**
7. Un pagaré de \$2,400 se negocia a $3\frac{1}{2}\%$ el 14 de junio y el banquero da por él \$2,386. ¿Cuál era la fecha de su vencimiento? **R. 13 de agosto**

II. DESCUENTO RACIONAL

763 **DESCUENTO RACIONAL O LEGAL** es el interés del **verdadero** valor actual de la letra (el **verdadero** valor que tiene la letra o pagaré el día que se negocia), al tipo de descuento durante el tiempo que falta para el vencimiento.

El **verdadero** valor actual de un documento es la cantidad que sumada con los intereses que ella ha de producir durante el tiempo que falta para el vencimiento, da el valor nominal y se halla **restando del valor nominal el descuento racional**.

764 DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DEL DESCUENTO RACIONAL O LEGAL

El descuento **racional** o **legal** es el interés del valor efectivo, $e = n - d$,⁽¹⁾ durante el tiempo, t , que falta para el vencimiento al tipo de descuento, r ; luego, formaremos la misma proporción del interés (715), poniendo en lugar de c el valor efectivo $n - d$. Diremos:

$$\begin{array}{l} \$100 \quad \text{pierden } r \text{ al año} \\ \bullet \quad \$ (n - d)t \quad \text{perderán } d \end{array}$$

Formando la proporción, tendremos: $\frac{100}{(n - d)t} = \frac{r}{d}$

Como el producto de los extremos es igual al de los medios, tendremos:

$$100d = (n - d)tr$$

Efectuando la multiplicación indicada en el segundo miembro:

$$100d = ntr - dtr \quad (1)$$

Pasando dtr como sumando al primer miembro:

$$100d + dtr = ntr$$

Sacando el factor común d : $d(100 + tr) = ntr$ (2)

Despejando d , tendremos: $d = \frac{ntr}{100 + tr}$

Para deducir la fórmula de n partimos de la igualdad (2) establecida anteriormente:

$$d(100 + tr) = ntr$$

⁽¹⁾ Este descuento d es el descuento *racional*.

Despejando n en esta igualdad, queda:

$$n = \frac{d(100 + tr)}{tr}$$

Para deducir las fórmulas de t y r partimos de la igualdad (1) establecida anteriormente:

$$100d = ntr - dtr$$

Sacando el factor común tr , tendremos:

$$100d = tr(n - d)$$

En esta fórmula, despejando t y r , obtenemos:

$$t = \frac{100d}{r(n - d)} \quad r = \frac{100d}{t(n - d)}$$

OBSERVACIÓN

Estas fórmulas están deducidas suponiendo que el tiempo es **años**. Si el tiempo es **meses**, se sustituye el 100 por 1,200, y si es **días**, por 36,000.

CÁLCULO DEL DESCUENTO RACIONAL

765

Hallar el descuento racional y el valor actual racional de una letra de \$448, descontada a 3% anual, a 4 años.

Aplicamos la fórmula de $d. r.$ con 100, porque el tiempo es años:

$$d. r. = \frac{ntr}{100 + tr} = \frac{448 \times 4 \times 3}{100 + (4 \times 3)} = \frac{448 \times 4 \times 3}{112} = \$48 \quad \text{R.}$$

El verdadero **valor actual** será $\$448 - \$48 = \$400$ R.

NOTA

El interés de este valor actual durante el tiempo que falta para el vencimiento da el descuento racional:

$$I = \frac{ctr}{100} = \frac{400 \times 4 \times 3}{100} = \$48$$

Sumando el valor actual \$400 con su interés \$48 da el valor nominal: $\$400 + \$48 = \$448$.

Hallar el descuento racional y el valor actual racional de una letra de Q4,008 que vence el 10 de mayo y se descuenta a 2% el 4 de abril.

766

El plazo del descuento es del 4 de abril al 10 de mayo = 36 días. Aplico la fórmula de $d. r.$ con 36,000, porque el tiempo es días:

$$d. r. = \frac{ntr}{36,000 + tr} = \frac{4,008 \times 36 \times 2}{36,000 + (36 \times 2)} = \frac{4,008 \times 36 \times 2}{36,072} = Q8 \quad \text{R.}$$

El verdadero **valor actual** será $Q4,008 - Q8 = Q4,000$ R.

NOTA

El interés de este verdadero valor actual durante el tiempo que falta para el vencimiento es el descuento racional:

$$I = \frac{ctr}{36,000} = \frac{4,000 \times 36 \times 2}{36,000} = Q8$$

Este interés, sumado con el valor actual, da el valor nominal:

$$Q4,000 + Q8 = Q4,008$$

333

Hallar el descuento racional y el valor actual racional de los siguientes documentos:

Ejercicio

VALOR NOMINAL	PLAZO DEL DESCUENTO	TIPO	
1. \$355	6 años	7%	R. \$105; \$250
2. \$810	5 meses	3%	R. \$10; \$800
3. \$9,058	58 días	4%	R. \$58; \$9,000
4. Q8,012	1 mes 6 días	$\frac{1}{8}\%$ mensual	R. Q12; Q8,000
5. Q580	5 años	$3\frac{1}{5}\%$	R. Q80; Q500
6. Q1,254	2 años 3 meses	2%	R. Q54; Q1,200
7. \$8,652.50	1 año 6 días	2%	R. \$152.50; \$7,500

334

Hallar el descuento racional y el valor actual racional de los siguientes documentos: (las fechas son del mismo año.)

Ejercicio

VALOR NOMINAL	VENCIMIENTO	FECHA DEL DESCUENTO	TIPO	
1. \$7,209	30 de septiembre	21 de septiembre	5%	R. \$9; \$7,200
2. \$18,090	24 de junio	25 de abril	3%	R. \$90; \$18,000
3. Q4,575	2 de noviembre	5 de junio	4%	R. Q75; Q4,500
4. Q6,094	3 de mayo	30 de enero	6%	R. Q94; Q6,000
5. \$11,073	19 de octubre	11 de junio	7%	R. \$273; \$10,800

767

CÁLCULO DEL VALOR NOMINAL, TIEMPO Y % EN EL DESCUENTO RACIONAL

Hallar el valor nominal de una letra que descontada racionalmente a $3\frac{3}{4}\%$, 8 meses antes del vencimiento, se ha disminuido en \$15.

Aplicamos la fórmula de n con 1,200, por ser el tiempo meses:

$$n = \frac{d(1,200 + tr)}{tr} = \frac{15(1,200 + 3.75 \times 8)}{3.75 \times 8} = \frac{15 \times 1,230}{30} = \$615 \quad \text{R.}$$

768

¿A qué % anual se ha negociado una letra de \$500 que se ha disminuido en \$20 siendo el descuento legal y faltando 3 meses y 10 días para el vencimiento?

Aplicaremos la fórmula de r con 36,000 porque el tiempo lo reduciremos a días, y tendremos:

$$r = \frac{36,000d}{t(n - d)} = \frac{36,000 \times 20}{100(500 - 20)} = \frac{36,000 \times 20}{100 \times 480} = 15\% \quad \text{R.}$$

Por una letra de \$600 se ha recibido \$540 con un descuento racional de 5%. ¿Cuánto tiempo faltaba para el vencimiento?

Aplicaremos la fórmula de t . No nos dan el descuento, pero es muy fácil hallarlo, pues si el valor nominal de la letra era de \$600 y se han recibido por ella \$540 (valor efectivo), el descuento será la **diferencia**, o sea $\$600 - \$540 = \$60$, y tendremos:

$$t = \frac{100d}{r(n-d)} = \frac{100 \times 60}{5 \times (600 - 60)} = \frac{100 \times 60}{5 \times 540} = 2\frac{2}{9} \text{ años} = \text{2 años 2 meses 20 días} \quad \text{R.}$$

(En los problemas siguientes el descuento es racional.)

335

Ejercicio

- Hallar el valor nominal de una letra que negociada a 8% a 5 años se ha disminuido en \$180.
R. \$630
- Se han rebajado 100 lempiras de una letra que vencía el primero de julio y se negoció a 3% el primero de febrero del mismo año. ¿Cuál era el valor de la letra? (tiempo: 5 meses.)
R. 8,100 lempiras
- Un pagaré que vencía el 22 de julio se cobra el 10 del mismo mes y año, negociándolo a 2% y se ha disminuido en 10 balboas. ¿Cuál era su valor nominal? **R. 15,010 balboas**
- Una letra que vence el primero de julio se cobra el primero de enero del mismo año. Si se negoció a $\frac{3}{4}\%$ mensual y se disminuyó en 72 quetzales, ¿cuál era su valor nominal? (tiempo: 6 meses.)
R. 1,672 quetzales
- ¿Cuánto faltaba para el vencimiento de una letra de \$352 que ha disminuido en \$32 negociándola a 5%? **R. 2 años**
- Un pagaré de \$308 negociado a 4% se disminuye en \$8. ¿Cuánto faltaba para el vencimiento?
R. 8 meses
- Por un pagaré de \$215 que se negoció a 6% se reciben \$200. ¿Cuál fue el plazo del descuento?
R. 1 años 3 meses
- Una letra de 4,531 nuevos soles se reduce a 4,500 negociándola a 8%. ¿Cuánto faltaba para el vencimiento? **R. 31 días**
- A un pagaré de 195 bolivianos se le rebajan 45 negociándolo a 5 años. ¿Cuál fue el tipo de descuento? **R. 6%**
- Una letra que vencía el primero de junio se negocia el primero de marzo. Si la letra era por \$1,632 y se cobran \$1,600, ¿cuál fue el % de descuento? (tiempo: 3 meses.) **R. 8%**
- Un pagaré de 2,258 colones que vencía el 17 de septiembre se negoció el día primero del mismo mes y año y se cobraron 2,250. ¿A qué % se hizo el descuento? **R. 8%**

III. COMPARACIÓN ENTRE EL DESCUENTO COMERCIAL Y EL RACIONAL

770 Comparando las fórmulas del descuento comercial y el racional:

$$d. c. = \frac{ntr}{100} \quad d. r. = \frac{ntr}{100 + tr}$$

vemos que son dos quebrados que tienen el **mismo numerador**, y como si dos quebrados tienen el mismo numerador, es **mayor** el que tiene **menor denominador**, resulta que el descuento comercial, que tiene menor denominador que el racional, será **mayor** que el racional.

771 **¿POR QUÉ EL DESCUENTO COMERCIAL SE LLAMA ABUSIVO Y EL RACIONAL, LEGAL?**

El descuento comercial se llama **abusivo** porque en él, el banquero cobra el % de interés sobre una cantidad mayor que la que él desembolsa.

Así, cuando un banquero descuenta comercialmente una letra de \$6,000 a 6% por 30 días, el descuento es el interés de \$6,000 a 6% en 30 días, o sea:

$$\frac{6,000 \times 6 \times 30}{36,000} = \$30$$

y paga \$6,000 - \$30 = \$5,970; luego, cobra el interés de 6% sobre una cantidad **mayor** que la que desembolsa. Lo justo es cobrar un interés a 6% por 30 días del dinero que desembolsa, es decir, de \$5,970, que sería:

$$\frac{5,970 \times 6 \times 30}{36,000} = \$29.85$$

En el descuento comercial, el banquero cobra el interés de lo que desembolsa más el interés de este interés. En efecto, en el ejemplo anterior tenemos:

Interés de \$5,970 a 6% por 30 días	\$29.85
Interés de este interés, \$29.85, a 6% por 30 días	$\frac{29.85 \times 6 \times 30}{36,000} = \0.15
	<u>\$30.00</u>

Vemos que la suma es \$30, que es el descuento comercial.

772 **RAZÓN DE EMPLEAR EL DESCUENTO COMERCIAL**

No obstante lo dicho, el descuento comercial es empleado generalmente en todas las operaciones del comercio, en primer lugar, porque su cálculo es rápido y sencillo, mientras que el racional es más laborioso, y en segundo lugar, porque como las operaciones de descuento suelen ser siempre a corto plazo (generalmente no pasan de 90 días), la diferencia entre el descuento comercial y el racional es insignificante.

Si se emplea el descuento comercial para negociar documentos a largo plazo el resultado es **absurdo**. Así, si una letra de \$200 se descuenta a 10% por 10 años, el descuento comercial sería:

$$\frac{200 \times 10 \times 10}{100} = \$200 \text{ y el valor efectivo } \$200 - \$200 = 0$$

o sea, que la letra no valdría nada el día que se descuenta, lo cual es absurdo.

DIFERENCIA ENTRE LOS DOS DESCUENTOS

773

La diferencia entre el descuento comercial y el racional es igual al **interés del descuento racional** durante el tiempo que falta para el vencimiento. Se ve en el siguiente ejemplo:

Pagaré de \$900 negociado a 6% en 60 días

$$\text{Descuento comercial} = \frac{ntr}{36,000} = \frac{900 \times 6 \times 60}{36,000} = \$9$$

$$\text{Descuento racional} = \frac{ntr}{36,000 + tr} = \frac{900 \times 6 \times 60}{36,000 + (6 \times 60)} = \$8.91$$

$$\text{Diferencia entre los dos descuentos: } \$9 - \$8.91 = \$0.09$$

$$\text{Interés de \$8.91 a 6% por 60 días: } \frac{8.91 \times 6 \times 60}{36,000} = \$0.09$$

- Hallar la diferencia entre el descuento comercial y el racional de una letra de \$600 negociada a 3% a 2 años. **R. \$2.04**
- Hallar la diferencia entre el descuento abusivo y el legal de un pagaré de Q800 que vencía el 1° de octubre y se ha negociado a 6% el primero de abril (tiempo: 6 meses). **R. Q0.70**
- Se negocia una letra de \$800 a 7% a 45 días, siendo el descuento comercial. ¿Cuánto más se hubiera cobrado si el descuento hubiera sido racional? **R. 0.06 más**
- Una letra de \$2,400 que vence el día último de diciembre se negocia a $1\frac{3}{4}\%$ el día último de agosto del mismo año. ¿Cuánto se recibirá siendo el descuento comercial y cuánto racional? (tiempo: 4 meses.) **R. C., \$2,386; R., \$2,386.08**
- ¿Cuánto se recibirá siendo el descuento comercial y cuánto racional si una letra de Q12,000 que vence el 14 de junio se negocia a 6% el 15 de mayo del mismo año? **R. C., Q11,940; R., Q11,940.30**
- Hallar el valor nominal de una letra negociada a 9%, 40 días antes del vencimiento, sabiendo que la diferencia entre el descuento comercial y el racional es un nuevo sol. **R. 10,100 nuevos soles**
- Hallar el valor nominal de un pagaré negociado a 8% por 3 meses, sabiendo que la diferencia entre el descuento comercial y el racional es 4 lempiras. **R. 10,200 lempiras**

336

Ejercicio



Los pueblos más civilizados de América, como el azteca, maya e inca, alcanzaron un considerable desarrollo en las ciencias matemáticas, como podemos ver a través de su sistema de numeración. Resulta indudable que ellos aplicaran

una regla rudimentaria para el reparto proporcional, al tener que resolver los problemas de distribución de los productos agrícolas entre los miembros de las tribus.

Capítulo **XLVIII**

REPARTOS PROPORCIONALES

774

DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS PARA DIVIDIR UN NÚMERO EN PARTES PROPORCIONALES A OTROS VARIOS

Sea el número N que queremos dividir en partes proporcionales a a , b y c . Llamemos x a la parte de N que le corresponde a a , y a la que le corresponde a b y z a la que le corresponde a c . Como la suma de estas partes es igual al número dado, tendremos que $N = x + y + z$.

Es evidente que si $a > b > c$, $x > y > z$, luego podemos formar con estas cantidades una serie de razones iguales:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

y como hay un teorema que dice que en una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{a+b+c} &= \frac{x}{a} \quad \text{o sea} \quad \frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} \quad \therefore x = \frac{Na}{a+b+c} \\ \frac{x+y+z}{a+b+c} &= \frac{y}{b} \quad \text{o sea} \quad \frac{N}{a+b+c} = \frac{y}{b} \quad \therefore y = \frac{Nb}{a+b+c} \\ \frac{x+y+z}{a+b+c} &= \frac{z}{c} \quad \text{o sea} \quad \frac{N}{a+b+c} = \frac{z}{c} \quad \therefore z = \frac{Nc}{a+b+c} \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce la siguiente:

REGLA

Para repartir un número en partes proporcionales a otros varios se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros números y se divide entre la suma de éstos.

I. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO

1) Repartir un número en partes directamente proporcionales a varios números enteros.

775

REGLA

Se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros y se divide entre su suma.

Repartir 150 en partes directamente proporcionales a 5, 6 y 9.

$$x = \frac{150 \times 5}{5 + 6 + 9} = \frac{150 \times 5}{20} = 37.5$$

$$y = \frac{150 \times 6}{5 + 6 + 9} = \frac{150 \times 6}{20} = 45$$

$$z = \frac{150 \times 9}{5 + 6 + 9} = \frac{150 \times 9}{20} = 67.5$$

150.0 prueba

Ejemplo

PRUEBA

Si la operación está bien hecha, la suma de los resultados debe dar el número que se reparte, como sucede en el caso anterior.

1. Repartir 580 en partes direct. proporc. a 7, 10 y 12.
2. Repartir 1,080 en partes direct. proporc. a 13, 19 y 22.
3. Repartir 110 en partes direct. proporc. a 0.21, 0.22 y 0.23.
4. Repartir 357 en partes direct. proporc. a 17, 20, 38 y 44.
5. Repartir 66 en partes direct. proporc. a 2.2, 2.5, 3.1 y 3.2.
6. Repartir 980 en partes direct. proporc. a 1, 2, 3, 4 y 5.
7. Repartir 900 en partes direct. proporc. a 7, 8, 9, 10 y 11.
8. Repartir 650 en partes direct. proporc. a 8, 12, 20, 29, 39 y 31.

R. 140, 200, 240

R. 260, 380, 440

R. $35, 36\frac{2}{3}, 38\frac{1}{3}$

R. 51, 60, 114, 132

R. 13.2, 15, 18.6, 19.2

R. $65\frac{1}{3}, 130\frac{2}{3}, 196, 261\frac{1}{2}, 326\frac{2}{3}$

R. 140, 160, 180, 200, 220

R. 40, 60, 100, 145, 150, 155

337

Ejercicio

776

2) Repartir un número en partes directamente proporcionales a varios quebrados.

REGLA

Se reducen los quebrados a un común denominador. Se prescinde del denominador y se divide el número dado en partes proporcionales a los numeradores.

Ejemplo

Repartir 154 en partes directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$.

Reduciendo estos quebrados al mínimo común denominador, tendremos:

$$\frac{40}{60}, \frac{15}{60}, \frac{12}{60}, \frac{10}{60}$$

Ahora, prescindimos del denominador común 60 y repartimos el número dado 154 en partes proporcionales a los numeradores 40, 15, 12 y 10:

$$\begin{aligned} x &= \frac{154 \times 40}{40 + 15 + 12 + 10} = \frac{154 \times 40}{77} = 80 \\ y &= \frac{154 \times 15}{40 + 15 + 12 + 10} = \frac{154 \times 15}{77} = 30 \\ z &= \frac{154 \times 12}{40 + 15 + 12 + 10} = \frac{154 \times 12}{77} = 24 \\ u &= \frac{154 \times 10}{40 + 15 + 12 + 10} = \frac{154 \times 10}{77} = 20 \end{aligned}$$

154 prueba

338

Ejercicio

1. Dividir 46 en partes direct. propor. a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$. R. 30, 16
2. Dividir 10 en partes direct. propor. a $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{12}$. R. $1\frac{1}{2}$, 5, $3\frac{1}{2}$
3. Dividir 183 en partes direct. propor. a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{7}$. R. 84, 63, 36
4. Dividir 17 en partes direct. propor. a $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{1}{16}$. R. $8\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$
5. Dividir 1,780 en partes direct. propor. a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$. R. 600, 480, 400, 300
6. Dividir 58 en partes direct. propor. a $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{14}$ y $\frac{7}{10}$. R. 10, 21, $2\frac{1}{2}$, $24\frac{1}{2}$
7. Dividir 1,415 en partes direct. propor. a $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{9}$. R. 360, 270, 225, 480, 80
8. Dividir 1,890 en partes direct. propor. a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$. R. 600, 400, 300, 240, 200, 150

- 3) Repartir un número en partes directamente proporcionales a otros de cualquier clase.

777

REGLA

Se reducen a quebrados y se opera como en el caso anterior.

Repartir 49 en partes proporcionales a 0.04 , $2\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ y 2 .

Los reducimos a quebrados: $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; $2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{1}$

Reduciendo estos quebrados $\frac{1}{25}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{1}$ a un común denominador, tendremos:

$$\frac{3}{75}, \frac{165}{75}, \frac{25}{75}, \frac{150}{75}$$

Ahora, prescindimos del denominador común 75 y repartimos 49 en partes directamente proporcionales a los numeradores 3, 165, 25 y 150:

$$x = \frac{49 \times 3}{3 + 165 + 25 + 150} = \frac{49 \times 3}{343} = \frac{3}{7}$$

$$y = \frac{49 \times 165}{3 + 165 + 25 + 150} = \frac{49 \times 165}{343} = 23\frac{4}{7}$$

$$z = \frac{49 \times 25}{3 + 165 + 25 + 150} = \frac{49 \times 25}{343} = 3\frac{4}{7}$$

$$u = \frac{49 \times 150}{3 + 165 + 25 + 150} = \frac{49 \times 150}{343} = 21\frac{3}{7}$$

49 prueba

Ejemplo

1. Dividir 670 en partes direct. propor. a 0.4 , $\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{3}$.

R. 120, 150, 400

2. Dividir 2,410 en partes direct. propor. a 0.6 , $2\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

R. 360, 1,600, 450

3. Dividir 345 en partes direct. propor. a 0.8 , 0.875 y $1\frac{1}{5}$.

R. 96, 105, 144

339

Ejercicio

4. Dividir 2,046 en partes direct. propor. a $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ y 0.16. **R. 900, 1,050, 96**
5. Dividir 686 en partes direct. propor. a $3\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{3}$ y 0.3. **R. 360, 90, 200, 36**
6. Dividir 3,236 en partes direct. propor. a 0.36, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3}$ y 0.45. **R. 216, 1,350, 1,400, 270**
7. Dividir 6,076 en partes direct. propor. a $4\frac{1}{8}$, 0.6, $2\frac{3}{4}$ y 0.12. **R. 3,200, 100, 480, 2,200, 96**

340

MISCELÁNEA

Ejercicio

1. Repartir 90 en partes direct. propor. a 2, 3 y 4. **R. 20, 30, 40**
2. Repartir 130 en partes direct. propor. a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. **R. 60, 40, 30**
3. Repartir 238 en partes direct. propor. a $7\frac{1}{3}$ y 0.6. **R. 210, 10, 18**
4. Repartir 112 en partes direct. propor. a 0.1, 0.7 y 0.32. **R. 10, 70, 32**
5. Repartir 190 en partes direct. propor. a $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{14}$ y $\frac{5}{28}$. **R. 120, 20, 50**
6. Repartir 106 en partes direct. propor. a 7, 15 y 31. **R. 14, 30, 62**
7. Repartir 8,020 en partes direct. propor. a 8.14, 9.19, 10.32 y 12.45.
R. 1,628, 1,838, 2,064, 2,490
8. Repartir 1,535 en partes direct. propor. a $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{7}$. **R. 700, 490, 105, 240**
9. Repartir 26 en partes direct. propor. a 2, 0.2, $\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$. **R. 10, 1, $2\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$**
10. Repartir 120 en partes direct. propor. a 6, 9, 14, 21 y 32.
R. $8\frac{32}{41}$, $13\frac{7}{41}$, $20\frac{20}{41}$, $30\frac{30}{41}$, $46\frac{34}{41}$
11. Repartir 21,242 en partes direct. propor. a $5\frac{1}{6}$, $7\frac{1}{8}$, $8\frac{1}{9}$ y $9\frac{1}{10}$.
R. 3,720, 5,130, 5,840, 6,552
12. Repartir 53,336 en partes direct. propor. a 0.05, 0.006, $5\frac{2}{3}$ y $3\frac{1}{6}$.
R. 300, 36, 34,000, 19,000

- | | | |
|--------------|---|--|
| 13. Repartir | 82 en partes direct. propor. a $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ y $\frac{1}{10}$. | R. 40, 36, 6 |
| 14. Repartir | 60 en partes direct. propor. a 0.04, $\frac{2}{5}$ y $3\frac{1}{10}$. | R. $\frac{40}{59}, 6\frac{46}{59}, 52\frac{32}{59}$ |
| 15. Repartir | 288 en partes direct. propor. a 2.3, 5.4 y 6.7. | R. 46, 108, 134 |
| 16. Repartir | 357 en partes direct. propor. a $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$. | R. 180, 72, 60, 45 |
| 17. Repartir | 310 en partes direct. propor. a $\frac{2}{3}, 4\frac{1}{5}$ y 0.25. | R. $40\frac{120}{307}, 254\frac{142}{307}, 15\frac{45}{307}$ |
| 18. Repartir | 36 en partes direct. propor. a 3, 4, 7 y 10. | R. $4\frac{1}{2}, 6, 10\frac{1}{2}, 15$ |
| 19. Repartir | 906 en partes direct. propor. a $\frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}$ y $\frac{5}{48}$. | R. 288, 378, 72, 63, 105 |
| 20. Repartir | 1,761 en partes direct. propor. a $2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}$ y $4\frac{1}{5}$. | R. 420, 585, 756 |

II. REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

REGLA GENERAL

Se invierten los números dados y se reparte el número que se quiere dividir en partes directamente proporcionales a estos inversos.

- 1) Repartir un número en partes inversamente proporcionales a otros varios enteros.

Repartir 240 en partes inversamente proporcionales a 5, 6 y 8.

Se invierten estos enteros y queda: $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$

Ahora no tenemos más que repartir 240 en partes *directamente proporcionales* a estos quebrados, para lo cual los reduciremos al mínimo común denominador y nos darán:

$$\frac{24}{120}, \frac{20}{120}, \frac{15}{120}$$

Prescindimos del denominador común, 120, y repartimos 240 en partes proporcionales a los numeradores 24, 20 y 15:

$$\begin{aligned}x &= \frac{240 \times 24}{24 + 20 + 15} = \frac{240 \times 24}{59} = 97\frac{37}{59} \\y &= \frac{240 \times 20}{24 + 20 + 15} = \frac{240 \times 20}{59} = 81\frac{21}{59} \\z &= \frac{240 \times 15}{24 + 20 + 15} = \frac{240 \times 15}{59} = 61\frac{1}{59} \\&\quad \underline{240 \text{ prueba}}\end{aligned}$$

341

Ejercicio

- | | |
|--|---|
| 1. Repartir 33 en partes invers. proporc. a 1, 2 y 3. | R. 18, 9, 6 |
| 2. Repartir 123 en partes invers. proporc. a 3, 8 y 9. | R. 72, 27, 24 |
| 3. Repartir $7\frac{1}{2}$ en partes invers. proporc. a 10, 12 y 15. | R. $3, 2\frac{1}{2}, 2$ |
| 4. Repartir 415 en partes invers. proporc. a 18, 20 y 24. | R. $156\frac{32}{53}, 140\frac{50}{53}, 117\frac{24}{53}$ |
| 5. Repartir 11 en partes invers. proporc. a 6, 9, 12 y 15. | R. $4\frac{2}{7}, 2\frac{6}{7}, 2\frac{1}{7}, 1\frac{5}{7}$ |
| 6. Repartir 8 en partes invers. proporc. a 4, 8, 12, 20 y 40. | R. $3\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, 1\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$ |
| 7. Repartir 141 en partes invers. proporc. a 7, 21, 84, 10 y 30. | R. 60, 20, 5, 42, 14 |

780

2) Repartir un número en partes inversamente proporcionales a otros varios quebrados.

Ejemplo

Repartir 15 en partes inversamente proporcionales a $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ y $\frac{6}{7}$.

Invertimos estos quebrados y tenemos: $\frac{4}{3}, \frac{5}{2}$ y $\frac{7}{6}$.

Reduciéndolos a común denominador queda: $\frac{8}{6}, \frac{15}{6}, \frac{7}{6}$.

Prescindiendo del denominador común 6, repartimos 15 en partes directamente proporcionales a los numeradores 8, 15 y 7:

$$\begin{aligned}x &= \frac{15 \times 8}{8 + 15 + 7} = \frac{15 \times 8}{30} = 4 \\y &= \frac{15 \times 15}{8 + 15 + 7} = \frac{15 \times 15}{30} = 7\frac{1}{2} \\z &= \frac{15 \times 7}{8 + 15 + 7} = \frac{15 \times 7}{30} = 3\frac{1}{2} \\&\quad \underline{15 \text{ prueba}}\end{aligned}$$

342

Ejercicio

- | | | | | |
|------------|-------|-----------------------------|--|--|
| 1. Dividir | 18 | en partes invers. propor. a | $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ y } \frac{1}{4}$ | R. 4, 6, 8 |
| 2. Dividir | 72 | en partes invers propor. a | $\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \text{ y } \frac{1}{7}$ | R. 20, 24, 28 |
| 3. Dividir | 174 | en partes invers. propor. a | $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ y } \frac{3}{4}$ | R. 72, 54, 48 |
| 4. Dividir | 649 | en partes invers. propor. a | $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6} \text{ y } \frac{1}{8}$ | R. 132, 55, 198, 264 |
| 5. Dividir | 3,368 | en partes invers. propor. a | $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7} \text{ y } \frac{1}{8}$ | R. 320, 288, 840, 1,920 |
| 6. Dividir | 1,480 | en partes invers. propor. a | $\frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{2}{9} \text{ y } \frac{1}{12}$ | R. 64, 240, 384, 216, 576 |
| 7. Dividir | 73 | en partes invers. propor. a | $\frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{7}{3}, \frac{4}{11} \text{ y } \frac{14}{15}$ | R. $12\frac{4}{5}, 12\frac{3}{5}, 4\frac{4}{5}, 30\frac{4}{5}, 12$ |

3) Repartir un número en partes inversamente proporcionales a otros de cualquier clase.

781

Ejemplo

Repartir 192.50 en partes inversamente proporcionales a 0.25, $3\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y 0.4.

Los reducimos todos a quebrados y tendremos: $\frac{1}{4}, \frac{13}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}$.

Invirtiendo estos quebrados, tenemos: $\frac{4}{1}, \frac{4}{13}, \frac{8}{1}, \frac{5}{2}$.

Reduciéndolos a un común denominador, queda: $\frac{104}{26}, \frac{8}{26}, \frac{208}{26}, \frac{65}{26}$.

Repartiendo 192.50 en partes directamente proporcionales a los numeradores 104, 8, 208 y 65:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{192.50 \times 104}{104 + 8 + 208 + 65} = \frac{192.50 \times 104}{385} = 52 \\
 y &= \frac{192.50 \times 8}{104 + 8 + 208 + 65} = \frac{192.50 \times 8}{385} = 4 \\
 z &= \frac{192.50 \times 208}{104 + 8 + 208 + 65} = \frac{192.50 \times 208}{385} = 104 \\
 u &= \frac{192.50 \times 65}{104 + 8 + 208 + 65} = \frac{192.50 \times 65}{385} = \frac{32.50}{192.50 \text{ prueba}}
 \end{aligned}$$

343

Ejercicio

1. Repartir 99 en partes invers. proporc. a $0.2, \frac{2}{5}$ y $1\frac{1}{3}$. **R. 60, 30, 9**
2. Repartir 1,095 en partes invers. proporc. a $0.08, 1\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{14}$. **R. 500, 35, 560**
3. Repartir 8 en partes invers. proporc. a $1\frac{1}{5}, 2\frac{1}{4}$ y 2. **R. $3\frac{3}{4}, 2, 2\frac{1}{4}$**
4. Repartir 8,018 en partes invers. proporc. a $2\frac{1}{5}, 0.25, \frac{7}{10}$ y 1.6. **R. 560, 4,928, 1,760, 770**
5. Repartir 1,016 en partes invers. proporc. a $4\frac{1}{2}, 3, 1\frac{5}{7}$ y $1\frac{3}{5}$. **R. 128, 192, 336, 360**
6. Repartir 8,313 en partes invers. proporc. a $0.2, 0.3, 0.4, 2\frac{1}{2}$ y $3\frac{1}{5}$. **R. 3,600, 2,400, 1,800, 288, 225**
7. Repartir 3,786 en partes invers. proporc. a $0.375, 1\frac{2}{7}, 2.4, 3\frac{3}{7}$ y $4\frac{4}{11}$. **R. 2,304, 672, 360, 252, 198**

344

MISCELÁNEA

Ejercicio

1. Dividir 117 en partes invers. proporc. a 5, 6 y 8. **R. 72, 60, 45**
2. Dividir 98 en partes invers. proporc. a $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$. **R. 36, 32, 30**
3. Dividir 10 en partes invers. proporc. a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$. **R. $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3$**
4. Dividir 1,001 en partes invers. proporc. a 0.8, 0.15 y 0.25. **R. 105, 560, 336**
5. Dividir 13 en partes invers. proporc. a $0.05, 0.12, \frac{3}{5}$ y 3. **R. $8\frac{4}{7}, 3\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}$**
6. Dividir 26 en partes invers. proporc. a 2, 3 y 4. **R. 12, 8, 6**
7. Dividir 868 en partes invers. proporc. a $0.4, 2\frac{1}{5}$ y 3. **R. 660, 120, 88**
8. Dividir 130 en partes invers. proporc. a 0.2, 0.3 y 0.4. **R. 60, 40, 30**
9. Dividir 158 en partes invers. proporc. a $0.14, 0.15, 1\frac{1}{2}$ y $1\frac{3}{4}$. **R. 75, 70, 7, 6**
10. Dividir 28.50 en partes invers. proporc. a 7, 49 y 343. **R. $24\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$**
11. Dividir 766 en partes invers. proporc. a $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}$ y $3\frac{1}{4}$. **R. 364, 234, 168**

- | | | | | |
|-------------|-------|-----------------------------|---|---------------------------------------|
| 12. Dividir | 9 | en partes invers. propor. a | 10, 15, 30 y 40. | R. $4, 2\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, 1$ |
| 13. Dividir | 78.50 | en partes invers. propor. a | $4\frac{1}{3}, 5\frac{1}{4}$ y $6\frac{1}{2}$. | R. $31\frac{1}{2}, 26, 21$ |
| 14. Dividir | 485 | en partes invers. propor. a | 9, 12, 30, 36 y 72. | R. 200, 150, 60, 50, 25 |
| 15. Dividir | 14 | en partes invers. propor. a | 3.15, 6.30 y 12.60. | R. 8, 4, 2 |
| 16. Dividir | 77.50 | en partes invers. propor. a | $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{5}$ y $\frac{4}{9}$. | R. 18, 36, 10, $13\frac{1}{2}$ |
| 17. Dividir | 2,034 | en partes invers. propor. a | $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ y $\frac{7}{8}$. | R. 560, 504, 490, 480 |

PROBLEMAS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

782

Repartir \$42 entre *A*, *B* y *C* de modo que la parte de *A* sea doble que la de *B*, y la de *C*, la suma de las partes de *A* y *B*.

Cuando *A* tenga \$2, *B* tendrá \$1 y *C* tendrá \$3. Dividimos \$42 en partes proporcionales a 2, 1 y 3:

$$x = \frac{42 \times 2}{6} = \$14$$

$$y = \frac{42 \times 1}{6} = \$7$$

$$z = \frac{42 \times 3}{6} = \$21$$

A, \$14; B, \$7; C, \$21 R.

Dividir 175 en dos partes que sean entre sí como $\frac{3}{4}$ es a $\frac{2}{9}$.

783

La relación entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{9}$ es $\frac{3/4}{2/9} = \frac{27}{8}$; la relación entre las dos partes en que se va a dividir el número ha de ser $\frac{27}{8}$. Dividimos 175 en partes proporcionales a 27 y 8:

$$1^{\text{a}} \text{ parte} = \frac{175 \times 27}{35} = 135 \quad \text{R.}$$

$$2^{\text{a}} \text{ parte} = \frac{175 \times 8}{35} = 40 \quad \text{R.}$$

784 Dividir \$95 entre *A*, *B* y *C* de modo que la parte de *A* sea a la de *B* como 4 es a 3 y la parte de *B* sea a la de *C* como 6 es a 5:

Cuando *A* tiene \$4, *B* tiene \$3. Lo que tiene *C* cuando *B* tiene \$3 lo llamo *x*, y como yo sé que la relación entre la parte de *B* y la de *C* es de 6 a 5, hallo *x* formando la proporción:

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{5} \therefore x = \frac{3 \times 5}{6} = 2\frac{1}{2}$$

Entonces, cuando *A* tiene \$4, *B* tiene \$3 y *C* tiene $2\frac{1}{2}$. Divido \$95 en partes proporcionales a 4, 3 y $2\frac{1}{2}$.

Reduciendo a común denominador se tiene $\frac{8}{2}$, $\frac{6}{2}$ y $\frac{5}{2}$. Divido 95 en partes proporcionales a 8, 6 y 5:

$$x = \frac{95 \times 8}{19} = \$40 \quad y = \frac{95 \times 6}{19} = \$30 \quad z = \frac{95 \times 5}{19} = \$25$$

La parte de *A* es \$40; la de *B*, \$30 y la de *C*, \$25 **R.**

345

Ejercicio

- Se reparten \$24 en partes proporcionales a las edades de tres niños de 2, 4 y 6 años, respectivamente. ¿Cuánto toca a cada uno? **R. Menor, \$4; mediano, \$8; mayor, \$12**
- Dos obreros cobran \$870 por una obra que hicieron entre los dos. El primero trabajó 8 días y el segundo 6 días y medio. ¿Cuánto recibirá cada uno? **R. 1º, \$480; 2º, \$390**
- Un comerciante en quiebra tiene tres acreedores. Al 1º le debe \$800, al 2º, \$550 y al 3º, \$300. Si su haber es de \$412.50, ¿cuánto cobrará cada acreedor? **R. 1º, \$200; 2º, \$137.50; 3º, \$75**
- Tres muchachos tienen: \$80 el 1º, \$40 el 2º y \$30 el 3º. Conviene entregar entre todos \$30 a los pobres, contribuyendo cada uno en proporción a lo que tiene. ¿Cuánto pondrá cada uno? **R. 1º, \$16; 2º, \$8; 3º, \$6**
- Dos obreros ajustan una obra por \$1,100. El jornal del 1º es de \$30 y el del segundo \$25. ¿Cuánto percibirá cada uno de la cantidad total? **R. 1º, \$600; 2º, \$500**
- Cuatro hombres han realizado una obra en 90 días. El 1º recibió \$500, el 2º \$400, el 3º \$600 y el 4º \$300. ¿Cuántos días trabajó cada uno? **R. 1º, 25 días; 2º, 20 días; 3º, 30 días; 4º, 15 días**
- Tres hermanos adquieren una propiedad en 85,000 dólares y algún tiempo después la venden por 100,000 dólares. Si las partes que impusieron son proporcionales a los números 3, 4 y 8, ¿cuánto ganó cada uno? **R. 1º, 3,000 dólares; 2º, 4,000 dólares; 3º, 8,000 dólares**
- Un padre dispone al morir que su fortuna, que está constituida por una casa valuada en \$480,000 y dos computadoras portátiles valuadas en \$15,000 cada una se reparta entre sus tres hijos de modo que el mayor tenga 8 partes de la herencia, el mediano 6 y el menor 3. ¿Cuánto corresponde a cada uno? **R. Mayor, \$240,000; mediano, \$180,000; menor, \$90,000**
- Repartir \$90 entre *A*, *B* y *C* de modo que la parte de *B* sea el doble de la de *A*, y la de *C* el triple que la de *B*. **R. A, \$10; B, \$20; C \$60**

10. En un colegio hay 130 alumnos, de los cuales hay cuádruple número de estadounidenses que de españoles y doble número de cubanos que de estadounidenses. ¿Cuántos alumnos de cada nacionalidad hay? **R. españoles, 10; estadounidenses, 40; cubanos; 80.**
11. De las 120 aves que tiene un campesino, el número de gallinas es el triple que el de gallos y el número de patos es la semisuma de los gallos y gallinas. ¿Cuántas aves de cada especie tiene? **R. 20 gallos; 60 gallinas; 40 patos**
12. Repartir 240 bolivianos entre A, B y C de modo que la parte de C sea los $\frac{3}{5}$ de la de B y la de A igual a la suma de las partes de B y C. **R. A, 120; B, 75; C, 45 bolivianos**
13. Dividir el número 490 en tres partes tales que cada una sea los $\frac{3}{5}$ de la anterior. **R. 1º, 250; 2º, 150; 3º, 90**
14. Repartir 190 lempiras entre tres personas de modo que la parte de la 2ª sea el triple de la parte de la 1ª y el cuádruple de la parte de la 3ª. **R. 1ª, 40; 2ª, 120; 3ª, 30 lempiras**
15. Se reparten 238 bolas entre cuatro muchachos en partes inversamente proporcionales a sus edades que son 2, 5, 6 y 8 años respectivamente. ¿Cuántas bolas recibirá cada uno? **R. 1º, 120; 2º, 48; 3º, 40; 4º, 30**
16. Un padre reparte \$50 en partes proporcionales a la buena conducta de sus hijos. El 1º ha tenido 4 faltas, el 2º 3, el 3º 2 y el 4º 1 falta. ¿Cuánto recibirá cada hijo? **R. 1º, \$6; 2º, \$8; 3º, \$12; 4º, \$24**
17. Dividir 225 en dos partes que sean entre sí como 7 es a 8. **R. 105 y 120**
18. Dividir 93 en dos partes que sean entre sí como 3 es a $\frac{3}{2}$. **R. 62 y 31**
19. Dividir 190 en dos partes que sean entre sí como $\frac{5}{6}$ es a $\frac{7}{3}$. **R. 50 y 140**
20. Dividir 240 en tres partes de modo que la 1ª sea a la 2ª como 9 es a 8 y la 2ª a la 3ª como 8 es a 7. **R. 1ª, 90; 2ª, 80; 3ª, 70**
21. Dividir 60 en tres partes tales que la 1ª sea a la 2ª como 2 es a 3 y la 2ª a la 3ª como 1 es a 5. **R. 1ª, 6; 2ª, 9; 3ª, 45**
22. Repartir 111 balboas entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea a la parte de la 2ª como 8 es a 6 y la parte de la 2ª sea a la parte de la 3ª como 4 es a 3. **R. 1ª, 48; 2ª, 36; 3ª, 27 balboas**
23. Un campesino tiene 275 aves entre gallos, gallinas y palomas. El número de gallinas es al de gallos como 7 a 3 y el número de palomas es al de gallinas como 5 es a 2. ¿Cuántas aves de cada especie tiene? **R. 70 gallinas; 30 gallos; 175 palomas**
24. Dividir 56 en cuatro partes tales que la 1ª sea a la 2ª como 2 es a 3; la 2ª a la 3ª como 3 es a 4 y la 3ª a la 4ª como 4 es a 5. **R. 1ª, 8; 2ª, 12; 3ª, 16; 4ª, 20**
25. Dividir 74 dólares entre A, B, C y D de modo que la parte de A sea a la de B como 3 es a 4; la parte de B sea a la de C como 1 es a 3 y la parte de C sea a la de D como 2 es a 3. **R. A, 6 dólares; B, 8 dólares; C, 24 dólares; D, 36 dólares**
26. Se ha repartido una cantidad de dinero entre A, B y C de modo que las partes que reciben son proporcionales a los números 4, 5 y 6. Si la parte de A es 20 nuevos soles, ¿cuáles son las partes de B y C y cuál la suma repartida? **R. B, 25; C, 30; suma 75 nuevos soles**

27. Repartir 260,000 bolivianos entre 6 personas de modo que cada una de las dos primeras tenga el triple de lo que tiene cada una de las restantes. **R. 1ª, 78,000; 2ª, 78,000; las restantes 26,000 bolivianos cada una**
28. Cuando un hombre va a almorzar a un restaurante y le sirven una mujer y un hombre, le da doble propina a la mujer que al hombre, y si le sirven el hombre y un muchacho, le da doble propina al hombre que al muchacho. Si un día le sirven el hombre, la mujer y el muchacho y da \$7 de propina, ¿cuánto debe recibir cada uno? **R. Mujer, \$4; hombre, \$2; muchacho, \$1**

III. REPARTO COMPUESTO

785 Reparto compuesto es aquel en el que hay que repartir una cantidad en partes proporcionales a los productos de varios números.

786 Repartir 170 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 4, 5, 6 y a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$.

Multiplicamos 4 por $\frac{1}{2}$, 5 por $\frac{1}{4}$ y 6 por $\frac{1}{6}$ y tendremos:

$$4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad 6 \times \frac{1}{6} = 1$$

Ahora, repartimos 170 en partes proporcionales a estos productos 2, $\frac{5}{4}$ y 1, para lo cual los reduciremos a un común denominador y queda:

$$\frac{8}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{4}$$

Repartimos 170 en partes proporcionales a los numeradores 8, 5 y 4;

$$\begin{aligned} x &= \frac{170 \times 8}{8 + 5 + 4} = \frac{170 \times 8}{17} = 80 \\ y &= \frac{170 \times 5}{8 + 5 + 4} = \frac{170 \times 5}{17} = 50 \\ z &= \frac{170 \times 4}{8 + 5 + 4} = \frac{170 \times 4}{17} = 40 \\ &\quad 170 \text{ prueba} \end{aligned}$$

787 Repartir 50 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{7}$ e inversamente proporcionales a $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{5}{14}$.

Se multiplican los números en relación con los cuales el reparto es directo por los **inversos** de los números en relación con los cuales el reparto es inverso. Así, en este caso, multipli-

caremos $\frac{2}{3}$ por el inverso de $\frac{1}{6}$, o sea por 6; $\frac{4}{5}$ por el inverso de $\frac{3}{10}$, o sea por $\frac{10}{3}$, y $\frac{2}{7}$ por el inverso de $\frac{5}{14}$, o sea por $\frac{14}{5}$, y tendremos:

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{1} = 4 \qquad \frac{4}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{8}{3} \qquad \frac{2}{7} \times \frac{14}{5} = \frac{4}{5}$$

Ahora repartimos 50 en partes proporcionales a estos productos 4, $\frac{8}{3}$ y $\frac{4}{5}$, para lo cual los reducimos a un común denominador:

$$\frac{60}{15} \quad \frac{40}{15} \quad \frac{12}{15}$$

Repartimos 50 en partes proporcionales a los numeradores:

$$\begin{aligned} x &= \frac{50 \times 60}{60 + 40 + 12} = \frac{50 \times 60}{112} = 26\frac{11}{14} \\ y &= \frac{50 \times 40}{60 + 40 + 12} = \frac{50 \times 40}{112} = 17\frac{6}{7} \\ z &= \frac{50 \times 12}{60 + 40 + 12} = \frac{50 \times 12}{112} = 5\frac{5}{14} \end{aligned}$$

50 prueba

1. Repartir 68 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a 2 y 4, y a 5 y 6.
R. 20, 48
2. Repartir 411 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 4, 5 y 6, y a 8, 9 y 10.
R. 96, 135, 180
3. Repartir 44 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, y a $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{9}$.
R. 24, 20
4. Repartir 447 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, y a $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{3}$.
R. 252, 90, 105
5. Repartir 396 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{9}$, y a $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{11}$ y $\frac{9}{22}$.
R. 165, 147, 84
6. Repartir 77 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a $2\frac{1}{3}$ y $3\frac{1}{4}$, y a $1\frac{1}{5}$ y $3\frac{1}{5}$.
R. $16\frac{1}{3}$, $60\frac{2}{3}$
7. Repartir 81 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a 2 y 3, y a $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$.
R. 27, 54
8. Repartir 215 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 10, 12 y 18, y a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{9}$.
R. 75, 100, 40
9. Repartir 55 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a $4\frac{1}{6}$, $7\frac{1}{8}$ y $8\frac{1}{9}$, y a 6, 8 y 9.
R. $8\frac{27}{31}$, $20\frac{7}{31}$, $25\frac{28}{31}$

346

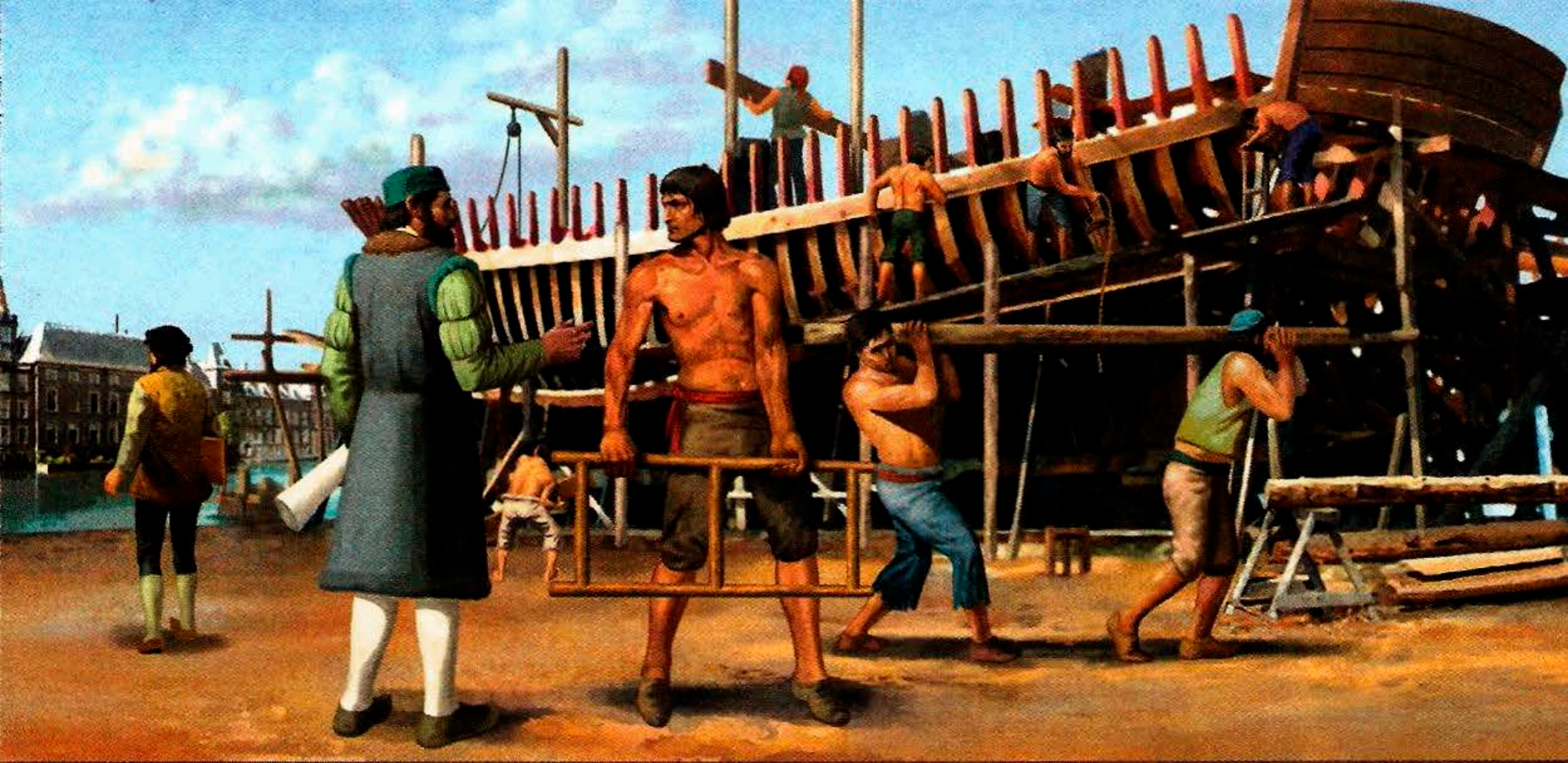
Ejercicio

10. Repartir 32 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a 2 y 4 e inversamente proporcionales a 5 y 6. **R. 12, 20**
11. Repartir 100 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 5, 6 y 7 e inversamente proporcionales a 2, 3 y 4. **R. 40, 32 y 28**
12. Repartir 69 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ e inversamente proporcionales a $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{2}$. **R. 24, 25**
13. Repartir 13 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{9}$ e inversamente proporcionales a $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{3}$. **R. $7\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 2**
14. Repartir 2,658 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{7}{11}$, $\frac{8}{13}$ y $\frac{2}{15}$ e inversamente proporcionales a $\frac{3}{22}$, $\frac{5}{26}$ y $\frac{7}{30}$. **R. 1,470, 1,008, 180**
15. Repartir 48 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a $2\frac{1}{3}$ y $4\frac{1}{5}$ e inversamente proporcionales a $1\frac{1}{6}$ y $3\frac{1}{10}$. **R. $28\frac{8}{13}$, $19\frac{5}{13}$**
16. Repartir 82 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 8, 11 y 15 e inversamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{15}$ y $\frac{3}{7}$. **R. $15\frac{27}{31}$, $19\frac{26}{31}$, $46\frac{9}{31}$**
17. Repartir 95 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a 0.4 y 0.6 e inversamente proporcionales a 1.4 y $2\frac{1}{2}$. **R. 50, 45**

347

Ejercicio

1. Dos hombres alquilan un garaje por 320,000 bolívares. El primero ha guardado en él 4 automóviles durante 6 meses y el segundo 5 automóviles por 8 meses. ¿Cuánto debe pagar cada uno? **R. 1º, 120,000; 2º, 200,000 bolívares**
2. Tres cuadrillas de obreros han realizado un trabajo por el que se ha pagado \$51,600. La primera cuadrilla constaba de 10 hombres y trabajó durante 12 días; la segunda, de 6 hombres, trabajó 8 días y la tercera, de 5 hombres trabajó 18 días. ¿Cuánto debe recibir cada cuadrilla? **R. 1º, \$24,000; 2º, \$9,600; 3º, \$18,000**
3. En una obra se han empleado tres cuadrillas de obreros. La primera constaba de 10 hombres y trabajó 6 días a razón de 8 horas diarias de trabajo; la segunda, de 9 hombres, trabajó durante 5 días de 6 horas y la tercera, de 7 hombres, trabajó 3 días de 5 horas. ¿Cuánto debe recibir cada cuadrilla si la obra se ajustó en \$42,750? **R. 1ª, \$24,000; 2ª, \$13,500; 3ª, \$5,250**
4. Se reparten \$26 entre dos niños de 3 y 4 años, respectivamente, en partes proporcionales a sus edades e inversamente proporcionales a sus faltas. El de 3 años tiene 6 faltas y el de 4 tiene 5 faltas. ¿Cuánto debe recibir cada niño? **R. El de 3 años, \$10; el de 4 años, \$16**
5. Se han comprado 2 automóviles por 340,000 quetzales y se han pagado en razón directa de la velocidad que pueden desarrollar, que es proporcional a los números 60 y 70, y en razón inversa de su tiempo de servicio que es 3 y 5 años, respectivamente. ¿Cuánto se ha pagado por cada uno? **R. 1º, 200,000; 2º, 140,000 quetzales**



Las primeras compañías se constituyeron por los gremios o hansas que formaban los armadores de barcos (sociedades en commenda) de Venecia, Génova y Pisa a partir del siglo ix. Un italiano, **Leonardo de Pisa**, tomó la regla para resolver los

problemas de reparticiones de las ganancias o pérdidas de las compañías, de la aritmética comercial que se atribuye a **Abul' l Wefa, de Bagdad (940-988 d. C.)**.

Capítulo **XLIX**

COMPAÑÍA

SOCIEDAD MERCANTIL O COMPAÑÍA MERCANTIL es la reunión de dos o más personas que ponen en común dinero, bienes o su trabajo para ejercer la industria o el comercio, es decir, con ánimo de **lucro** o intención de obtener una ganancia.

La sociedad cuya finalidad no sea el lucro no es una sociedad mercantil, sino una sociedad civil.

Todo lo relacionado con las sociedades mercantiles está regulado por el Código de Comercio.

DISTINTAS CLASES DE SOCIEDADES MERCANTILES

En general las compañías mercantiles pueden ser de las clases siguientes:

- 1) **Sociedad regular colectiva** es aquella en que todos los socios se comprometen a participar, en la proporción que establezcan, de los mismos derechos y obligaciones.

En esta sociedad los socios responden de las deudas de la compañía, no sólo con el capital social sino también con el capital particular de cada uno de ellos.

- 2) **Sociedad anónima (S. A.)**, en la cual los socios, al aportar su capital a la compañía, reciben acciones que les dan derecho a participar en sus utilidades y encargan el manejo de ésta a administradores que ellos designan.

En la sociedad anónima, los socios responden de las deudas de la sociedad solamente con el capital aportado y no con sus bienes particulares.

3) Sociedad en comandita (S. en C.), en la cual uno o varios socios llamados **socios comanditarios**, aportan capital determinado al fondo común y están a expensas de las operaciones de la sociedad que está dirigida por otros socios con nombre colectivo.

Estas sociedades vienen a ser mixtas de colectivas y anónimas. Hay socios colectivos, que como tales responden de las deudas de la sociedad no sólo con el patrimonio social sino también con sus bienes particulares y socios comanditarios, que sólo responden de las deudas de la sociedad con el capital aportado.

790

GANANCIAS Y PÉRDIDAS

El fin de la sociedad mercantil es obtener una ganancia y dividirla entre los socios. Los socios pueden acordar la proporción en que cada uno participará de las ganancias de la sociedad y desde luego, de las pérdidas. Si se estipulara que alguno de los socios no participará en las ganancias de la compañía, el contrato es nulo.

Los **socios industriales** (socios que no aportan capital sino su trabajo) generalmente quedan libres de las pérdidas de la compañía.

Salvo pacto en contrario, la distribución de las **ganancias y pérdidas** de la compañía se hace en **partes proporcionales al capital** aportado y al **tiempo** que ha permanecido cada socio en la compañía.

791

La **REGLA DE COMPAÑÍA** tiene por objeto repartir entre dos o más socios la ganancia o pérdida de una compañía. Para ello se atiende al **capital** que cada uno impuso y al **tiempo** que han estado impuestos los capitales respectivos.

792

CLASES DE REGLA DE COMPAÑÍA

Hay dos clases: **compañía simple**, que es aquella en que los capitales o los tiempos que han estado impuestos éstos son **iguales**, y **compañía compuesta**, que es aquella en que los capitales y los tiempos son **distintos**.

La regla de compañía no es más que **reparto proporcional**.

I. COMPAÑÍA SIMPLE

Se pueden considerar dos casos:

793

1) Que los tiempos sean iguales.

REGLA

Se prescinde del tiempo y se reparte la ganancia o pérdida en partes proporcionales a los capitales.

Tres individuos forman una sociedad por 2 años. El 1º impone \$800, el 2º \$750 y el 3º \$600. ¿Cuánto corresponderá a cada uno si hay una ganancia de \$1,200?

Como el tiempo es igual para todos los socios, se prescinde del tiempo, 2 años, y se reparte la ganancia \$1,200, en partes proporcionales a los capitales:

$$x = \frac{1,200 \times 800}{800 + 750 + 600} = \frac{1,200 \times 800}{2,150} = \$446\frac{22}{43}$$

$$y = \frac{1,200 \times 750}{800 + 750 + 600} = \frac{1,200 \times 750}{2,150} = \$418\frac{26}{43}$$

$$z = \frac{1,200 \times 600}{800 + 750 + 600} = \frac{1,200 \times 600}{2,150} = \$334\frac{38}{43}$$

1,200 prueba

El 1º gana $\$446\frac{22}{43}$; el 2º, $\$418\frac{26}{43}$ y el 3º, $\$334\frac{38}{43}$

- Dos socios emprenden un negocio que dura 4 años. El primero impone 500 dólares y el segundo 350. ¿Cuánto corresponde a cada uno de una ganancia de 250 dólares? **R. Al 1º, $147\frac{1}{17}$ dólares; al 2º, $102\frac{16}{17}$ dólares**
- En un negocio que ha durado 5 años han intervenido 4 socios que han impuesto \$2,500 el primero, \$3,000 el segundo, \$4,500 el tercero y \$6,000 el cuarto. Si hay una pérdida de \$1,200, ¿cuánto corresponde perder a cada uno? **R. El 1º, \$187.50; el 2º, \$225; el 3º, \$337.50; el 4º, \$450**
- Cuatro individuos explotan una industria por 4 años y reúnen 10,000 bolivianos, de los cuales el primero pone 3,500; el segundo, 2,500; el tercero, la mitad de lo que puso el primero, y el cuarto lo restante. Hay que repartir una ganancia de 5,000; ¿cuánto toca a cada uno? **R. 1º, 1,750; 2º, 1,250; 3º, 875; 4º, 1,125 bolivianos**
- Cinco colonos han emprendido un negocio imponiendo el primero 500 dólares; el segundo 200 dólares más que el primero; el tercero 200 dólares más que el segundo, y así sucesivamente los demás. Hay que hacer frente a una pérdida de 600 dólares; ¿cuánto pierde cada uno? **R. 1º, $66\frac{2}{3}$ dólares; 2º, $93\frac{1}{3}$ dólares; 3º, 120 dólares; 4º, $146\frac{2}{3}$ dólares; 5º, $173\frac{1}{3}$ dólares**
- Tres amigos se asocian para emprender un negocio e imponen: el primero, 2,500 dólares; el segundo, la mitad de lo que puso el primero más 600 dólares; el tercero, 400 menos que los anteriores juntos. Al cabo de 3 años se reparte un beneficio de 16,600 dólares. ¿Cuánto toca a cada uno? **R. 1º, 5,000 dólares; 2º, 3,700 dólares; 3º, 7,900 dólares**

6. En una industria que trabajó durante 4 años y medio, cuatro socios impusieron: el primero, 500 dólares más que el segundo; el segundo, 600 dólares menos que el tercero; el tercero, la mitad de lo que puso el cuarto y éste impuso 3,000 dólares. Si hay que afrontar una pérdida de 3,400 dólares, ¿cuánto perderá cada uno? **R. 1º, 700; 2º, 450; 3º, 750; 4º, 1,500 dólares.**
7. Tres comerciantes reunieron 9,000 balboas para la explotación de un negocio y ganaron: el primero, 1,000; el segundo, 600 y el tercero 800. ¿Cuánto impuso cada uno? **R. 1º 3,750; 2º, 2,250; 3º, 3,000 balboas**
8. Cuatro socios han ganado en los 3 años que explotaron una industria, lo siguiente: el primero, \$5,000; el segundo, los $\frac{2}{5}$ de lo que ganó el primero; el tercero, los $\frac{3}{4}$ de lo que ganó el segundo, y el cuarto, los $\frac{5}{3}$ de lo que ganó el tercero. Si el capital social era de \$44,000, ¿con cuánto contribuyó cada uno? **R. 1º, \$20,000; 2º, \$8,000; 3º, \$6,000; 4º, \$10,000**
9. Tres socios que habían invertido 25,000 bolivianos el primero; 24,000 el segundo y 16,000 el tercero, tienen que repartirse una pérdida de 19,500. ¿Cuánto queda a cada uno? **R. 1º, 17,500; 2º, 16,800; 3º, 11,200 bolivianos**
10. Tres individuos emprenden un negocio imponiendo 500 dólares el 1º, 600 el 2º y 800 el 3º. Al cabo de un año tienen un beneficio de 350 dólares y venden el negocio por 2,500. ¿Cuánto gana cada socio? **R. 1º, 250; 2º, 300; 3º, 400 dólares**
11. A, B y C emprenden un negocio imponiendo A, 900 dólares; B, 800 y C, 750. Al cabo de un año A recibe como ganancia 180 dólares. ¿Cuánto han ganado B y C? **R. B ganó 160; C, 150 dólares**
12. Juan García y Pedro Fernández ganaron en 2006 y 2007, 1,200 bolivianos cada año en un negocio que tienen. En 2006, Juan García era dueño de los $\frac{3}{4}$ del negocio y su socio del resto, y en 2007, Juan García fue dueño de los $\frac{2}{5}$ y su socio del resto, porque el primero vendió al segundo una parte. Hallar la ganancia total de cada socio en los dos años. **R. G., 1,380; F., 1,020 bolivianos**

794

2) Que los capitales sean iguales.**REGLA**

Se prescinde de los capitales y se reparte la ganancia o pérdida en partes proporcionales a los tiempos.

Ejemplo

Pedro Suárez emprende un negocio con un capital de \$2,000. A los 4 meses, toma como socio a Ignacio Rodríguez que aporta \$2,000 y tres meses más tarde admiten como socio a Rogelio García que aporta otros \$2,000. Cuando se cumple un año a contar del día en que Suárez emprendió el negocio, hay una utilidad de \$1,250. ¿Cuánto recibe cada socio?

Como todos impusieron el mismo capital, \$2,000, se prescinde del capital y se divide la ganancia \$1,250 en partes proporcionales a los tiempos.

Suárez ha permanecido 12 meses, Rodríguez 8 meses y García 5 meses. Divido \$1,250 proporcionalmente a 12, 8 y 5:

$$x = \frac{1,250 \times 12}{25} = \$600 \quad y = \frac{1,250 \times 8}{25} = \$400 \quad z = \frac{1,250 \times 5}{25} = \$250$$

Suárez gana \$600, Rodríguez \$400 y García \$250. **R.**

349

Ejercicio

1. A emprende un negocio con \$3,000 y a los tres meses admite de socio a B con \$3,000, y 3 meses más tarde entra de socio C con \$3,000. Si hay un beneficio de \$2,700 al cabo del año de emprender A el negocio, ¿cuánto recibe cada uno? **R. A, \$1,200; B, \$900; C, \$600**
2. A emprende un negocio con \$2,000. Al cabo de 6 meses entra como socio B con \$2,000 y 11 meses más tarde entra como socio C con \$2,000. Si a los dos años de comenzar A su negocio hay un beneficio de \$630, ¿cuánto recibe como ganancia cada socio? **R. A, \$308 $\frac{4}{7}$; B, \$231 $\frac{3}{7}$; C, \$90**
3. A, B y C impusieron \$3,000 cada uno para la explotación de un negocio. A permaneció en el mismo un año; B, 4 meses menos que A, y C, 4 meses menos que B. Si hay una pérdida que asciende a 20% del capital social, ¿cuánto pierde cada socio? **R. A, \$900; B, \$600; C, \$300**
4. Se constituye entre cuatro comerciantes una sociedad por 4 años, reuniendo 24,000 bolivianos por partes iguales. El primero ha estado en el negocio 3 años; el segundo, 2 años y 7 meses; el tercero, 14 meses y el cuarto, año y medio. ¿Cuánto tocará a cada uno de una ganancia de 6,930 bolivianos? **R. 1º, 2,520; 2º, 2,170; 3º, 980; 4º, 1,260 bolivianos**
5. Reuniendo un capital de 10,000 balboas por partes iguales, tres socios emprenden un negocio por 2 años. El primero se retira a los 3 meses; el segundo, a los 8 meses y 20 días y el tercero estuvo todo el tiempo. Si hay una pérdida de 3,210 balboas, ¿cuánto pierde cada uno? **R. 1º, 270; 2º, 780; 3º, 2,160 balboas**
6. En una industria en que han impuesto sumas iguales, tres socios han permanecido: el primero, 8 meses; el segundo, los $\frac{3}{4}$ del tiempo que estuvo el anterior, y el tercero, los $\frac{7}{6}$ del tiempo del segundo. ¿Cuánto pierde cada uno si hay una pérdida total de \$490? **R. 1º, \$186 $\frac{2}{3}$; 2º, \$140; 3º, \$163 $\frac{1}{3}$**

II. COMPAÑÍA COMPUESTA

En este caso, como los capitales y los tiempos son distintos, se sigue la siguiente:

REGLA

Se reparte la ganancia o pérdida en partes proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos, reduciendo éstos, si es necesario, a una misma medida.

795

Ejemplo

Tres individuos se asocian para emprender una empresa. El 1º impone \$2,000 durante 3 años; el 2º \$1,800 durante 4 años y el 3º \$3,000 por 8 meses. ¿Cuánto corresponde a cada uno si hay un beneficio de \$2,500?

Hay que multiplicar los capitales por sus tiempos respectivos:

$$\begin{array}{lcl} \$2,000 \times 36 \text{ meses} = \$72,000 & \text{por} & 1 \text{ mes} \\ \$1,800 \times 48 \text{ meses} = \$86,400 & " & 1 " \\ \$3,000 \times 8 \text{ meses} = \$24,000 & " & 1 " \end{array}$$

Ahora, se reparte la ganancia \$2,500 en partes proporcionales a estos productos:

$$x = \frac{2,500 \times 72,000}{72,000 + 86,400 + 24,000} = \frac{2,500 \times 72,000}{182,400} = \$ 986 \frac{16}{19}$$

$$y = \frac{2,500 \times 86,400}{72,000 + 86,400 + 24,000} = \frac{2,500 \times 86,400}{182,400} = \$1,184 \frac{4}{19}$$

$$z = \frac{2,500 \times 24,000}{72,000 + 86,400 + 24,000} = \frac{2,500 \times 24,000}{182,400} = \$ 328 \frac{18}{19}$$

\$2,500 prueba

El 1º gana \$986 $\frac{16}{19}$; el 2º, \$1,184 $\frac{4}{19}$; el 3º, \$328 $\frac{18}{19}$

350

Ejercicio

- En una sociedad formada por tres individuos se han hecho las siguientes imposiciones: el primero, 500 dólares por 2 años; el segundo, 400 por 4 años, y el tercero, 300 por 5 años. ¿Cuánto corresponde a cada uno si hay una ganancia de 1,230 dólares? **R. 1º, 300; 2º, 480; 3º, 450 dólares**
- Dos individuos reúnen \$8,500 para explotar un negocio. El primero impone \$6,000 por 2 años y el segundo lo restante por 3 años. ¿Cuánto corresponde perder a cada uno si hay una pérdida total de \$1,365? **R. 1º, \$840; 2º, \$525**
- Para explotar una industria, tres socios imponen: el primero, 300 dólares; el segundo, 200 más que el primero, y el tercero, 100 menos que los dos anteriores juntos. El primero ha permanecido en el negocio por 3 años, el segundo por 4 y el tercero por 5 años. ¿Cuánto toca a cada uno de un beneficio de 448 dólares? **R. 1º, 63; 2º, 140; 3º, 245 dólares**
- Tres individuos reúnen 25,000 balboas, de los cuales el primero ha impuesto 8,000; el segundo 3,000 más que el primero, y el tercero lo restante. El primero ha permanecido en el negocio por 8 meses, el segundo por 3 meses y el tercero por 5 meses. Si hay que afrontar una pérdida de 1,143, ¿cuánto debe perder cada uno? **R. 1º, 576; 2º, 297; 3º, 270 balboas**
- En una industria, tres socios han impuesto: el primero, 6,000 bolivianos más que el segundo; el segundo 3,000 más que el tercero y éste 8,000. El primero permaneció en la industria por 1 año,

el segundo por año y medio y, el tercero por $2\frac{1}{2}$ años. ¿Cuánto corresponde a cada uno de un beneficio de 5,885 bolivianos? **R. 1º, 1,870; 2º, 1,815; 3º, 2,200 bolivianos**

6. ¿Cuánto ganará cada uno de tres socios que en la explotación de una industria, impusieron: el primero 300 dólares más que el segundo; éste 850 y el tercero 200 menos que el segundo, sabiendo que el primero estuvo en el negocio por 5 meses, el segundo 2 meses más que el primero y el tercero 3 meses más que el primero, si el beneficio total es de 338 dólares? **R. 1º, 115; 2º, 119; 3º, 104 dólares**

7. Tres socios han impuesto: el primero \$5,000 por 9 meses; el segundo los $\frac{2}{5}$ de lo que impuso el primero durante $\frac{7}{6}$ de año; el tercero los $\frac{9}{8}$ de lo que impuso el segundo por año y medio. ¿Cuánto corresponde a cada uno de un beneficio de \$3,405? **R. 1º, \$1,350; 2º, \$840; 3º, \$1,215**

8. Cuatro comerciantes asociados en una industria, han impuesto: el primero, 300 dólares más que el tercero; el segundo 400 más que el cuarto; el tercero, 500 más que el segundo, y el cuarto, 2,000. El primero permaneció en la industria durante año y medio; el segundo por $1\frac{3}{4}$ años; el tercero por $2\frac{1}{2}$ años y el cuarto por $2\frac{3}{4}$ años. Si hay que repartir una ganancia de 4,350 dólares, ¿cuánto corresponde a cada uno? **R. 1º, 960; 2º, 840; 3º, 1,450; 4º, 1,100 dólares**

9. De los tres individuos que constituyeron una sociedad, el primero permaneció en la misma durante 1 año; el segundo durante 7 meses más que el primero y el tercero durante 8 meses más que el segundo. El primero había impuesto 800 dólares, el segundo 200 más que el primero y el tercero 400 menos que el segundo. Si hay una pérdida de 224 dólares, ¿cuánto corresponde perder a cada uno? **R. 1º, 48; 2º, 95; 3º, 81 dólares**

10. Cinco socios han impuesto: el primero, \$2,000 por 2 años 4 meses; el segundo \$2,500 por los $\frac{3}{7}$ del tiempo anterior; el tercero, \$3,000 por los $\frac{5}{6}$ del tiempo del segundo; el cuarto, \$4,000 por un año y 8 meses y el quinto, \$500 menos que el cuarto por $\frac{3}{4}$ de año. Habiendo \$9,100 de utilidad, ¿cuánto gana cada uno? **R. 1º, \$2,240; 2º, \$1,200; 3º, \$1,200; 4º, \$3,200; 5º, \$1,260**

III. REGLA DE COMPAÑÍA EN QUE SE ALTERAN LOS CAPITALS

El ejemplo siguiente ilustrará esta clase de problemas.

Tres individuos se asocian para un negocio que dura 2 años. El primero impone \$2,000 y al cabo de 8 meses \$1,500 más. El segundo impone al principio \$5,000 y después de un año saca la mitad. El tercero, que había impuesto al principio \$2,500, saca a los 5 meses \$1,000 y dos meses más tarde agrega \$500. Si hay una pérdida de \$500, ¿cuánto corresponde perder a cada uno?

Hay que ver cada imposición el tiempo que ha durado. Se multiplica cada imposición por su tiempo respectivo y los productos correspondientes a cada socio se suman.

Los \$2,000 que impuso el primero al principio estuvieron impuestos 8 meses. Entonces añade \$1,500, siendo su capital entonces de \$2,000 + \$1,500 = \$3,500 que están impuestos, como ya habían pasado 8 meses, durante los 16 meses restantes hasta completar los dos años:

$$\begin{array}{rcl} \$2,000 \times 8 \text{ meses} & = & \$16,000 \text{ por } 1 \text{ mes} \\ \$3,500 \times 16 \text{ meses} & = & \$56,000 \text{ " } 1 \text{ " } \end{array}$$

El 1º: \$16,000 + \$56,000 = \$72,000 por 1 mes.

El segundo impuso al principio \$5,000 pero estos \$5,000 sólo estuvieron impuestos un año, 12 meses, porque un año después de comenzar sacó la mitad; si al fin del primer año saca la mitad de su capital que era \$5,000, le quedan \$2,500, que han estado impuestos durante el año siguiente, o sea 12 meses:

$$\begin{array}{rcl} \$5,000 \times 12 \text{ meses} & = & \$60,000 \text{ por } 1 \text{ mes} \\ \$2,500 \times 12 \text{ meses} & = & \$30,000 \text{ " } 1 \text{ " } \end{array}$$

El 2º: \$60,000 + \$30,000 = \$90,000 por 1 mes.

El tercero impone al principio \$2,500 que están impuestos durante 5 meses. A los 5 meses saca \$1,000, luego le quedan \$1,500 que están impuestos por 2 meses, pues al cabo de esos dos meses agrega \$500, que con los \$1,500 anteriores suman \$2,000 que están impuestos los 17 meses que faltan hasta los dos años:

$$\begin{array}{rcl} \$2,500 \times 5 \text{ meses} & = & \$12,500 \text{ por } 1 \text{ mes} \\ \$1,500 \times 2 \text{ meses} & = & \$3,000 \text{ " } 1 \text{ " } \\ \$2,000 \times 17 \text{ meses} & = & \$34,000 \text{ " } 1 \text{ " } \end{array}$$

El 3º: \$12,500 + \$3,000 + \$34,000 = \$49,500 por 1 mes.

Ahora se reparte la pérdida, \$500, en partes proporcionales a las sumas que corresponden a cada uno, o sea a 72,000, 90,000 y 49,500:

$$x = \frac{500 \times 72,000}{72,000 + 90,000 + 49,500} = \frac{500 \times 72,000}{211,500} = \$170\frac{10}{47}$$

$$y = \frac{500 \times 90,000}{72,000 + 90,000 + 49,500} = \frac{500 \times 90,000}{211,500} = \$212\frac{36}{47}$$

$$z = \frac{500 \times 49,500}{72,000 + 90,000 + 49,500} = \frac{500 \times 49,500}{211,500} = \$117\frac{1}{47}$$

\$500 prueba

El 1º pierde \$170 $\frac{10}{47}$; el 2º, \$212 $\frac{36}{47}$; el 3º, \$117 $\frac{1}{47}$

351**Ejercicio**

1. Dos individuos emprenden un negocio por 1 año. El primero empieza con 500 dólares y 7 meses después añade 200; el segundo empieza con 600 y 3 meses después añade 300. ¿Cuánto corresponde a cada uno de un beneficio de 338 dólares? **R. 1º, 140; 2º, 198 dólares**
2. Dos socios emprendieron un negocio que ha durado 2 años. El primero impone al principio 1,500 dólares y al año y medio retira 500; el segundo empezó con 2,000 y a los 8 meses retiró 500. De una pérdida de 511 dólares, ¿cuánto pierde cada uno? **R. 1º, 231; 2º, 280 dólares**
3. Se establece una industria por dos socios con un capital de \$24,000, de los cuales el primero impone \$14,000 y el segundo lo restante. El negocio dura 2 años. El primero a los 8 meses retira \$2,000 y el segundo a los 7 meses retira \$5,000. Si hay una ganancia de \$2,700, ¿cuánto corresponde a cada uno? **R. 1º, \$1,788 $\frac{4}{17}$; 2º, \$911 $\frac{13}{17}$**
4. En un negocio que ha durado 3 años, un socio impuso 4,000 balboas y a los 8 meses retiró la mitad; el segundo impuso 6,000 y al año añadió 3,000 y el tercero, que empezó con 6,000, a los 2 años retiró 1,500. ¿Cuánto corresponde a cada uno de un beneficio de 5,740? **R. 1º, 880; 2º, 880; 3º, 1,980 balboas**
5. Se ha realizado un beneficio de 5,610 bolivianos en un negocio en el que han intervenido dos individuos. El negocio ha durado 3 años. El primer individuo empieza con 8,000, a los 7 meses retira la mitad de su capital y 2 meses más tarde agrega 2,000. El segundo, que empezó con 6,000, al año duplicó su capital y 5 meses más tarde retiró 4,000. ¿Cuánto ganará cada uno? **R. 1º, 2,486; 2º, 3,124 bolivianos**
6. Tres socios imponen \$60,000 por partes iguales en un negocio que dura 2 años. El primero al terminar el primer año añadió \$1,500 y 4 meses después retiró \$5,000; el segundo a los 8 meses añadió \$4,000 y 5 meses después otros \$2,000; el tercero a los 14 meses retiró \$5,600. Si hay una pérdida de \$7,240, ¿cuánto pierde cada uno? **R. 1º, \$2,290; 2º, \$2,830; 3º, \$2,120**



El promedio y la probabilidad son las bases de la ciencia actuarial moderna. Se da por un hecho histórico irrefutable que la Estadística en su concepto más reciente, debe su origen al juego de azar. Cuéntase que estando Pascal en una taberna,

Antonio Gombaud, caballero de Meré, le propuso un problema basado en el juego de dados. Pascal le dio solución, fundando en 1654 la Teoría de las Probabilidades.

Capítulo **L**

PROMEDIOS

797 La **regla del término medio** tiene por objeto hallar un número medio entre varios de la misma especie.

798 **REGLA GENERAL**

Para hallar el término medio entre varias cantidades, se suman y esta suma se divide entre el número de cantidades.

799 Un hombre ha gastado el lunes \$495, el martes \$500, el miércoles \$385 y el jueves \$800. ¿Cuál es su gasto medio por día?

Se suma lo que ha gastado en los cuatro días:

$$\$495 + \$500 + \$385 + \$800 = \$2,180$$

Esta suma se divide entre los cuatro días:

$$\$2,180 \div 4 = \$545$$

El gasto medio por día ha sido de **\$545**. **R.**

En una finca de 15 caballerías, hay 7 caballerías que producen c/u 80,000 @ de caña; 4 caballerías que producen c/u 100,000 @ y las restantes c/u 120,000 @. ¿Cuál es la producción media por caballería?

800

$$\begin{array}{rcl}
 7 \text{ cab.} \times 80,000 @ & = & 560,000 @ \\
 4 \text{ " } \times 100,000 @ & = & 400,000 @ \\
 4 \text{ " } \times 120,000 @ & = & 480,000 @ \\
 \hline
 15 \text{ cab.} & & 1,440,000 @ \text{ produc. total.}
 \end{array}$$

$1,440,000 @ \div 15 \text{ cab.} = 96,000 @$ por cab. La producción media por caballería es de **96,000 @**. R.

Un comerciante compró 500 CD a \$3 c/u. Vendió 300 a \$3.50 cada uno; 80 a \$2.25 c/u y el resto a \$2.15 c/u. ¿Ganó o perdió en total y cuál es el promedio de ganancia o de pérdida por CD?

801

Vendiendo 300 CD a \$3.50 gana en cada CD \$0.50, luego en los 300 CD gana $300 \times \$0.50 = \150 .

Vendiendo 80 CD a \$2.25 pierde en cada uno \$0.75, luego en los 80 CD perderá $80 \times \$0.75 = \60 .

Vendiendo el resto, 120 CD, a \$2.15, pierde en cada uno \$0.85, luego en los 120 CD perderá $120 \times \$0.85 = \102 .

Entonces, la ganancia obtenida en la primera venta es \$150 y la pérdida de la segunda y tercera venta es $\$60 + \$102 = \$162$, luego tiene una pérdida total de $\$162 - \$150 = \$12$.

Si la pérdida total es \$12, habiendo vendido 500 CD, el promedio de pérdida por CD es $\$12 \div 500 = \text{\$0.024}$. R.

1. Un individuo ha ganado en 4 días: el primer día, \$70; el segundo día, \$44; el tercero, \$90 y el cuarto, \$100. ¿Cuál es su ganancia media diaria? R. **\$76**

2. Un hombre camina durante 5 días de este modo: el primer día, 12 kilómetros; el segundo, 14; el tercero, 16; el cuarto, 20 y el quinto 23. ¿Cuál es la distancia media recorrida por día? R. **17 kilómetros**

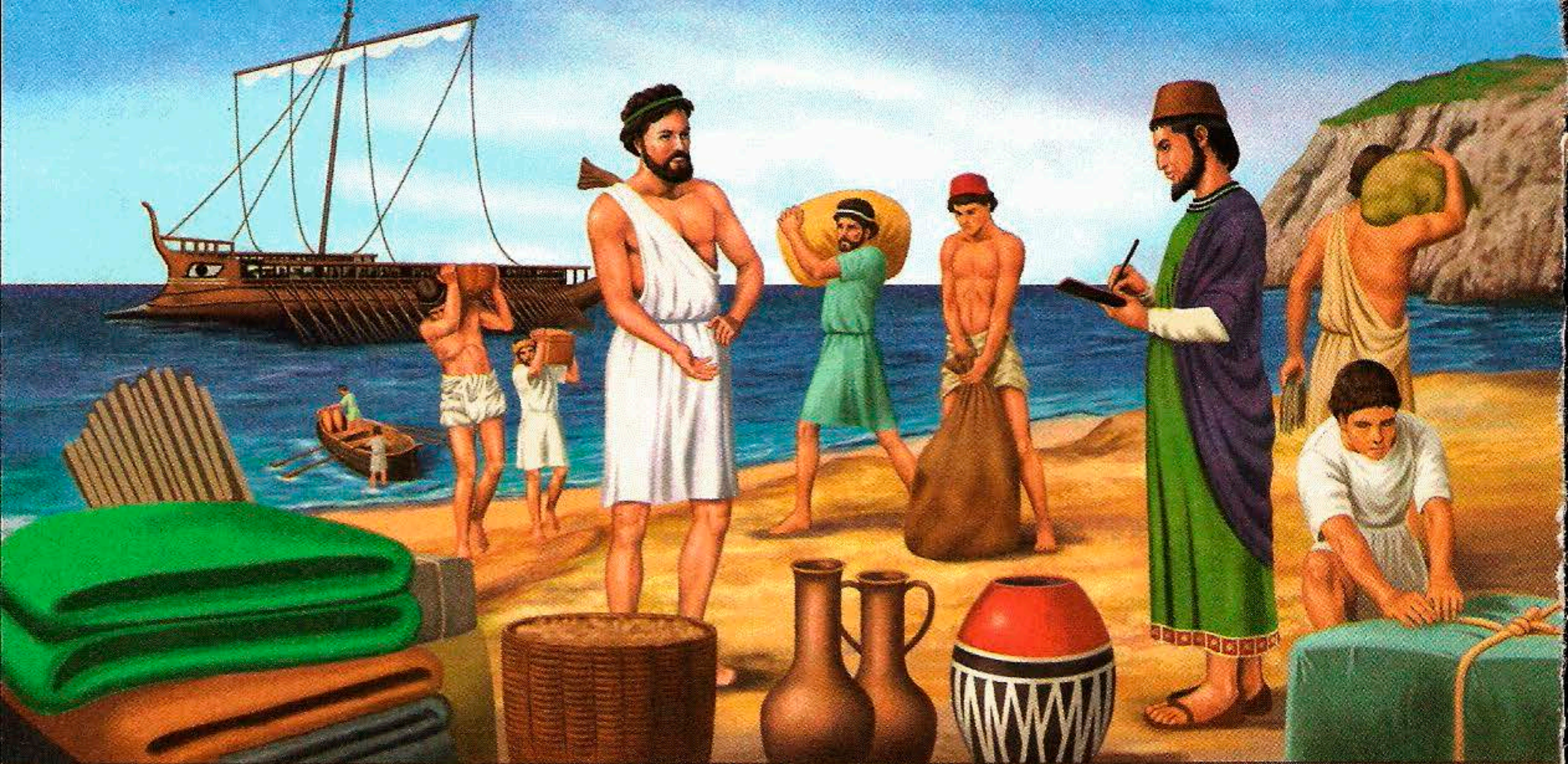
3. Por hacer cuatro obras se paga: por la primera, \$240; por la segunda, \$350; por la tercera, \$500 y por la cuarta, \$235. ¿Cuál es el precio medio por obra? R. **\$331.25**

4. El primer año que un alumno estuvo en un colegio recibió 2 medallas como premio; el segundo, 3; el tercero, 5; el cuarto, 7 y el quinto 8. ¿Cuántas medallas ha ganado por término medio cada año? R. **5 medallas**

5. Un famoso corredor alcanzó con su auto deportivo la velocidad de $220\frac{1}{8}$ millas por hora corriendo contra el viento y 223.301 millas por hora, en sentido contrario. ¿Cuál ha sido la velocidad media por hora? R. **221.713 millas**

352

Ejercicio



Griegos y romanos conocían la regla de aligación, que usaban en su constante comercio de vinos con los fenicios. Los escritores italianos del siglo xv dieron a conocer en sus aritméticas comerciales, numerosos problemas de mezcla y aligación que

habían tomado de los griegos y romanos. Entre las 28 reglas que expone **Tartaglia**, en su *Aritmética comercial* de 1556, incluye la regla de mezcla o aligación.

Capítulo **LI**

ALIGACIÓN O MEZCLA

802 La **regla de aligación** tiene por objeto resolver los problemas de mezclas.

803 PROBLEMA DIRECTO O PROBLEMA INVERSO

En la mezcla de varias sustancias se pueden presentar dos problemas: el directo y el inverso.

El **problema directo** consiste, conociendo las cantidades de las sustancias que se mezclan (ingredientes) y sus precios respectivos, en hallar el precio a que resulta cada unidad de la mezcla, que es lo que se llama **precio medio** o **término medio**.

El **problema inverso** consiste, conociendo el precio medio y los precios de los ingredientes, en hallar qué cantidad debe entrar en la mezcla de cada ingrediente.

I. ALIGACIÓN DIRECTA

804 DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE LA ALIGACIÓN DIRECTA

Sea una mezcla en la que entran a kg de precio $\$p$ (cada kg), b kg de precio $\$p'$ y c kg de precio $\$p''$.

Tendremos:

a kg de precio $\$p$	cuestan $\$ap$
b kg de precio $\$p'$	cuestan $\$bp'$
c kg de precio $\$p''$	cuestan $\$cp''$

Entonces, el importe total de la mezcla es $\$(ap + bp' + cp'')$ y el número de kg de la mezcla es $a + b + c$, luego el precio medio m a que hay que vender cada kg de la mezcla para no ganar ni perder es: _____ y ésta es la fórmula de la aligación directa.

$$m = \frac{ap + bp' + cp''}{a + b + c}$$

Este cociente, que nos da el precio al que hay que vender cada unidad de la mezcla para no ganar ni perder, es lo que se llama **precio medio**.

PROBLEMAS DE ALIGACIÓN DIRECTA

Los problemas de aligación directa son sólo problemas de promedios.

¿A cómo sale el litro de una mezcla de 10 litros de vino de \$84 con 8 litros de \$90 y con 12 litros de \$120?

805

10 ℓ de vino de \$84 cuestan	$10 \times \$84 =$	\$840
8 " " " " \$90 "	$8 \times \$90 =$	720
12 " " " " \$120 "	$12 \times \$120 =$	1,440
<hr/> 30 ℓ		<hr/> \$3,000
(cantidad total)		(precio total)

El litro de la mezcla sale a $\$3,000 \div 30 =$ **\$100**. R.

Vendiendo cada litro de la mezcla a \$100, **no se gana ni se pierde**, pues sólo se recupera el costo.

En un tonel de 100 litros de capacidad se vacían 40 ℓ de vino de \$60, 50 ℓ de \$80 y se acaba de llenar con agua. ¿A cómo sale el litro de la mezcla y a cómo hay que venderlo para ganar 25% del costo?

806

40 ℓ de \$60 cuestan	$40 \times \$60 =$	\$2,400
50 " " \$80 "	$50 \times \$80 =$	4,000
10 " " agua no cuesta nada		
<hr/> 100 ℓ		<hr/> \$6,400
(cantidad total)		(precio total)

El litro de la mezcla sale a $\$6,400 \div 100 \ell =$ **\$64**. R.

Vendiendo cada litro de la mezcla a \$64 **no se gana ni se pierde**; \$64 es sólo el costo de cada litro de la mezcla. Si queremos ganar 25% del costo, sólo hay que hallar 25% de \$64 y sumárselo.

25% de \$64 es $\$64 \div 4 = \16 ; luego, para ganar 25% del costo habrá que vender el litro de la mezcla a $\$64 + \$16 =$ **\$80**. R.

353

Ejercicio

1. Mezclando un litro de vino de \$69, con otro de \$80 y con otro de \$45, ¿a cómo sale el litro de la mezcla? **R. $\$64\frac{2}{3}$**
2. Si se tienen 14 litros de vino a \$80 el litro y se les añaden 6 litros de agua, ¿a cómo sale el litro de la mezcla? **R. \$56**
3. Se mezclan 8 litros de vino de \$90 con 14 litros de \$70. Si a esta mezcla se añaden 5 litros de agua, ¿a cómo sale el litro de la mezcla? **R. $\$62\frac{26}{27}$**
4. Combinando 8 libras de café de \$60 la libra, con 1 qq de \$50 la libra, con 3 @ de \$40 la libra y con 40 libras de \$30, ¿a cómo habrá que vender la libra de la mezcla para no ganar ni perder? **R. $\$43\frac{91}{223}$**
5. ¿De cuántos grados resultará el litro de una mezcla de 500 litros de alcohol de 30 grados, con 200 litros de 40 grados, con 300 litros de 8 grados? **R. $25\frac{2}{5}^\circ$**
6. En un tonel de 500 litros se echan 100 litros de vino de \$40, 80 litros de vino de \$50, 120 litros de vino de \$60 y se acaba de llenar con agua. ¿A cómo saldrá el litro de la mezcla? **R. \$30.4**
7. Si se combinan 12 litros de vino de \$80, con 10 litros de \$72 y con 8 litros de \$60, ¿a cómo habrá que vender el litro de la mezcla para ganar 6% del costo? **R. \$76.32**

II. ALIGACIÓN INVERSA

807

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE LA ALIGACIÓN INVERSA

Las diferencias entre los precios extremos y el precio medio son inversamente proporcionales a las cantidades que se mezclan.

Sea p el precio mayor, m el precio medio y p' el precio menor. Sea x la cantidad de precio p y y la cantidad de precio p' que deben mezclarse para obtener una mezcla de precio medio m .

p. medio	p. ingred.	cant. ingred.	
m	p	x	$p > m$
	p'	y	$m > p'$

Si una unidad del ingrediente de precio p , que es mayor que el precio medio m , se vende a m , se pierde $p - m$ y en x unidades se perderá $(p - m)x$.

Si una unidad del ingrediente de precio p' , que es menor que el precio medio m , se vende a m , se gana $m - p'$ y en y unidades se ganará $(m - p')y$.

Luego tenemos:

$(p - m)x$ es la pérdida total que se obtiene vendiendo las x unidades de precio p a m , que es menor.

$(m - p')y$ es la ganancia total que se obtiene vendiendo las y unidades de precio p' a m , que es mayor.

Ahora bien: como la ganancia tiene que ser igual a la pérdida, tendremos: $(p - m)x = (m - p')y$ y como hay un teorema (663) que dice que si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, con las cuatro se puede formar una proporción, tendremos: ————— que es la fórmula de la aligación inversa.

$$\frac{p - m}{m - p'} = \frac{y}{x}$$

PROBLEMAS DE ALIGACIÓN INVERSA

En la aligación inversa se pueden considerar los cuatros casos que se expresan a continuación:

CASO 1. Dado el precio medio y los precios de los ingredientes, hallar las cantidades de los ingredientes.

Para obtener vino de \$80 el litro, ¿qué cantidades serán necesarias de vino de \$90 y de \$50?

La operación se dispone así:

p. medio	p. de ingred.	comparación	cant. de ingred.
80	90	$80 - 50 =$	30 de \$90
	50	$90 - 80 =$	$\frac{10}{40}$ de \$50

La **comparación** se hace restando **del precio medio el precio menor**, y esa diferencia será la **cantidad del ingrediente de precio mayor**; y restando **del precio mayor el precio medio**, y esa diferencia será la **cantidad del ingrediente de precio menor**.

R. 30 ℓ de vino de \$90 y 10 ℓ de vino de \$50 para preparar $30 + 10 = 40$ ℓ de vino que se venden a \$80 sin ganar ni perder.

¿Cuántos litros de vino de \$90, de \$85, \$50 y \$30 el litro serán necesarios para obtener una mezcla que se pueda vender a \$65 el litro sin ganar ni perder?

p. medio	p. de ingred.	comparación	cant. de ingred.
65	90	$65 - 30 =$	35 ℓ de \$90
	85	$65 - 50 =$	15 ℓ de \$85
	50	$85 - 65 =$	20 ℓ de \$50
	30	$90 - 65 =$	$\frac{25}{95}$ ℓ de \$30

R. 35 ℓ de \$90, 15 ℓ de \$85, 20 ℓ de \$50 y 25 ℓ de \$30 para preparar 95 ℓ que se puedan vender a \$65 sin ganar ni perder.

808

809

OTRA SOLUCIÓN

Este problema puede resolverse también comparando 90 con 50 y 85 con 30, como se expresa a continuación:

p. medio	p. de ingred.	comparación	cant. de ingred.
65	90	$65 - 50 =$	15 ℓ de \$90
	85	$65 - 30 =$	35 ℓ de \$85
	50	$90 - 65 =$	25 ℓ de \$50
	30	$85 - 65 =$	<u>20</u> ℓ de \$30
			95

OBSERVACIÓN

Véase que las comparaciones han de hacerse **siempre** con dos precios de ingredientes tales que **uno sea mayor que el término medio y otro menor** y **nunca** con dos precios **mayores los dos o menores los dos** que el **medio**.

810 Se quiere obtener café de \$55 la libra mezclando café de \$75, \$70, \$65, \$50 y \$35 la libra. ¿Cuánto se tomará de cada calidad?

p. medio	p. de ingred.	comparación	cant. de ingred.
55	75	$55 - 35 =$	20 lb de \$75
	70	$55 - 50 =$	5 lb de \$70
	65	$55 - 35 =$	20 lb de \$65
	50	$70 - 55 =$	15 lb de \$50
	35	$\left\{ \begin{array}{l} 75 - 55 = 20 \\ 65 - 55 = 10 \end{array} \right\} =$	<u>30</u> lb de \$35
			90

Véase que hemos comparado 75 con 35 y 70 con 50 y quedaba un precio libre, 65, mayor que el medio; éste tenemos que compararlo con cualquiera de los precios menores que el medio, con 35, por ejemplo: pero como con 35 ya se había hecho otra comparación, a este precio le tocan **dos resultados** que se suman.

811 INDETERMINACIÓN

Los problemas de este primer caso son **indeterminados**, ya que tienen muchas soluciones, porque multiplicando o dividiendo entre un mismo número las cantidades de ingredientes obtenidas, tendríamos otras soluciones que cumplirían las condiciones del problema.

Los casos siguientes en que se **limita la cantidad total de la mezcla** o se **fija la proporción en que han de entrar uno o más ingredientes** son **determinados**.

354**Ejercicio**

1. ¿Qué cantidades necesito de harina de \$10/kg y \$15/kg para obtener harina que pueda vender a \$13/kg sin ganar ni perder? **R. 2 kg de \$10 y 3 kg de \$15 para 5 kg de la mezcla.**
2. ¿Qué cantidades de café de \$25/lb y \$30/lb necesito para obtener café que pueda vender a \$28/lb sin ganar ni perder? **R. 2 lb de \$25 y 3 lb de \$30 para 5 lb de la mezcla.**
3. Con café de \$45/lb y \$60/lb quiero hacer una mezcla tal que al vender la mezcla por \$55/lb gane \$5/lb. ¿Cuánto tomaré de cada ingrediente? **R. 10 lb de \$45 y 5 lb de \$60 para 15 lb de la mezcla.**
4. ¿Qué cantidades de vino de \$80/ℓ y \$95/ℓ formaban una mezcla que, vendida a \$85 el litro dejó una pérdida de \$5 en cada litro? **R. 5 ℓ de \$80 y 10 ℓ de \$95 para 15 ℓ de la mezcla.**
5. Mezclando vino de \$90, \$80, \$75 y \$60 el litro obtuve una mezcla que vendí a \$78 el litro sin ganar ni perder. ¿Qué cantidad tomé de cada ingrediente? **R. 18 ℓ de \$90, 3 ℓ de \$80, 2 ℓ de \$75 y 12 ℓ de \$60 o 3 ℓ de \$90, 18 ℓ de \$80, 12 ℓ de \$75 y 2 ℓ de \$60 para 35 ℓ de la mezcla.**

CASO 2. Dado el término medio, los precios de los ingredientes y la cantidad total de la mezcla, hallar las cantidades de los ingredientes.

¿Qué cantidades de vino de \$120 y \$50 el litro y de agua serán necesarias para preparar 380 litros de vino que se vendan a \$80 el litro sin ganar ni perder?

812

Se procede como en los problemas anteriores, prescindiendo por ahora de la cantidad total de la mezcla, 380 litros.

p. medio	p. de ingred.	comparación	cant. de ingred.
80	$\begin{bmatrix} 120 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 80 - 50 = 30 \\ 80 - 0 = 80 \end{cases}$ $\begin{matrix} 120 - 80 & \dots & = \\ 120 - 80 & \dots & = \end{matrix}$	$\begin{matrix} = 110 \text{ de } \$120 \\ = 40 \text{ de } \$50 \\ = 40 \text{ de agua} \end{matrix}$
			190

Estas cantidades que hemos obtenido, 110, 40 y 40, **no son las cantidades buscadas** porque su suma no nos da los 380 litros que se quieren obtener. Ahora hay que **repartir la cantidad total de la mezcla, 380 litros, en partes proporcionales a los resultados obtenidos 110, 40 y 40**:

$$x = \frac{380 \times 110}{110 + 40 + 40} = \frac{380 \times 110}{190} = 220 \text{ ℓ de } \$120$$

$$y = \frac{380 \times 40}{110 + 40 + 40} = \frac{380 \times 40}{190} = 80 \text{ ℓ de } \$50 \quad \mathbf{R.}$$

$$z = (\text{igual anterior}) = 80 \text{ ℓ de agua}$$

355

Ejercicio

1. ¿Qué cantidades de café de \$50/kg y \$40/kg harán falta para formar una mezcla de 30 kg de café que se pueda vender a \$42 el kilo, sin ganar ni perder? **R. 6 kg de \$50 y 24 kg de \$40**
2. Para preparar 44 litros de alcohol de 75°, ¿qué cantidades serán necesarias de alcohol de 60° y 82°? **R. 14 ℓ de 60° y 30 ℓ de 82°**
3. ¿Qué cantidades de vino de \$90, \$82, \$65 y \$50 el litro serán necesarias para preparar 114 litros de una mezcla que se pueda vender a \$75 el litro, sin ganar ni perder? **R. 50 ℓ de \$90, 20 ℓ de \$82, 14 ℓ de \$65 y 30 ℓ de \$50 o 20 ℓ de \$90, 50 ℓ de \$82, 30 ℓ de \$65 y 14 ℓ de \$50**
4. Para formar una mezcla de 60 libras de harina que se pueda vender a \$11 la libra sin ganar ni perder, ¿qué cantidades serán necesarias de harina de \$7, \$10, \$15 y \$14 la libra? **R. 20 lb de \$15, 5 lb de \$14, 15 lb de \$10 y 20 lb de \$7 o 5 lb de \$15, 20 lb de \$14, 20 lb de \$10 y 15 lb de \$7**
5. Si tengo alcohol de 40°, 35°, 30° y 25°, ¿qué cantidad de cada graduación necesitaré para preparar 5 litros de 33°? **R. 2 ℓ de 40°, $\frac{3}{4}$ ℓ de 35°, $\frac{1}{2}$ ℓ de 30° y $1\frac{3}{4}$ ℓ de 25° o $\frac{3}{4}$ ℓ de 40°, 2 ℓ de 35°, $1\frac{3}{4}$ ℓ de 30° y $\frac{1}{2}$ ℓ de 25°**

CASO 3. Dado el término medio, los precios de los ingredientes y la cantidad de uno de los ingredientes, hallar las cantidades de los otros.

813

¿Qué cantidades de café de \$80/libra, de \$60/libra y de \$25/libra será necesario añadir a 6 libras de café de \$35 para que la libra de la mezcla se pueda vender a \$50, sin ganar ni perder?

Se hace la comparación como en los casos anteriores, prescindiendo por ahora de la cantidad, 6 libras, del ingrediente conocido.

p. medio	p. ingred.	comparación	cantidades
50	80	50 - 25 =	25 de 80
	60	50 - 35 =	15 " 60
	25	80 - 50 =	30 " 25
	6 lb de 35	60 - 50 =	10 " 35

Estos resultados que hemos obtenido: 25, 15, 30 y 10 no son los que buscamos.

Para hallar la cantidad que se debe tomar de cada ingrediente, se establecen proporciones del modo siguiente:

Para saber qué cantidad debo tomar de café de \$80, diré:

cuando pongo 10 lb de \$35 pongo 25 lb de \$80

cuando ponga 6 lb de \$35 pondré x lb de \$80:

$$\frac{10}{6} = \frac{25}{x} \therefore x = \frac{6 \times 25}{10} = 15 \text{ lb de } \$80$$

Para saber la cantidad de café de \$60, diré:
cuando pongo 10 lb de \$35 pongo 15 lb de \$60
cuando ponga 6 lb de \$35 pondré x lb de \$60:

$$\frac{10}{6} = \frac{15}{x} \therefore x = \frac{6 \times 15}{10} = 9 \text{ lb de } \$60$$

Para saber la cantidad de café de \$25, diré:
cuando pongo 10 lb de \$35 pongo 30 lb de \$25
cuando ponga 6 lb de \$35 pondré x lb de \$25

$$\frac{10}{6} = \frac{30}{x} \therefore x = \frac{6 \times 30}{10} = 18 \text{ lb de } \$25$$

R. A las 6 libras de \$35 habrá que añadir 15 libras de \$80, 9 libras de \$60, y 18 libras de \$25.

356**Ejercicio**

1. ¿Qué cantidad de agua hay que añadir a 3 ℓ de alcohol de 40° para que la mezcla resulte de 30°? **R. 1 ℓ**
2. ¿Qué cantidad de vino de \$30 el litro hay que añadir a 5 litros de vino de \$60 para que la mezcla resulte de \$40? **R. 10 ℓ**
3. ¿Qué cantidades de café de \$50, \$40 y \$30 la libra hará falta para obtener café que se pueda vender a \$35 la libra sin ganar ni perder, si se quiere que en la mezcla entren 6 lb de café de \$30 la libra?
R. 1½ lb de \$50 y \$40
4. ¿Qué cantidades de café de \$20 y \$15 la libra tengo que añadir a 6 lb de café de \$40 para formar una mezcla que la pueda vender a \$27 la libra ganando \$5 por libra? **R. 12 lb de \$20 y \$15**
5. Un tabernero tiene 6 ℓ de vino de \$80 y quiere saber qué cantidades de vino de \$60, \$50 y \$40 debe añadir a los 6 litros anteriores para formar una mezcla que pueda vender a \$78 el litro ganando \$8 en cada litro. **R. 1 ℓ de \$60, \$50 y \$40**

CASO 4. Dado el precio medio, los precios de los ingredientes, la cantidad total de la mezcla y la cantidad de uno o varios de los ingredientes, hallar las cantidades de los restantes ingredientes.

Un tabernero tiene 50 litros de vino de \$90 y quiere saber qué cantidades de vino de \$80, \$50 y \$40 el litro deberá añadirles para formar una mezcla de 185 litros que pueda vender a \$60 el litro sin ganar ni perder.

814

Este caso es mixto; comprende el 2º y el 3º y lo resolveremos de este modo:

En la mezcla tienen que entrar 50 ℓ de \$90 (precio mayor que el medio). Tomamos este dato y un ingrediente de precio **menor** que el medio, por ejemplo, \$40 y hallamos **qué can-**

tividad de vino de \$40 hay que añadir a los 50 ℓ de \$90 para que la mezcla salga al precio medio buscado de \$60 (caso 3).

p. medio	p. de ingred.	comparación	cantidades
60	50 ℓ de 90	60 - 40	= 20 de 90
	40	90 - 60	= 30 de 40

Ahora decimos:

cuando entran 20 ℓ de \$90 entran 30 ℓ de \$40
cuando entren 50 ℓ de \$90 entrarán x ℓ de \$40

$$\frac{20}{30} = \frac{50}{x} \therefore x = \frac{30 \times 50}{20} = 75 \text{ ℓ de } \$40$$

Entonces ya sabemos que con 50 ℓ de \$90 y 75 ℓ de \$40 podemos formar una mezcla de $50 + 75 = 125$ ℓ que se vendan a \$60 (el precio medio buscado) sin ganar ni perder.

Como se quieren obtener 185 ℓ de \$60 y ya tenemos 125 ℓ de ese precio, nos falta obtener $185 - 125 = 60$ ℓ de \$60, que tenemos que obtener mezclando **los dos ingredientes que faltan**, es decir, mezclando vino de \$80 y de \$50.

Ahora hallamos **qué cantidades de vino de \$80 y \$50 el litro hacen falta para obtener 60 ℓ de \$60** (caso 2).

p. medio	p. de ingred.	comparación	cantidades
60	80	60 - 50	= 10 de \$80
	50	80 - 60	= $\frac{20}{30}$ de \$50

pero como hace falta obtener 60 ℓ de \$60 tengo que repartir 60 ℓ en partes proporcionales a 10 y 20:

$$x = \frac{60 \times 10}{30} = 20 \text{ ℓ de } \$80$$

$$y = \frac{60 \times 20}{30} = 40 \text{ ℓ de } \$50$$

R. A los 50 ℓ de vino de \$90 hay que añadirles 75 ℓ de \$40, 20 ℓ de \$80 y 40 ℓ de \$50 para tener una mezcla de $50 + 75 + 20 + 40 = 185$ ℓ, que se venden a \$60 sin ganar ni perder.

357

Ejercicio

- Con café de \$60, \$50, \$40 y \$30 la libra se quieren obtener 40 lb de café, que vendidas a \$45 no dejen ganancia ni pérdida. Si en la mezcla han de entrar 5 lb de \$30, ¿qué cantidad se tomará de los otros ingredientes? **R.** 5 lb de \$60 y 15 lb de \$40 y \$50
- ¿Qué cantidades de vino de \$95, \$80 y \$40 el litro habrá que añadir a 4 litros de \$55 para obtener una mezcla de 16 litros que se puedan vender a \$60 sin ganar ni perder? **R.** 4 ℓ de \$95, 1 ℓ de \$80 y 7 ℓ de \$40 o $\frac{4}{7}$ ℓ de \$95, $5\frac{5}{7}$ ℓ de \$80 y $5\frac{5}{7}$ ℓ de \$40

3. Un comerciante quiere preparar 38 libras de café para venderlas a \$20 la libra, ganando \$5 en cada libra, y para ello hace una mezcla con café de \$20, \$18, \$12 y \$10 la libra. Si en la mezcla han de entrar 10 libras de \$20, ¿qué cantidad habrá de poner de los otros ingredientes? **R. 10 lb de \$10, 9 lb de \$18 y \$12 o $4\frac{1}{4}$ lb de \$10, $7\frac{1}{12}$ lb de \$18 y $16\frac{2}{3}$ lb de \$12**
4. Tengo 20 ℓ de vino de \$70 y quiero saber qué cantidades de vino de \$50 y de agua deberé añadirles para obtener 50 litros de vino que se puedan vender a \$40 sin ganar ni perder. **R. 12 ℓ de \$50 y 18 ℓ de agua**
5. Con alcohol de 40°, 30° y 20° se quieren obtener 60 litros de alcohol de 25°. Si en la mezcla han de entrar 10 litros de 40°, ¿cuántos litros habrá que poner de los otros ingredientes? **R. 40 ℓ de 20° y 10 ℓ de 30°**

OTRA PRUEBA DE LA ALIGACIÓN INVERSA

815

La aligación inversa puede probarse también por medio de la **aligación directa**. Con los resultados obtenidos se forma una aligación directa, para hallar el precio medio de la mezcla, y si el problema está bien debe darnos como resultado el término medio.

Así, en el último problema resuelto (814) tomemos el resultado y formemos una aligación directa con ellos. Tendremos:

50 ℓ de \$90 cuestan	$50 \times \$90 = \$ 4,500$
75 ℓ de \$40 "	$75 \times \$40 = \$ 3,000$
20 ℓ de \$80 "	$20 \times \$80 = \$ 1,600$
40 ℓ de \$50 "	$40 \times \$50 = \$ 2,000$
185 ℓ (cantidad total)	\$11,100 (costo total)

El litro de la mezcla sale a $\$11,100 \div 185 = \60 (precio medio)

MISCELÁNEA

358

Ejercicio

1. ¿A cómo debo vender el litro de una mezcla de 30 ℓ de vino de \$60 y 20 ℓ de agua para ganar \$8 por litro? **R. \$44**
2. Para obtener alcohol de 60°, ¿qué cantidades serán necesarias de alcohol de 70° y de 30°? **R. 30 ℓ de 70° y 10 ℓ de 30° para 40 ℓ de la mezcla.**
3. ¿Qué cantidades de vino de \$80 y de agua serán necesarias para obtener vino que vendido a \$55 el litro deje una utilidad de \$10 por litro? **R. 45 ℓ de \$80 y 35 ℓ de agua para 80 ℓ de la mezcla.**
4. Para obtener café de \$40 la libra, ¿qué cantidades serán necesarias de café de \$65, \$50, \$45, \$38 y \$25 la libra? **R. Una solución será: 15 lb de \$65, 2 lb de \$50 y de \$45, 15 lb de \$38 y 25 lb de \$25 para 59 lb de la mezcla.**
5. De los 600 litros de vino que contiene un barril, 20% es vino de \$50, 8% vino de \$60, 23% vino de \$70 y el resto vino de \$100 el litro. ¿A cómo sale el litro de la mezcla? **R. \$79.9**



La aleación más antigua que se conoce es el bronce. Toda una etapa de la prehistoria se caracteriza por este descubrimiento del hombre, es decir, la aleación del cobre con el estaño. La ilustración nos muestra con bastante fidelidad una

fundición de cobre y estaño explotada por los fenicios junto al Mar Rojo. La producción de estas minas era entregada al rey Salomón, a cambio de oro, perfumes y especias.

Capítulo **LII**

ALEACIONES

816

ALEACIÓN es una mezcla en la que los ingredientes son metales.

La mezcla de los metales o aleación se verifica fundiendo los metales.

Una **amalgama** es una aleación en la que uno de los ingredientes es el mercurio.

817

METAL FINO

Cuando uno de los metales que entra en la aleación es precioso, como oro, plata o platino, se le llama **metal fino**.

Liga es el peso del metal inferior, cobre, níquel, etc., con que se funde el metal precioso.

818

LEY DE LOS METALES FINOS

Se llama **ley de una aleación** a la proporción en que entra el metal fino en la aleación. Suele expresarse en milésimas.

Así, decir oro de 900 milésimas (0.900) significa que por cada mil partes en peso de la aleación, 900 son de oro y 100 de liga.

Si un lingote de plata pesa 1,000 g y de ellos, 850 g son de plata, la ley de la aleación es 0.850, o sea el cociente de dividir 850 entre 1,000.

Por tanto, la **ley es la relación entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación**. Llamando F al peso del metal fino, P al peso total de la aleación y L a la ley, tendremos:

$$L = \frac{F}{P} \text{ o } \frac{L}{1} = \frac{F}{P} \text{ y de aquí: } F = P \times L \text{ y } P = \frac{F}{L}$$

lo que nos dice que el **peso del fino** es igual al peso total por la ley y el **peso total** es igual al peso del fino dividido entre la ley.

LEY DE LOS METALES FINOS EN QUILATES

819

La ley, sobre todo del oro, suele expresarse en **quilates**. En este caso, cada **quilate** significa $\frac{1}{24}$ del peso total.

Así, anillo de **oro de 18 quilates** significa que del peso total del anillo, $\frac{18}{24}$ son de oro puro y el resto, $\frac{6}{24}$ son del metal inferior o liga; cadena de **oro de 14 quilates** significa que $\frac{14}{24}$ del peso total de la cadena son de oro puro y $\frac{10}{24}$ son de liga.

Conocida la ley en **quilates**, para expresarla en **milésimas** no hay más que dividir el número de quilates entre 24.

Así, oro de 22 quilates es oro de $\frac{22}{24} = \frac{11}{12} = 0.916\frac{2}{3}$; oro de 18 quilates es oro de $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0.750$

PROBLEMAS SOBRE RELACIONES ENTRE EL PESO DEL FINO, EL PESO DE LA ALEACIÓN Y LA LEY

Si 8 g de oro puro se funden con 4 g de cobre, ¿cuál es la ley de la aleación?

820

Peso del fino: 8 g. Peso de la aleación: 8 g de oro + 4 g de cobre = 12 g. Aplicamos la fórmula:

$$L = \frac{F}{P} \text{ Sustituyendo: } L = \frac{8}{12} = 0.666\frac{2}{3} \quad \text{R.}$$

Si un anillo de oro es de ley 0.900 y contiene 6 g de oro puro, ¿cuánto pesa el anillo?

821

Peso del fino: 6 g ley: 0.900

$$P = \frac{F}{L} \text{ Sustituyendo: } P = \frac{6}{0.900} = 6\frac{2}{3} \text{ g} \quad \text{R.}$$

- 822** Un objeto de oro pesa 50 g. Si la ley es de 0.800, ¿cuántos g de oro puro contiene el objeto?

Peso total: 50 g ley: 0.800

$$F = P \times L \quad \text{Sustituyendo: } F = 50 \times 0.800 = 40 \text{ g} \quad \text{R.}$$

- 823** Un anillo de oro de 18 quilates pesa 9 adarmes. Si el adarme de oro puro se paga a \$180, ¿cuánto vale el anillo?

Peso total: 9 ad. ley: $\frac{18}{24}$. Hallemos el peso del fino:

$$F = P \times L \therefore F = 9 \times \frac{18}{24} = 6.75 \text{ ad}$$

Habiendo 6.75 adarmes de oro puro y pagándose a \$180 el adarme, el anillo vale $6.75 \times \$180 = \$1,215$ R.

359

Ejercicio

1. Fundiendo 10 g de oro puro con 5 g de cobre, ¿cuál es la ley de la aleación? R. $0.666\frac{2}{3}$
2. Una cadena de plata que pesa 200 g contiene 50 g de cobre. ¿Cuál es la ley? R. 0.750
3. Un vaso de oro que pesa 900 g contiene 100 g de liga. ¿Cuál es la ley? R. $0.888\frac{8}{9}$
4. Un arete de oro pesa 2 g y es de ley 0.900. ¿Cuánto pesa el oro que contiene? R. 1.8 g
5. Un anillo de oro de 14 quilates pesa 12 g. ¿Cuánto pesa el oro que contiene? R. 7 g
6. Un vasito de oro de 16 quilates pesa 60 adarmes. ¿Cuál es su valor en moneda si el adarme de oro se paga a 60 balboas? R. 2,400 balboas
7. Un anillo de oro de 18 quilates pesa 12 g. ¿Cuánto vale el oro del anillo pagándolo a 80 nuevos soles el gramo? R. 720 nuevos soles
8. Una cadenita de oro de 0.500 de ley contiene 5 adarmes de oro puro. ¿Cuánto pesa la cadenita? R. 10 adarmes
9. Un objeto de oro de 16 quilates contiene 120 g de oro puro. ¿Cuántos g de liga tiene el objeto? R. 60 g
10. Un objeto de oro pesa 1.6718 g y su ley es 0.900. Si el gramo de oro puro se paga a \$115, ¿cuánto vale ese objeto? R. \$173

PROBLEMAS SOBRE ALEACIONES

Como una aleación no es más que una aligación en la que los ingredientes son metales, los problemas de aleaciones se resuelven del mismo modo que los de la aligación directa o inversa y pueden ocurrir los mismos casos vistos en ésta.

Fundiendo 14 g de plata a la ley de 0.950, con 8 g de plata a la ley de 0.850 y con 12 g de plata pura, ¿cuál es la ley de la aleación?

824

Se resuelve como aligación directa:

14 g de ley 0.950	contienen	$14 \times 0.950 = 13.300$ g pl. pura.
8 " " " 0.850	"	$8 \times 0.850 = 6.800$ " " "
12 " " plata pura	"	$12 \times 1.000 = 12.000$ " " "
34 g (peso total)		32.100 (fino)

La ley de la aleación será: $32.100 \div 34 = 0.944 \frac{2}{17}$ R.

¿Qué cantidades de oro de 0.980 y 0.940 de ley serán necesarias para obtener 20 kg de oro a la ley de 0.950?

825

Este problema es semejante a los del 2º caso de la aligación inversa, en que se conoce la cantidad total de la mezcla y se resuelve de modo análogo:

t. medio	ley de ingred.	comparación	cant. de ingred.
0.950	0.980	$0.950 - 0.940 =$	0.010
	0.940	$0.980 - 0.950 =$	0.030

Ahora se reparten 20 kg en partes proporcionales a los resultados obtenidos:

$$x = \frac{20 \times 0.01}{0.01 + 0.03} = \frac{0.20}{0.04} = 5 \text{ kg de } 0.980$$

R.

$$y = \frac{20 \times 0.03}{0.01 + 0.03} = \frac{0.60}{0.04} = 15 \text{ kg de } 0.940$$

Si se tratara de tres o más ingredientes, se procedería igual que en la aligación inversa.

1. Se funden 20 gramos de plata a la ley de 0.990 con 10 gramos a la ley de 0.915. ¿Cuál será la ley de la aleación? R. 0.965

2. ¿Cuál será la ley de una aleación de 35 gramos de plata a la ley de 0.960, con 12 gramos a la ley de 0.950 y con 23 gramos a la ley de 0.850? R. 0.9305

3. ¿Cuál será la ley de una aleación de 5 libras de plata a la ley de 0.970, 1 libra de 0.960, 3 libras de 0.950 y 2 libras de plata pura? R. $0.967 \frac{1}{7}$

4. Se hace una aleación con 4 lingotes de oro. El primero es de 0.900 de ley y pesa 8 libras; el segundo a la ley de 0.890 pesa 7 libras; el tercero a la ley de 0.870 pesa 4 libras y el cuarto, de oro puro pesa 1 libra. ¿Cuál será la ley de la aleación? R. 0.8955

360

Ejercicio

5. ¿Qué cantidades de plata a la ley de 0.980 y 0.930 serán necesarias para obtener plata de 0.960? **R. 30 de 0.980 y 20 de 0.940 para 50 partes de la aleación.**
6. ¿Qué cantidades de plata a la ley de 0.915, 0.910, 0.870 y 0.850 serán necesarias para que la aleación salga a 0.900? **R. 50 de 0.915, 30 de 0.910, 10 de 0.870 y 15 de 0.850 o 30 de 0.915, 50 de 0.910, 15 de 0.870 y 10 de 0.850 para 105 partes de la aleación.**
7. Si se quiere obtener oro a la ley de 0.895, combinando oro de 0.940, 0.900 y 0.880, ¿cuánto se tomará de cada calidad? **R. 50 de 0.880 y 15 de 0.940 y 0.900 para 80 partes de la aleación.**
8. Se tiene un lingote de 1,215 gramos de plata a la ley de 0.875. La aleación está formada con plata de 0.910, 0.895 y 0.700. ¿Cuánto entra de cada clase en la aleación? **R. 165 g de 0.700 y 525 g de 0.910 y 0.895**
9. Un platero quiere obtener 870 gramos de plata a la ley de 0.890 y para ello funde plata de 0.940, 0.920, 0.870 y 0.845. ¿Cuánto necesitará de cada calidad? **R. 270 g de 0.940, 120 g de 0.920, 180 g de 0.870 y 300 g de 0.845 o 120 g de 0.940, 270 g de 0.920, 300 g de 0.870 y 180 g de 0.845**
10. Se hace una aleación con oro de 0.950, 0.900, 0.850 y 0.800. Se quiere que la aleación resulte de 0.875 y que en ella entren 9 partes de 0.950. ¿Cuánto se tomará de cada uno de los otros componentes? **R. 3 partes de 0.900 y 0.850 y 9 de 0.800 o 27 partes de 0.900 y 0.850 y 9 de 0.800**
11. ¿Qué cantidades de plata de 0.950 y 0.940 deberán ser añadidas a 25 gramos de plata de 0.850 para que la aleación resulte de 0.920? **R. 35 g de 0.950 y 0.940**
12. ¿Qué cantidad de níquel hay que añadir a 150 g de plata de 0.800 para obtener un lingote de 0.600 de ley? (Resuélvase como el 3^{er} caso de la aligación inversa. Ley del níquel: 0.) **R. 50 g**
13. ¿Qué cantidad de cobre hay que añadir a un lingote de oro de 0.980 que pesa 100 g para obtener otro lingote de 0.950? (3^{er} caso de la aligación. Ley del cobre: 0.) **R. $3\frac{3}{19}$ g**
14. ¿Con qué cantidad de cobre hay que fundir un lingote de oro de 0.900 que pesa 1,500 g para obtener un lingote de 0.700? **R. $428\frac{4}{7}$ g**
15. ¿Qué cantidad de cobre hay que añadir a un lingote de 0.900 que pesa 1,000 g para tener otro lingote de 0.750 de ley? **R. 200 g**
16. Se tiene un lingote de oro de 0.900 que pesa 1,400 g. ¿Qué cantidad de oro puro habrá que añadirle para obtener otro lingote de 0.980 de ley? **R. 5,600 g**
17. ¿Qué cantidades de oro de 14 K y 20 K harán falta para obtener oro de 17 K? **R. Partes iguales**
18. Se quiere obtener oro de 18 K, y para ello se dispone de oro de 14 K, 16 K y 22 K. ¿Qué cantidad de cada uno de éstos será necesaria? **R. 6 partes de 22 K, 4 partes de 14 K y 4 partes de 16 K**
19. Un joyero quiere obtener 22 g de oro de 14 K y para ello funde oro de 20 K, 16 K, 13 K y 12 K. ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesitará para obtener lo que desea? **R. 4 g de 20 K, 2 g de 16 K, 4 g de 13 K y 12 g de 12 K o 2 g de 20 K, 4 g de 16 K, 12 g de 13 K y 4 g de 12 K**



Desde hace mucho tiempo la emisión de monedas se hacía para conmemorar algún hecho histórico o para rendir homenaje a algún gran personaje. Esta moneda griega, llamada decadrachma, data de 480 a. C. Se emitió para celebrar la

derrota de los cartagineses a manos de los griegos en la famosa batalla de Himera. La moneda era de plata y tenía una figura alegórica rodeada de peces. Poseía un valor de diez dracmas.

Capítulo **LIII**

MONEDAS

LA MONEDA es una mercancía que sirve para medir toda clase de valores y que se emplea como instrumento general en los cambios.

826

CONDICIONES QUE DEBEN REUNIR LAS MONEDAS

827

La mercancía que se emplee como moneda debe reunir las condiciones siguientes: ser de fácil conservación; reunir mucho valor en poco volumen; ser fácilmente fraccionable; que su valor fluctúe poco y ser de fácil acuñación y difícil desacuñación.

Las mercancías que mejor reúnen estas condiciones son los metales; por eso las monedas se fabrican de metales, siendo los más usados el **oro**, la **plata**, el **bronce**, el **níquel** y el **cobre**.

LIGA

828

Con objeto de lograr mayor consistencia en las monedas, el oro y la plata se ligan con pequeñas cantidades de cobre.

Las monedas de bronce son liga de cobre, estaño y zinc.

**TIPO DE CAMBIO DE LAS DIFERENTES
MONEDAS AMERICANAS Y EL EURO
CON RESPECTO AL DÓLAR ESTADOUNIDENSE (USD)***

1 USD =	1.0000 balboas
	2,147.5 bolívares
	7.9950 bolivianos
	517.93 colones costarricenses
	8.7500 colones salvadoreños
	18.032 córdobas
	1.9850 dólares beliceños
	1.0733 dólares canadienses
	0.7436 euros
	35.900 gourdes
	5,035.0 guaraníes
	18.890 lempiras
	3.1750 nuevos soles
	3.0815 pesos argentinos
	526.55 pesos chilenos
	1,917.8 pesos colombianos
	1.0000 pesos cubanos
	32.075 pesos dominicanos
	10.813 pesos mexicanos
	24.350 pesos uruguayos
	7.6465 quetzales
	1.9495 reales

*Tipos de cambio vigentes en mayo de 2007.

MONEDAS DE LOS PAÍSES DE AMÉRICA Y ESPAÑA	
PAÍS	MONEDA
Argentina	peso argentino
Belice	dólar beliceño
Bolivia	boliviano
Brasil	real
Canadá	dólar canadiense
Chile	peso chileno
Colombia	peso colombiano
Costa Rica	colón costarricense
Cuba	peso cubano
Ecuador	dólar estadounidense
El Salvador	colón salvadoreño y dólar estadounidense
España	euro (€)
Estados Unidos	dólar estadounidense (USD)
Guatemala	quetzal
Haití	gourde
Honduras	lempira
México	peso mexicano
Nicaragua	córdoba
Panamá	balboa
Paraguay	guaraní
Perú	nuevo sol
República Dominicana	peso dominicano
Uruguay	peso uruguayo
Venezuela	bolívar

829 METALES FINOS

En las monedas se llama **metales finos** al oro y a la plata. La cantidad de oro o plata que tiene una moneda se dice que es la cantidad de **fino** de la moneda.

830 LEY DE LAS MONEDAS

Se llama **ley de la moneda** a la cantidad de **fino** que hay en la moneda. La ley de la moneda da la proporción en que se encuentra el metal fino con el metal inferior, generalmente cobre, con que se liga.

La **ley** de la moneda suele darse en **milésimas**.

La **ley de las monedas de oro** suele ser de 0.900, lo que significa que en mil partes en peso de la moneda, 900 son de oro y 100 de cobre.

La **ley de las monedas de plata** suele ser de 0.900, como sucede en Cuba, en que las monedas de plata contienen 900 partes de plata y 100 del metal corriente, o de 0.835 como sucede en otros países.

831 TOLERANCIA

Como es difícil conseguir que todas las monedas de una misma clase tengan rigurosamente el mismo peso y la misma ley, se suele conceder una **tolerancia** tanto en el peso como en la ley, tolerancia que puede ser en **más** y en **menos**.

La tolerancia para las monedas, tanto en la ley como en el peso, suele ser de 0.001 a 0.003, lo que significa que una moneda cuyo peso o cuya ley sea de 0.001 a 0.003 mayor o menor que lo fijado, no pierde su valor y tiene curso legal.

832 VALORES DE LA MONEDA

En la moneda hay que distinguir tres valores: **valor legal**, que es el valor que tiene de acuerdo con las leyes del Estado que la emite, el cual va inscrito en las monedas; **valor intrínseco**, que es el valor que tiene el oro o la plata que contienen las monedas, y **valor extrínseco**, que depende de las circunstancias y en gran parte de su valor en relación con las monedas extranjeras.

El **valor legal** suele ser mayor que el **valor intrínseco** a fin de cubrir los gastos de acuñación de la moneda; el **valor extrínseco** puede ser mayor o menor que el valor legal.

833 MONEDA FIDUCIARIA O BILLETES DE BANCO son certificados al portador que en cualquier momento pueden ser cambiados por monedas. En esta seguridad, son aceptados por todas las personas y con ello se facilitan mucho las operaciones mercantiles.



Las primeras operaciones mercantiles se hacían como simple trueque de mercancías. En plena Edad Media existían mercados a donde concurrían traficantes de todas las latitudes. En el siglo xi fue famoso como mercado de trueques, en Bi-

zancio, Karim-Erzerum, donde se daban cita los mercaderes del norte de Europa, los de China, los de la India, etc. Tales trueques se resolvían por medio de la regla conjunta.

Capítulo **LIV**

CONJUNTA

La **regla conjunta** tiene por objeto determinar la relación que existe entre dos cantidades, conociendo otras relaciones intermedias.

834

TEOREMA FUNDAMENTAL

Si se tienen varias igualdades tales que el segundo miembro de cada una sea de la misma especie que el primero de la siguiente y se multiplican ordenadamente, el primer miembro de la igualdad que resulta es de la primera especie y el segundo de la última.

835

Sean las igualdades:

$$\begin{aligned} a \text{ libras} &= b \text{ kilogramos} \\ c \text{ kilogramos} &= d \text{ arrobas} \\ e \text{ arrobas} &= f \text{ onzas} \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que $a \text{ libras} = dbf \text{ onzas}$.

En efecto: multiplicando los dos miembros de la primera de las tres igualdades dadas por c y los de la segunda igualdad por b , tendremos:

$$\begin{aligned} a \text{ libras} \times c &= b \text{ kilogramos} \times c \\ c \text{ kilogramos} \times b &= d \text{ arrobas} \times b \end{aligned}$$

y como el producto es de la misma especie que el multiplicando, tendremos:

$$\begin{aligned} ac \text{ libras} &= bc \text{ kilogramos} \\ cb \text{ kilogramos} &= bd \text{ arrobas} \end{aligned}$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

$$ac \text{ libras} = bd \text{ arrobas}$$

Multipliquemos ahora los dos miembros de esta igualdad por e y los dos miembros de la tercera de las tres igualdades dadas al principio por bd y tendremos:

$$\begin{aligned} ace \text{ libras} &= bde \text{ arrobas} \\ ebd \text{ arrobas} &= bdf \text{ onzas} \end{aligned}$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

$$ace \text{ libras} = bdf \text{ onzas}$$

que era lo que queríamos demostrar.

836

PROBLEMAS DE REGLA CONJUNTA

Los problemas de regla conjunta se resuelven aplicando la siguiente:

REGLA PRÁCTICA

Se forma con los datos una serie de igualdades, poniendo en el primer miembro de la primera la incógnita (x), y procurando que el segundo miembro de cada igualdad sea de la misma especie que el primero de la siguiente y de este modo el segundo miembro de la última igualdad será de la misma especie que el primero de la primera. Se multiplican ordenadamente estas igualdades y se halla el valor de x .

837

Sabiendo que 6 varas de paño cuestan lo mismo que 5 metros y que 2 metros valen \$4, ¿cuánto costarán 4 varas?

Escribiremos primero la igualdad de la incógnita: $\$x = 4 \text{ varas}$

Como el segundo miembro de esta igualdad es varas, el primero de la siguiente también será varas, o sea:

$$6 \text{ varas} = 5 \text{ metros}$$

Como el segundo miembro de esta igualdad es metros, el primero de la siguiente también debe ser metros, o sea:

$$2 \text{ metros} = \$4$$

Así que tendremos:

$$\begin{aligned} \$x &= 4 \text{ varas} \\ 6 \text{ v} &= 5 \text{ metros} \\ 2 \text{ m} &= \$4 \end{aligned}$$

Multipliquemos ordenadamente $\$x \times 6 \times 2 = \$4 \times 5 \times 4$

y de aquí: $x = \frac{4 \times 5 \times 4}{6 \times 2} = \$6\frac{2}{3}$

Las 4 varas cuestan $\$6\frac{2}{3}$.

DESCUENTOS SUCESIVOS

838

La regla conjunta tiene una de sus aplicaciones en los descuentos sucesivos.

Rebajar sucesivamente 5%, 10% y 8% de una cantidad **no equivale** a rebajar 5% + 10% + 8% = 23% de la cantidad, sino que significa que a la cantidad dada se le rebaja 5%; a lo que queda después de esta rebaja se le rebaja 10% y a lo que queda después de esta segunda rebaja se le rebaja 8%.

Este cálculo puede hacerse aplicando los conocimientos del tanto por ciento, pero haciéndolo por conjunta resulta mucho más rápido.

Sobre una mercancía marcada en \$800 se hacen tres descuentos sucesivos de 20%, 25% y 5%. ¿A qué precio se vende?

839

Aplicando la conjunta, tenemos:

$\$x$ de venta = \$800 marcados
 \$100 marcados = \$80 con el 1^{er} descuento
 \$100 con el 1^{er} descuento = \$75 con el 2^o descuento
 \$100 con el 2^o descuento = \$95 con el 3^{er} descuento (venta.)

$$x = \frac{800 \times 80 \times 75 \times 95}{100 \times 100 \times 100} = \$456 \quad \text{R.}$$

La mercancía se vende a \$456.

1. ¿Cuánto costarán 6 metros de casimir, sabiendo que 4 metros cuestan lo mismo que 25 metros de lana y que 10 metros de lana cuestan \$60? **R. \$225**
2. ¿Cuál será el sueldo mensual de un teniente, si el de 2 capitanes equivale al de 3 tenientes; el de 3 capitanes al de 2 comandantes y el sueldo mensual de un comandante es de \$20,000?
R. \$8,888 $\frac{8}{9}$
3. ¿El trabajo de cuántos hombres equivaldrá al trabajo de 8 niños, si el trabajo de 4 niños equivale al de 3 niñas, el de una mujer al de 2 niñas y el de tres mujeres al de un hombre?
R. El trabajo de un hombre

361

Ejercicio

4. ¿Qué suma necesitará un gobierno para pagar a 4 generales, si el sueldo de 6 coroneles equivale al de 10 comandantes; el de 5 comandantes al de 12 tenientes; el de 2 generales al de 4 coroneles; el de 6 tenientes al de 9 sargentos y si 4 sargentos ganan 2,400 dólares al mes?
R. 28,800 dólares
5. ¿Cuánto costarán 6 metros de terciopelo, si 5 metros cuestan lo mismo que uno de casimir; 8 de paño lo que dos de casimir; 10 metros de tela de hilo valen \$80 y 15 metros de tela de hilo cuestan lo mismo que 4 de paño? **R. \$144**
6. Si una camisa marca \$300 y se le rebajan sucesivamente 15% y 5%, ¿a cómo se vende?
R. \$242.25
7. Si el precio de catálogo de un arado es de \$900 y se vende haciéndole descuentos sucesivos de 15%, 20% y 2%, ¿a cómo se vende? **R. \$599.76**
8. Sabiendo que 2 kilos de frijoles cuestan lo mismo que 3 kilos de azúcar; que 4 lápices valen lo que 5 kilos de azúcar; que 3 cuadernos valen \$30 y que 8 lápices cuestan lo mismo que 4 cuadernos, ¿cuánto costarán 6 kilos de frijoles? **R. \$36**
9. Un auto comprado en 12,000 balboas se vende haciendo sobre el costo descuentos sucesivos de 5%, 10% y 5%. ¿En cuánto se vende? **R. 9,747 balboas**
10. Sobre el precio de catálogo de un automóvil que es de 40,000 nuevos soles se rebajan sucesivamente 4%, 5%, 10% y 2%. ¿A cómo se vende? **R. 32,175.36 nuevos soles**
11. ¿Cuál es la diferencia entre rebajar a lo que marca \$600 15% y 25% (no sucesivamente) y rebajar sucesivamente 15% y 25%? **R. \$22.50**
12. Sobre un artículo marcado en \$4,000 se rebajan sucesivamente 5%, 10% y 15%. ¿En cuánto menos se vendería si se rebajara 5%, 10% y 15% no sucesivamente? **R. En \$107 menos**



El primer tipo de seguro en gran escala que se practicó fue el seguro marítimo. La organización más poderosa de seguros que existe en el mundo se conoce como el Lloyd. Debe su nombre a que los primeros aseguradores se reunían en un ca-

fetín de Londres, propiedad de Eduardo Lloyd. A mediados del siglo XVII, este cafetín de Lloyd se convirtió en una verdadera bolsa de seguros de todas clases.

Capítulo **LV**

SEGUROS

En el transcurso de la historia el hombre ha tenido que afrontar innumerables **riesgos**, a los que necesariamente ha estado expuesto. Tales contingencias lo han obligado a crear un sistema de previsión que amortigüe, en cierto modo, los efectos que provocan esos riesgos sobre la economía de los suyos.

Esos medios de previsión constituyen lo que en general se conoce con el nombre de **seguros**. En otras palabras, el seguro es un **contrato** entre dos partes, en el que se estipula que una de ellas (**asegurado**) se obliga a pagar ciertas cantidades por adelantado durante determinado tiempo; y la otra (**asegurador**) se obliga a abonar al asegurado una cantidad previamente fijada, si ocurre alguno de los hechos previstos en el contrato.

Se llama **póliza** al documento o contrato que firman las partes y donde constan los derechos y obligaciones del asegurado y del asegurador. En la póliza también aparece el **capital** asegurado.

Prima es la cantidad que debe abonar el asegurado en los plazos que se fijan en la póliza. Véase la tabla de la página 636.

En todos los países hay compañías que se dedican a realizar esta clase de negocios, es decir, a la **venta** de pólizas de seguros. Para poder establecerse, estas compañías tienen que reunir los requisitos que señalen las leyes del país en que operen. Por lo general, a las **compañías de seguros** se les exige un capital determinado, así como el depósito de una cantidad (**fianza**) en la Tesorería de la Nación.

841 CLASES DE SEGUROS

Hay varias clases de seguros. Entre los principales están el **seguro de vida** y el **seguro contra incendios**, que estudiaremos a continuación.

I. SEGURO DE VIDA

Hay muchos planes sobre seguros de vida. Entre los más difundidos tenemos el **seguro de vida entera u ordinario**, **vida entera con pagos limitados** y el **dotal**.

842 SEGURO DE VIDA ENTERA U ORDINARIO

Es aquel en el que el asegurado paga las **primas** por adelantado (años, semestres, trimestres) mientras viva. La compañía se compromete, a la muerte del asegurado, a abonar al **beneficiario** el importe total de la póliza.

843 SEGURO DE VIDA ENTERA CON PAGOS LIMITADOS

En este plan el asegurado se compromete a pagar primas adelantadas hasta un tiempo determinado, según el número de años convenido (15 o 20 años por lo general). Transcurrido ese plazo, cesan las obligaciones del asegurado; la compañía viene obligada a pagar al beneficiario el importe de la póliza cuando ocurra el fallecimiento del asegurado. Si el asegurado dejara de existir antes del vencimiento del plazo fijado para pagar las primas, la compañía está obligada a pagar inmediatamente al beneficiario el importe de la póliza.

844 SEGURO DOTAL

En el plan dotal la póliza tiene un vencimiento a plazo fijo. Al decursar este plazo, el asegurado recibe el capital estipulado en la póliza. Si el asegurado fallece antes, la compañía abona al beneficiario inmediatamente el capital asegurado.

Ejemplos

- 1) El señor Rodríguez, que tiene 34 años de edad, compra una póliza de seguro de vida entera de \$150,000. ¿Cuánto pagará de prima anual?

Para resolver este problema, buscamos en la tabla la edad (34 años), vamos a la columna de vida entera y bajamos hasta los 34 años, y nos da una prima de 28.77 pesos. Esta cantidad es la prima por cada \$1,000 pesos; si tenemos un capital de \$150,000, tendremos:

$$150 \times 28.77 = \$4,315.50 \text{ R.}$$

La prima anual será de \$4,315.50.

- 2)** Juan González, que tiene 35 años de edad, suscribe una póliza de seguro de vida entera con pagos limitados, por \$180,000 a veinte años. ¿Cuál será la prima semestral?

Vamos a la tabla y localizamos en la columna de los años el 35; luego buscamos en el apartado correspondiente al plan vida entera con pagos limitados a 20 años, y encontramos \$40.01 de prima por cada \$1,000 pesos de capital asegurado.

Como la póliza es de \$180,000 y por cada \$1,000 pagamos \$40.01, tendremos:

$$180 \times \$40.01 = \$7,201.80$$

La prima anual será de \$7,201.80, pero como tenemos que determinar la prima semestral, hallaremos el 2% de la prima anual y se lo sumaremos a ésta:

$$\frac{\$7,201.80 \times 2}{100} = \$144.04$$

$$\begin{array}{r} \$7,201.80 \\ + \$ 144.04 \\ \hline \$7,345.84 \end{array}$$

Esta cantidad la dividimos entre 2:

$$\$7,345.84 \div 2 = \$3,672.92$$

La prima semestral será de **\$3,672.92 R.**

- 3)** Andrés Reposo compra un seguro dotal a 15 años, por \$250,000. Si el asegurado tiene 41 años de edad, ¿cuánto pagará de prima trimestral?

Encontramos en la tabla la prima \$71.51. Como son \$250,000, tendremos una prima anual de:

$$250 \times \$71.51 = \$17,877.50$$

Hallamos 3% de esta cantidad, se la sumamos a la prima anual y esta suma la dividimos entre 4.

$$\frac{\$17,877.50 \times 3}{100} = \$536.33$$

$$\begin{array}{r} \$17,877.50 \\ + \$ 536.33 \\ \hline \$18,413.83 \end{array}$$

$$\$18,413.83 \div 4 = \$4,603.46 \quad \mathbf{R.}$$

TABLA DE PRIMAS DE SEGUROS DE VIDA

PRIMAS ANUALES POR CADA \$1,000
DE CAPITAL ASEGURADO PARA SEGUROS INDIVIDUALES

EDAD DEL ASEGURADO	VIDA ENTERA	VIDA CON PAGOS LIMITADOS		SEGUROS DOTALES	
		15 AÑOS	20 AÑOS	15 AÑOS	20 AÑOS
21	20.79	38.43	31.61	67.41	49.35
22	21.21	38.85	32.03	67.41	49.35
23	21.63	39.38	32.45	67.52	49.35
24	22.16	39.90	32.87	67.52	49.46
25	22.68	40.53	33.39	67.52	49.46
26	23.21	41.46	33.92	67.73	49.77
27	23.73	41.79	34.55	67.83	49.88
28	24.36	42.53	35.07	67.94	50.09
29	24.99	43.26	35.70	68.15	50.30
30	25.73	44.00	36.33	68.25	50.51
31	26.46	44.73	37.07	68.46	50.72
32	27.20	45.57	37.70	68.67	50.93
33	27.93	46.41	38.43	68.88	51.24
34	28.77	47.25	39.27	69.09	51.56
35	29.61	48.20	40.01	69.41	51.87
36	30.56	49.04	40.85	69.62	52.19
37	31.50	49.98	41.69	69.93	52.61
38	32.55	51.03	42.63	70.35	53.03
39	33.60	52.08	43.47	70.67	53.45
40	34.65	53.13	44.52	71.09	53.97
41	35.91	54.29	45.57	71.51	54.50
42	37.17	55.44	46.62	72.03	55.13
43	38.43	56.60	47.78	72.56	55.76
44	39.80	57.86	48.93	73.08	56.49
45	41.27	59.22	50.19	73.71	57.23
46	42.48	60.59	51.45	74.34	58.17
47	44.52	61.95	52.92	75.08	59.01
48	46.31	63.53	54.29	75.92	60.06
49	48.09	65.10	55.86	76.86	61.22
50	50.09	66.78	57.54	77.81	62.37
51	52.08	68.46	59.22	78.86	63.74
52	54.29	70.35	61.11	80.01	65.21
53	56.60	72.24	63.11	81.27	66.78
54	59.12	74.24	65.21	82.74	68.46
55	61.74	76.44	67.41	84.21	70.35

CÓMO USAR ESTA TABLA

Las compañías de seguros que operan en el ramo de seguros de vida, utilizan tablas de primas similares a ésta.

Esta tabla de primas está basada en cálculos de probabilidades de vida.

Para hallar la prima busque en la tabla la edad del asegurado, localice la columna del plan a que se acoge y en el punto coincidente de ambos, encontrará la prima a pagar.

NOTA:

Para hallar la prima trimestral, agréguese a la prima anual 3% de la misma, dividiendo después el resultado entre 4.

Para determinar la prima semestral, agréguese 2% y divida entre 2.

362

Ejercicio

Usando la tabla de la página 636, determine las primas de cada una de las siguientes pólizas:

1. Una póliza de vida ordinaria por \$200,000 si la edad del asegurado es de 35 años. **R. \$5,922**
2. Una póliza de pagos limitados por \$300,000, a 15 años, si la edad del asegurado es de 40 años. **R. \$15,939**
3. Una póliza dotal a 20 años, de \$60,000, si la edad es 30 años. **R. \$3,030.60**
4. El presidente de una compañía petrolera contrata una póliza de vida entera a los 50 años. Si la póliza es por \$2,000,000, ¿cuánto será la prima trimestral? **R. \$25,796.40**
5. ¿Cuál es la prima trimestral de una póliza dotal de \$600,000, por 20 años, si el asegurado tiene 32 años? **R. \$7,868.70**
6. Una póliza de vida entera si el asegurado tiene 26 años y paga \$9,284 de prima anual. **R. \$400,000**
7. Si la póliza es de pagos limitados a 15 años y el asegurado tiene 50 años, pagando \$20,034 de prima anual. **R. \$300,000**
8. Un industrial compra una póliza dotal a 20 años y su edad es de 45 años. Si paga una prima anual de \$11,446, ¿cuál será el valor del capital asegurado? **R. \$200,000**
9. El director de una escuela suscribe una póliza dotal a 20 años, a los 35 años de edad. Si paga \$10,374 de prima anual, ¿a cuánto asciende el capital asegurado? **R. \$200,000**
10. Diga cuál es el capital de una póliza de pagos limitados a 20 años, si el que la suscribe tiene 21 años de edad y paga \$8,850.80 de prima anual. **R. \$280,000**

II. SEGURO CONTRA INCENDIOS

Uno de los seguros más utilizados es el **seguro contra incendios**. Las primas en este tipo de seguro se determinan por cada \$100 de valor de la cosa asegurada, y dependen de la clase de construcción del edificio, del fin al que está destinado y de las construcciones que lo rodean.

A los efectos del seguro contra incendios, los edificios se clasifican en cuatro clases: **clase extra, primera clase, segunda clase y tercera clase**.

Son de **clase extra** los contruidos de hormigón, mampostería, ladrillos, bloques de cemento o cualquier combinación de estos materiales, sin más empleo de madera que las de las puertas, ventanas y sus marcos. Son de **primera clase** aquellos en cuya construcción se emplean tejas de barro, techos de azotea, fibrocemento u otro material sólido. Pertenecen a la **clase segunda** aquellos en que predomina la construcción de la primera clase, pero el porcentaje de madera utilizado no excede 40%, y además sus techos son sólidos. Corresponden a la **tercera clase** los contruidos de madera o de construcción mixta, en los que predomina la madera en más de 40%.

También para los efectos del seguro contra incendios se tiene en cuenta la clase de ocupación a que se destina el edificio. Así, existe una clasificación en orden ascendente al riesgo: A, B, C, D, E, etcétera.

845

846

TABLA DE PRIMAS ANUALES DE SEGUROS CONTRA INCENDIOS

POR CADA \$100 DE CAPITAL ASEGURADO

CLASE DE OCUPACIÓN	CLASE EXTRA		PRIMERA CLASE		SEGUNDA CLASE		TERCERA CLASE	
	E	C	E	C	E	C	E	C
A. Viviendas de familias	0.08	0.15	0.12	0.20	0.40	0.40	0.60	0.60
B. Colegios (externados)	0.15	0.25	0.18	0.35	0.65	0.65	0.85	0.85
C. Plantas de televisión	0.25	0.40	0.30	0.48	0.80	0.80	1.00	1.00
D. Tiendas de librería	0.40	0.60	0.48	0.72	1.00	1.00	1.25	1.25
E. Fábricas de aceites vegetales	0.60	0.80	0.72	0.96	1.25	1.25	1.50	1.50

NOTA:

Si la extensión de la póliza es por un periodo mayor de un año, se cobrará el tipo anual completo por los primeros 12 meses más 75% del tipo anual por cada año adicional. El periodo de vigencia de una póliza no debe exceder de cinco años.

Ejemplos

- 1) La gerencia de CWZ, planta de televisión de la capital, decide comprar una póliza de seguro contra incendios. ¿Qué prima pagará si el capital asegurado es de 1,350,000 pesos, teniendo en cuenta que el edificio es de clase extra y está valorado en 350,000 pesos? Tenemos que el total del seguro es 1,350,000 pesos y el valor del edificio es de 350,000 pesos, luego $1,350,000 - 350,000 = 1,000,000$ pesos, que será el valor del contenido asegurado.

Buscamos en la tabla la clase extra a que pertenece el edificio asegurado, bajamos hasta la clase C en la columna de la clase de ocupación, donde se encuentran incluidas las plantas de televisión, y tendremos una prima anual de 0.25 por cada 100 pesos de valor del edificio, y 0.40 por cada 100 pesos de valor del contenido.

Como el edificio está valorado en 350,000 pesos, hallamos 0.25% de 350,000:

$$\frac{0.25 \times 350,000}{100} = 0.25 \times 3,500 = 875 \text{ pesos}$$

Como el contenido asegurado asciende a 1,000,000 de pesos, hallamos 0.40% de 1,000,000 pesos y tendremos:

$$\frac{0.40 \times 1,000,000}{100} = 0.40 \times 10,000 = 4,000 \text{ pesos}$$

Prima anual del edificio	875 pesos
Prima anual del contenido	4,000 "
Prima total anual	4,875 "

- 2) Se compra una póliza contra incendios por 4 años para un colegio cuyo edificio es de primera clase. Si el edificio se valora en \$845,000 y el contenido en \$327,000, ¿cuál será la prima pagada al cabo de los 4 años?

Localizamos en la tabla la columna de la primera clase, observamos en la columna correspondiente a la clase de ocupación el apartado B Colegios, y vemos que por el edificio se paga 0.18% y por el contenido 0.35%.

Hallamos 0.18% de \$845,000:

$$\frac{0.18 \times \$845,000}{100} = 0.18 \times 8,450 = \$1,521$$

Hallamos 0.35% de \$327,000:

$$\frac{0.35 \times \$327,000}{100} = 0.35 \times 3,270 = \$1,144.50$$

Por el primer año se pagará \$2,665.50 y por cada uno de los años restantes, 75% de esta cantidad. Hallamos 75% de \$2,665.50:

$$\frac{75 \times \$2,665.50}{100} = 75 \times 26.655 = \$1,999.13$$

Multiplicamos esta cantidad por 3 y tendremos \$5,997.38, le agregamos la prima del primer año \$2,665.50 y nos dará \$8,662.88, que será la prima al cabo de los 4 años.

1. Se asegura el contenido de una fábrica de aceite en \$800,000. Si el edificio es de clase extra, ¿cuál será la prima anual? **R. \$6,400**
2. Se asegura una librería cuyo edificio es de tercera clase. Si el edificio se valora en \$280,000 y el contenido en \$220,000, ¿qué prima pagará por un seguro contra incendios por 2 años? **R. \$11,037.50**
3. Antonio Rodríguez asegura su casa en \$200,000. Si la construcción es de clase extra, ¿qué prima pagará en un año? **R. \$160**
4. Una planta de televisión, cuyo edificio es de primera clase, contrata un seguro por \$8,000,000. Si el valor del contenido se calcula en \$5,000,000, ¿qué prima pagará por 3 años? **R. \$82,500**
5. Un colegio toma un seguro contra incendios por \$1,350,000. Si el edificio es de segunda clase y está valorado en \$220,000, ¿qué prima anual pagará? **R. \$8,775**